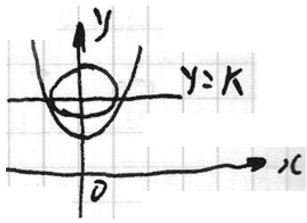
Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene più ad eguate alla sua preparazione.

Quesito N° 1

1. Si scrivano le equazioni le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla parabola di equazione $y=5-x^2$ ed alla retta di equazione $y=1$ e si indichino con r' ed r'' ($r'>r''$) i rispettivi raggi. Dopo avere determinato r' ed r'', si scriva l'equazione di un'altra circonferenza C''' tangente a C'', avente il centro sulla retta degli altri due centri e raggio uguale a r'. Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C' e C'' e si calcoli l'area della regione del piano limitata dalle due parabole.

Risolvo la prima parte del quesito col metodo del fascio di coniche bitangenti.

Data la simmetria della parabola $y=-x^2+5$ rispetto all'asse y la conica degenere è la retta $y=k$ contata due volte; cioè i punti base del fascio sono i punti di tangenza.



$y+x^2-5+(y-k)^2=0$ equazione del fascio di coniche bitangenti.

Impongo la condizione di tangenza con la retta di equazione $y=1$.

$$\begin{cases} y=1 \\ y+x^2-5+(y-k)^2=0 \end{cases} \quad x^2+1+1-2k+k^2-5=0 \quad x^2+k^2-2k-3=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow k^2-2k-3=0 \quad \text{cioè } k_1=-1;\ k_2=3$$

$$C')\ x^2+y^2+3y-4=0\ ;\ r'=\frac{5}{2} \qquad C'')\ x^2+y^2-5y+4=0\ ;\ r''=\frac{3}{2}$$

La parabola $y=-x^2+5$ ha vertice $V(0;5)$ ed incontra gli assi cartesiani nei punti $M\left(\sqrt{5};0\right)$, $N\left(-\sqrt{5};0\right)$. Adesso risolvo la questione per altra via. Le circonferenze dovendo essere bitangenti alla parabola $y=-x^2+5$ che è simmetrica rispetto all'asse y, avranno i centri sull'asse y e quindi avranno l'equazione del tipo: $x^2+y^2-2\beta y+c=0$

Impongo le condizioni di tangenza con la parabola $y=-x^2+5$ e con la retta $y=1$.

$$(1)\ \begin{cases} x^2+y^2-2\beta y+c=0 \\ y=5-x^2 \end{cases} \quad x^2=5-y \ ; \quad 5-y+y^2-2\beta y+c=0$$

$$y^2-(1+2\beta)y+c+5=0$$

$$\Delta=1+4\beta^2+4\beta-4c-20=4\beta^2+4\beta-4c-19=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\beta y+c=0 \\ y=1 \end{cases} \quad x^2-2\beta+c+1=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow \quad c=2\beta-1$$

$$4\beta^2+4\beta-8\beta+4-19=0 \qquad 4\beta^2-4\beta-15=0$$

$$\beta=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{4}=\frac{2\pm 8}{4} \qquad \beta_1=-\frac{3}{2} \ ; \quad \beta_2=\frac{5}{2}$$

Come si nota le equazioni delle due circonferenze sono quelle trovate in precedenza. La retta $y=1$ incontra la circonferenza C' e C'' nel punto $T(0;1)$

Le coordinate dei punti di contatto delle due circonferenze con la parabola sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y^2-(1+2\beta)y+c+5=0 \\ x^2=5-y \end{cases}$$

nel caso particolare che la prima equazione abbia radici uguali.

$$y_1=y_2=-\frac{b}{2a}=\frac{1+2\beta}{2} \qquad \beta=-\frac{3}{2} \ ; \quad y=-1 \ ; \quad x=\pm\sqrt{6}$$

$$D\equiv(-\sqrt{6};-1) \qquad E\equiv(\sqrt{6},-1) \qquad \beta=\frac{5}{2} \ ; \quad y=3 \ ; \quad x=\pm\sqrt{2}$$

$$F\equiv(+\sqrt{2},3) \qquad G\equiv(-\sqrt{2},3)$$

La circonferenza C''' ha centro appartenente all'asse y ($\alpha=0$) ed è tangente (esternamente) a C'' ed ha raggio uguale ad r'; quindi: $\beta_{C'''}=\beta_{C''}+r''+r'=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$

Pertanto l'equazione di C''' è: $x^2+\left(y-\frac{13}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ cioè: $\mathbf{x^2+y^2-13y+36=0}$

La parabola Γ per essere tangente a C'' e C''', ciascuna delle quali ha il centro sull'asse delle y, è necessariamente simmetrica rispetto all'asse y ed ha pertanto un'equazione del tipo: $y=ax^2+c$

La parabola Γ è tangente alla circonferenza C'' se è nullo il delta dell'equazione risolvente il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-5y+4=0 \\ x^2=\frac{y-c}{a} \end{cases} \quad \frac{y-c}{a}+y^2-5y+4=0 \quad ay^2-(5a-1)y+4a-c=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (5a-1)^2-4a(4a-c)=0 \quad \boxed{9a^2-10a+4ac+1=0}$$

La tangenza di Γ con C''' dà luogo a:

$$\begin{cases} x^2+y^2-13y+36=0 \\ x^2=\frac{y-c}{a} \end{cases} \quad \frac{y-c}{a}+y^2-13y+36=0$$

$$ay^2-(13a-1)y+36a-c=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (13a-1)^2-4a(36a-c)=0 \ ; \ 25a^2-26a+4ac+1=0$$

$$\begin{cases} 25a^2-26a+4ac+1=0 \\ 9a^2-10a+4ac+1=0 \end{cases} \quad \text{ma } a\neq 0 \text{ per cui: } a-1=0 \quad a=1$$

$$16a^2-16a=0$$

$$9-10+4c+1=0 \quad c=0$$

L'equazione di Γ è: $y=x^2$

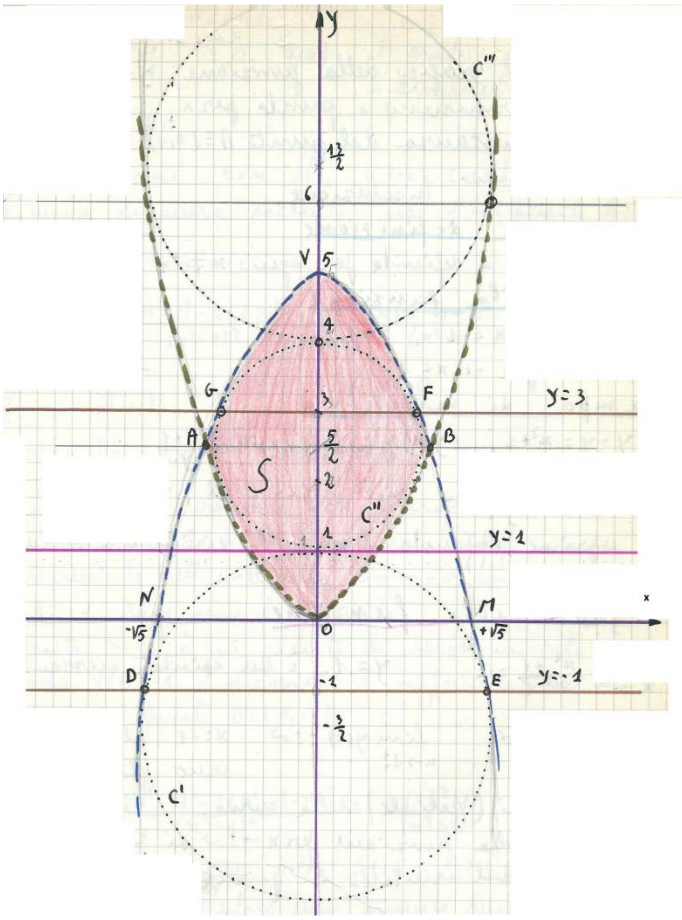
Le due parabole si incontrano nei punti A e B le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema:

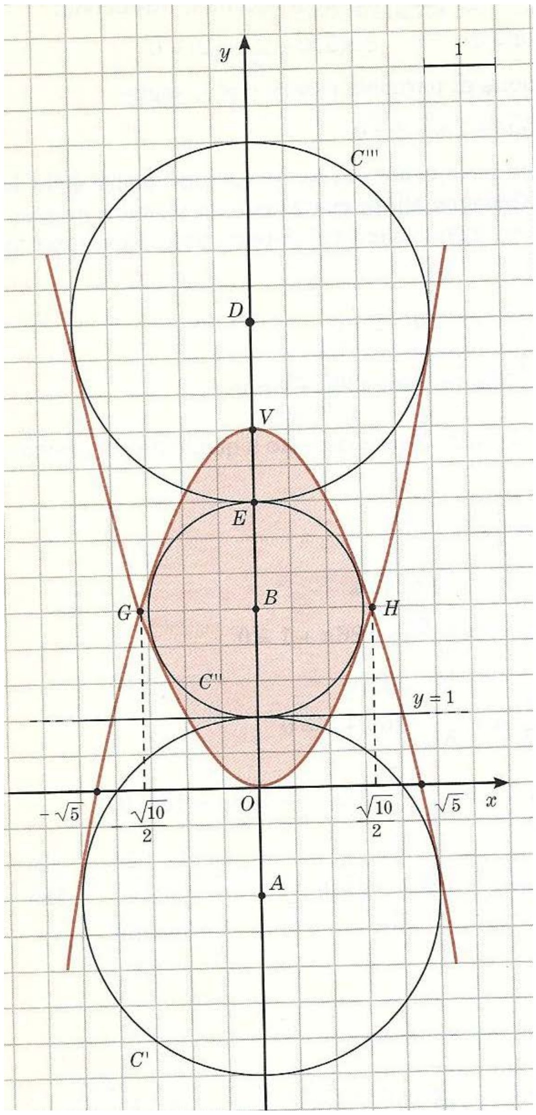
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=5-x^2 \end{cases} \quad y=5-y \quad y=\frac{5}{2} \quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \quad \mathbf{A}\left(-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{5}{2}\right) \quad \mathbf{B}\left(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{5}{2}\right)$$

L'area S della regione di piano limitata dalle due parabole è:

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{10}}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{2}}\left[\left(5-x^2\right)-x^2\right]dx=\int_{-\frac{\sqrt{10}}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{2}}\left(5-2x^2\right)dx=\left[5x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{\sqrt{10}}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{2}}=2\left[5x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}}=2\left[\frac{5\sqrt{10}}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$$

$$\mathbf{S=\frac{10}{3}\sqrt{10}}$$

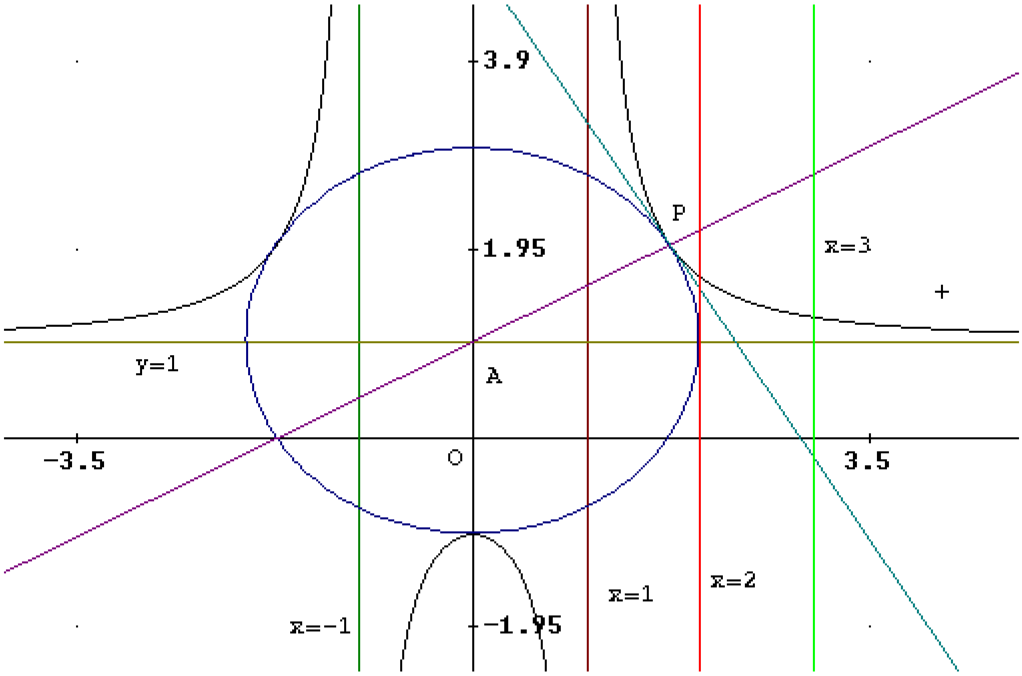




Quesito N°2

2. a) Studiare e disegnare il grafico γ della funzione $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ e determinare i punti P per i quali la distanza dal punto $A(0;1)$ assume valore minimo.

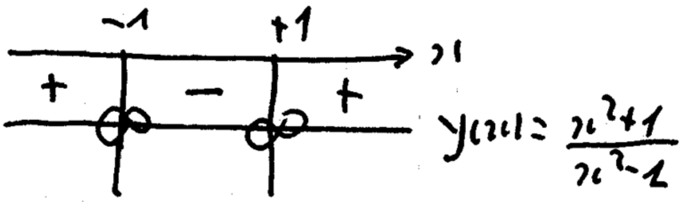
b) Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalla curva γ, dall'asintoto orizzontale e dalle rette $x=2$, $x=3$.



Dominio della funzione: $dom\, y = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1$ la curva γ incontra gli assi cartesiani nel punto $B(0;-1)$

Segno della funzione



$y(x) > 0$ se $x < -1$; $x > 1$ $\quad y(x) < 0$ se $-1 < x < 1$

Codominio della funzione

$$y x^2 - y = x^2 + 1 \quad y x^2 - x^2 = y + 1 \quad (y-1)x^2 = y + 1 \quad x^2 = \frac{y+1}{y-1}$$

$$x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{y-1} \geq 0 \text{ se } y \leq -1;\ y > 1 \qquad codom\, y = (-\infty; -1]\ ;\ ]1; +\infty[$$

Eventuali asintoti della funzione

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y=1} \text{ asintoto orizzontale completo}$$

$$\lim_{x \to -1\pm} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x=-1} \text{ asintoto verticale completo}$$

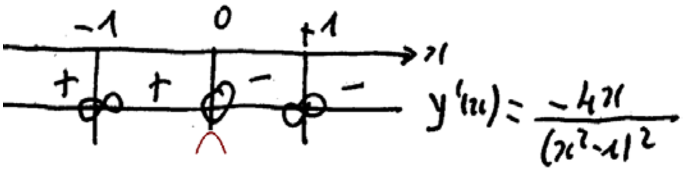
La funzione proposta presenta nei punti $x = \pm 1$ delle discontinuità di seconda specie

Simmetrie evidenti

$y(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=y(x)$ il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y

Estremi della funzione

$$y'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\qquad y'(x)=0\quad\Rightarrow\quad x=0$$



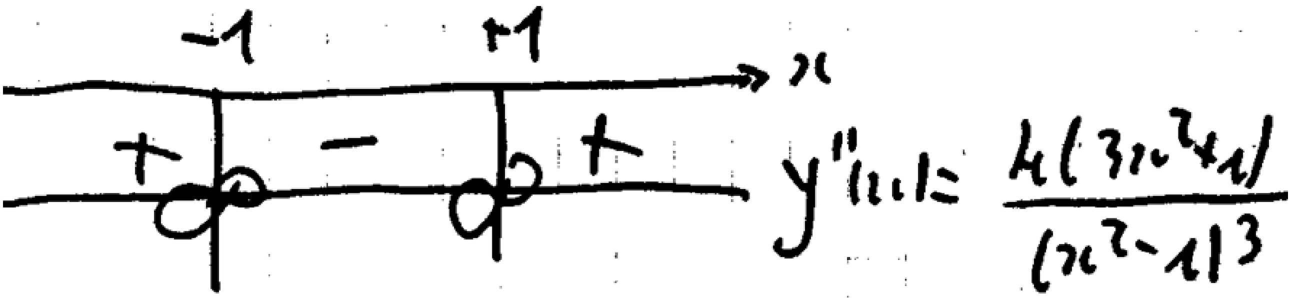
$x=0$ punto di massimo relativo $y(0)=-1$ massimo relativo

$B(0;-1)$ immagine geometrica del massimo relativo

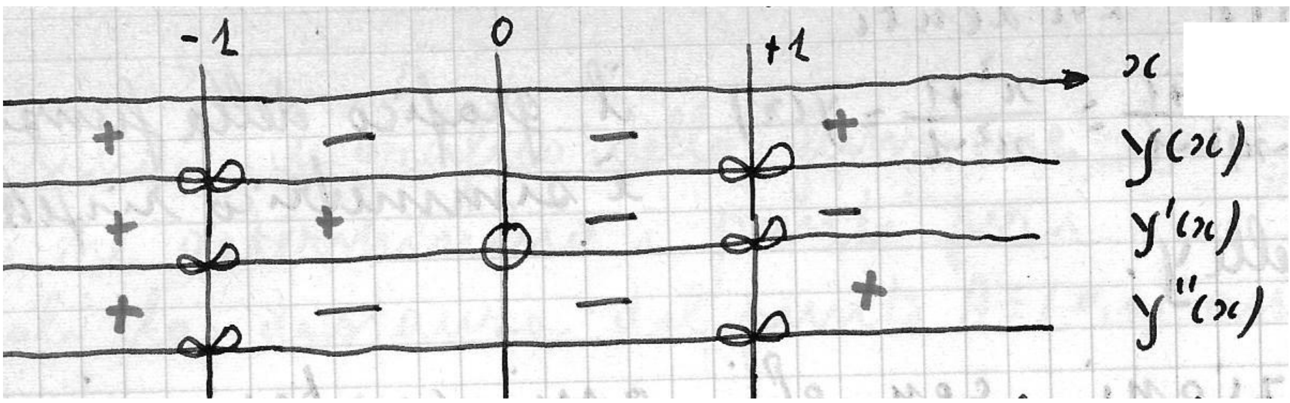
Eventuali punti di flesso

$$y''(x)=-4\cdot\frac{(x^2-1)^{\cancel{2}\,1}-2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x^2}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

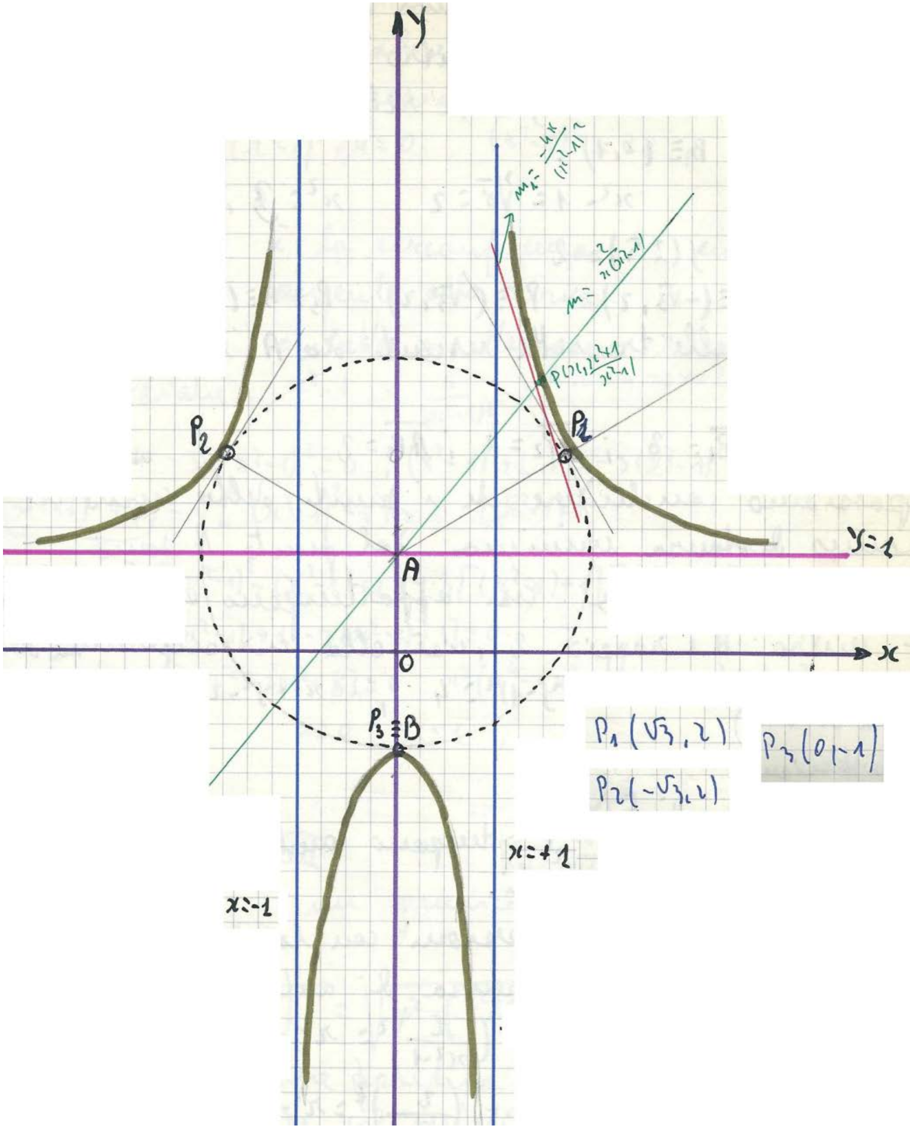
La derivata seconda non si annulla mai e quindi il grafico della funzione non presenta punti di flesso.



Il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto (il basso) per $x<-1$; $x>1$ $(-1<x<1)$



Il grafico della funzione è quello indicato in figura



Per sviluppare la seconda parte del quesito possiamo seguire diversi procedimenti.

Primo procedimento

La distanza di un punto P da una curva è il segmento di perpendicolare condotto dal punto P alla curva. La perpendicolare ad una curva in un suo punto Q è la retta perpendicolare alla tangente alla curva nel punto Q.

La generica retta del piano passante per il punto $A(0;1)$ ha equazione: $y=mx+1$ ed incontra la curva di equazione $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ nei punti $P(x;y)$ le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema:

$\begin{cases} y=mx+1 \\ y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \end{cases}$ $\quad mx+1=\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \quad mx=\dfrac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1} \quad \mathbf{m=\dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}}$ che rappresenta il coefficiente angolare della retta AP.

Il coefficiente angolare della tangente t alla curva nel suo punto $P(x;y)$ è: $m_1 = y'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$t \perp AP \quad \Rightarrow \quad m\,m_1 = -1$ cioè: $\dfrac{2}{\cancel{x}(x^2-1)} \cdot \dfrac{-4\cancel{x}}{(x^2-1)^2} = -1$

$x = 0$ (asse y) corrisponde ad un caso particolare cioè alla retta del fascio di centro A avente coefficiente angolare ∞. L'asse y è la retta perpendicolare alla curva nel punto $B(0;-1)$.

$(x^2-1)^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \pm\sqrt{3}} \quad y(0) = -1 \quad y(\pm\sqrt{3}) = 2$

I punti $P_1(-\sqrt{3};2)$, $P_2(\sqrt{3};2)$, $P_3 \equiv B(0;-1)$ sono i piedi delle tre rette uscenti dal punto A e perpendicolari al grafico della funzione.

Essendo: $\overline{AP_1} = 2$, $\overline{AP_2} = 2$, $\overline{AP_3} = 2$ possiamo concludere affermando che i punti dell curva che hanno distanza minima dal punto A sono i punti $P_1;P_2;P_3$.Essi appartengono alla circonferenza di centro A e raggio 2, cioè alla circonferenza di equazione $x^2 + (y-1)^2 = 4$ $\mathbf{x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0}$

Secondo Procedimento

I punti $P_1;P_2;P_3$ si ottengono anche in base alle seguenti considerazioni.

Consideriamo le intersezioni del grafico della funzione con una generica circonferenza di centro A e raggio r.

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = r^2 \\ y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \end{cases} \qquad x^2 + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2 = r^2 \quad \text{cioè} \quad x^2 \mathbf{-1} + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2 = r^2 \mathbf{-1} \quad \text{con } x \neq \pm 1$$

Ponendo $\mathbf{X = x^2 - 1}$ con $\mathbf{X \neq 0}$ otteniamo: $X + \dfrac{4}{X^2} = r^2 - 1$ cioè: $F(X) = X^3 - (r^2-1)X + 4 = 0 \quad [\sigma]$

Tenendo presente che $X = \alpha$ è radice doppia di $F(X) = 0$ quando si verifica la seguente uguaglianza $F(\alpha) = F'(\alpha) = 0$, otteniamo: $3X^2 - 2(r^2-1)X = 0$ ma, essendo $\mathbf{X \neq 0}$ abbiamo:

$X = \dfrac{2}{3}(r^2-1)$ tale radice è doppia se verifica l'equazione $[\sigma]$, cioè se:

$\dfrac{\cancel{8}\,\mathbf{2}}{27}(r^2-1)^3 - \dfrac{\cancel{4}}{9}(r^2-1)^3 + \cancel{4}\,\mathbf{1} = 0 \qquad (r^2-1)^3 = 27 \qquad r^2 - 1 = 3 \qquad \mathbf{r^2 = 4} \qquad \mathbf{x^2 + (y-1)^2 = 4}$ è la circonferenza di centro A tangente al grafico della funzione.

$\mathbf{r^2 = 4} \quad \Rightarrow \quad X = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$

I punti di contatto si ottengono risolvendo l'equazione: $x^2 -1 + \left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2 = 4-1 \quad x^2-1+\left(\frac{2}{x^2-1}\right)^2=3$

$$\left(x^2-1\right)^3+4-3\left(x^2-1\right)^2=0 \quad \left(x^2-1\right)^3+1^3+3-3\left(x^2-1\right)^2=0 \quad \left(x^2-1\right)^3+1^3-3\left[\left(x^2-1\right)^2-1\right]=0$$

$$\left[\left(x^2-1\right)+1\right]\cdot\left[\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-1\right)+1\right]-3\left[\left[\left(x^2-1\right)+1\right]\cdot\left[\left(x^2-1\right)-1\right]\right]=0$$

$$x^2\cdot\left[\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-1\right)+1\right]-3x^2\left[\left(x^2-1\right)-1\right]=0 \quad x^2\cdot\left[\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2-1\right)+1-3\left(x^2-1\right)+3\right]=0$$

$$x^2\left(x^4+1-2x^2-x^2-3x^2+8\right)=0 \quad x^2\left(x^4-6x^2+9\right)=0 \quad x^2\left(x^2-3\right)^2=0 \quad \left[x\left(x^2-3\right)\right]^2=0$$

$x\left(x^2-3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ e quindi $y=-1 \quad x^2-3=0 \quad x=\pm\sqrt{3}$ e quindi $y=0$

Terzo procedimento

Se $P\left(x;\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ è un generico punto del grafico della funzione abbiamo:

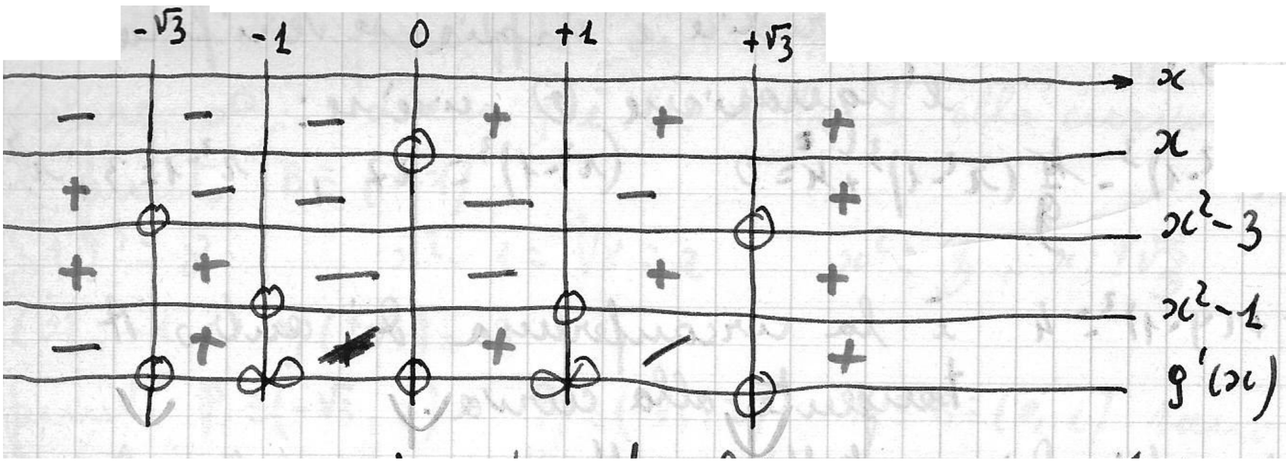
$$AP=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2}}=\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ è una funzione positiva e quindi il suo eventuale minimo coincide col minimo della funzione

$$g(x)=\left[\varphi(x)\right]^2=x^2+\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2} \qquad g'(x)=2x-\frac{16x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=2x-\frac{16x}{\left(x^2-1\right)^3}=2x\left[\frac{\left(x^2-1\right)^3-8}{\left(x^2-1\right)^3}\right]$$

$$\mathbf{g'(x)}=\frac{2x\left(x^2-1-2\right)\left[\left(x^2-1\right)^2+2\left(x^2-1\right)+4\right]}{\left(x^2-1\right)^3}=\mathbf{\frac{2x\left(x^2-3\right)\left(x^4+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}}$$

$g'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{3} \quad x_3=0$



$x_1 ; x_2 ; x_3$ sono tre punti di minimo. I punti $P_1 ; P_2 ; P_3$ appartengono al grafico della funzione $y(x)$ ed hanno minima distanza dal punto A.

$$g''(x)=2-\frac{16(x^2-1)^{\cancel{3}\,1}-16x\cdot 3\cdot \cancel{(x^2-1)^2}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{6}\,4}}=2-\frac{16(x^2-1-6x^2)}{(x^2-1)^4}=\mathbf{2+\frac{16(5x^2+1)}{(x^2-1)^4}}$$

$$g''(-\sqrt{3})=g''(\sqrt{3})=10>0 \qquad g''(0)=18>0 \quad y=\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{y+1}{y-1} \qquad x=0 \;\Leftrightarrow\; y=-1$$

$$\overline{AP}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{\frac{y+1}{y-1}+(y-1)^2}=\sqrt{\frac{y+1+(y-1)^3}{y-1}}=\sqrt{\frac{y+1+y^3-3y^2+3y-1}{y-1}}=\sqrt{\frac{y^3-3y^2+4y}{y-1}}$$

$$\overline{AP}^2=\varphi(y)=\frac{y^3-3y^2+4y}{y-1} \qquad \varphi'(y)=\frac{(3y^2-3y+4)(y-1)-y^3+3y^2-4y}{(y-1)^2}$$

$$\varphi'(y)=\frac{3y^3-3y^2-6y^2+6y+4y-4-y^3+3y^2-4y}{(y-1)^2}=\frac{2y^3-6y^2+6y-4}{(y-1)^2}=\frac{2(y^3-3y^2+3y-2)}{(y-1)^2}$$

$$\boldsymbol{\varphi'(y)=\frac{2(y-2)(y^2-y+1)}{(y-1)^2}} \qquad \varphi'(y)=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}$$

$\varphi'(y)>0$ se $y>2$ $\quad \varphi'(y)<0$ se $y<2$ $\quad y=2$ punto di minimo

Ai valori trovati bisogna aggiungere $x=0$ cioè $y=-1$ in quanto sappiamo che: $x^2=\dfrac{y+1}{y-1}$

Risoluzione mediante il metodo elementare

$\varphi(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{4}{(x^2-1)^2}}$ il suo minimo coincide col minimo del suo quadrato

$\varphi^2(x)=x^2+\dfrac{4}{(x^2-1)^2}=(x^2-1)+\dfrac{4}{(x^2-1)^2}+1$ Una costante additiva si può trascurare:

$f(x)=(x^2-1)+\dfrac{4}{(x^2-1)^2}$ somma di due termini positivi. Infatti, se consideriamo i punti P_1 e P_2 avremo $x<-1 ; x>1$ sicché la quantità x^2-1 è positiva. Noi sappiamo che se il prodotto p di opportune potenze di due variabili numeriche positive è costante, allora la loro somma è minima quando le variabili sono proporzionali ai rispettivi esponenti.

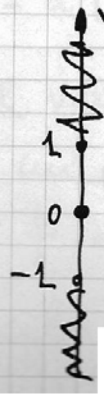
Il prodotto delle variabili positive $\left(x^2-1\right)^2$ e $\left[\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2}\right]^1$ è costante (4) e quindi la sua somma è minima quando le loro basi sono proporzionali ai rispettivi esponenti.

$\frac{x^2-1}{2}=\frac{4}{\left(x^2-1\right)^2}$ $\quad \left(x^2-1\right)^3=8 \quad x^2-1=2 \quad x=\pm\sqrt{3}$

Codominio

$yx^2-y=x^2+1 \qquad yx^2-x^2=y+1; \quad (y-1)x^2=y+1$

$x^2=\frac{y+1}{y-1} \qquad x^2>0 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1}\geq 0$ per $y\leq -1;\ y>1$



$\text{codom} f =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

(P) $g(y)=\frac{y+1}{y-1}+(y-1)^2 \qquad g'(y)=-\frac{2}{(y-1)^2}+2(y-1)=$

$=2\frac{-1+(y-1)^3}{(y-1)^2} \qquad g'(y)=0 \Rightarrow -1+(y-1)^3=0 \qquad y-1=+1 \qquad y=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$S=\int_2^3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)dx=2\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx=\cancel{2}\int_2^3\left[\frac{1}{\cancel{2}(x-1)}-\frac{1}{\cancel{2}(x+1)}\right]dx=$

$=\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_2^3=\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^3=\ln\frac{3-1}{3+1}-\ln\frac{2-1}{2+1}=$

$=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$

$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \qquad 1=A(x+1)+B(x-1) \qquad x=1\Rightarrow A=\frac{1}{2} \qquad x=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

Terzo quesito

3 · Si studi la variazione della funzione $y=3\cos 2x-4\cos x$ **nell'intervallo** $0\leq x\leq 2\pi$

La funzione è definita e continua in tutto l'intervallo $[a, b]$; essa è inoltre periodica di periodo 2π.

$y(2\pi - x) = 3\cos 2(2\pi - x) - 4\cos(2\pi - x) = 3\cos 2x - 4\cos x = y(x)$

Questo significa che la curva di equazione $y = y(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

$y = 3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\cos x = 3(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - 4\cos x$

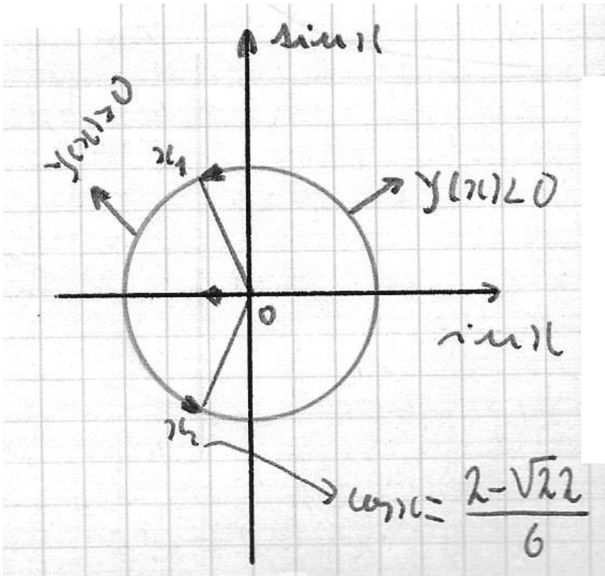
$y(x) = 3\cos 2x - 4\cos x = 6\cos^2 x - 4\cos x - 3$

$y(x) = 0 \Longrightarrow 6\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \qquad \cos x = \dfrac{2 \pm \sqrt{22}}{6}$

L'equazione $\cos x = \dfrac{2 + \sqrt{22}}{6} > 1$ non ammette radici reali, mentre l'equazione $\cos x = \dfrac{2 - \sqrt{22}}{6}$ ammette, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, le radici:

$x_1 \cong \pi - \dfrac{7}{20}\pi = \dfrac{13}{20}\pi \qquad x_2 = \pi + \dfrac{7}{20}\pi = \dfrac{27}{20}\pi \qquad x_1 \cong 116^\circ 38' \; (2{,}04^R)$

$x_2 \cong 243^\circ 22' \; (4{,}24^R) \qquad \dfrac{2 - \sqrt{22}}{6} \cong -0{,}4484 \qquad \dfrac{2 + \sqrt{22}}{6} \cong 1{,}1151$



$y(x) > 0$ per $-1 < \cos x < \frac{2-\sqrt{22}}{6}$ cioè per $x_1 < x < x_2$

$y(x) < 0$ per $\frac{2-\sqrt{22}}{6} < \cos x < 1$

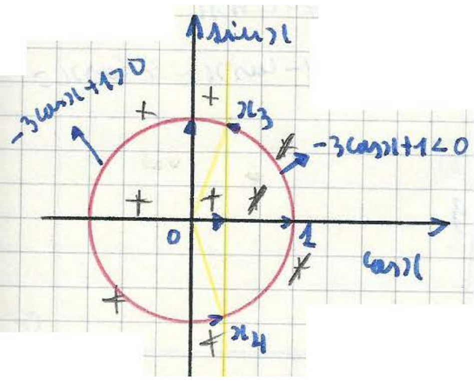
$y(0) = y(2\pi) = -1$ La curva incontra l'asse delle x nei punti $A \equiv (x_1, 0)$ e $B \equiv (x_2, 0)$, l'asse delle y nel punto $R \equiv (0, -1)$ Punti particolari della curva.

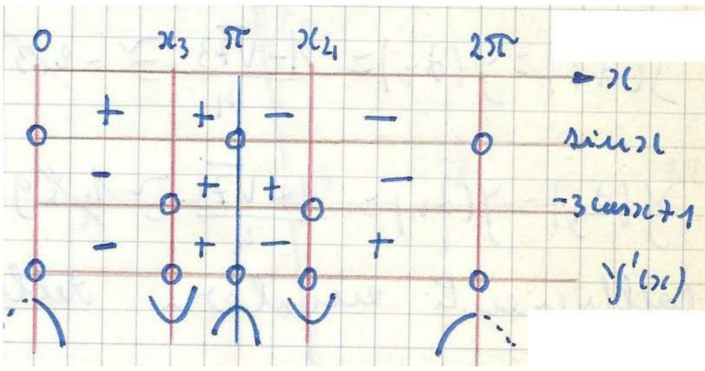
$R \equiv \left(\frac{\pi}{2}; -3\right)$ $\quad M \equiv (\pi, 7)$ $\quad S \equiv \left(\frac{3}{2}\pi; -3\right)$

$$y'(x) = -12 \sin x \cos x + 4 \sin x = 4 \sin x(-3\cos x + 1)$$

$y'(x) = 0 \Rightarrow \quad \sin x = 0 \quad x = 0 \quad x = 2\pi$

$\cos x = \frac{1}{3}$ $\quad x_3 \cong \frac{7}{18}\pi \; (70°32') = 1{,}23^R$ $\quad x_4 \cong \frac{29}{18}\pi = \sim 290°$





La funzione ha un massimo (relativo) per $x=0$ rappresentato dal punto $E\equiv(0,-1)$, un minimo (assoluto) per $x=x_3$ $\left[C\equiv\left(\frac{7}{18}\pi,-\frac{11}{3}\right)\right]$, un massimo (assoluto) per $x=\pi$ $\left[M\equiv(\pi,+7)\right]$, un minimo (assoluto) per $x=x_4$ $\left[D\equiv\left(\frac{29}{18}\pi,-\frac{11}{3}\right)\right]$, un massimo relativo $\left[G\equiv(2\pi,-1)\right]$

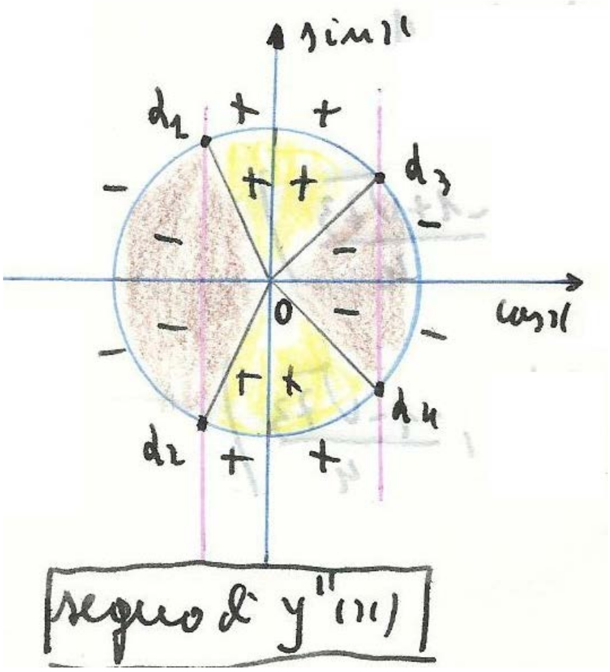
$$y(x_3)=y(x_4)=6\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}-3=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-3=-\frac{11}{3}$$

$$y''(x)=D\left[-6\sin 2x+4\sin x\right]=-12\cos 2x+4\cos x=$$
$$=12\left(2\cos^2 x-1\right)\mp 4\cos x=4\left(-6\cos^2 x+\cos x+3\right)$$

$y''(x)=0 \Rightarrow 6\cos^2 x-\cos x-3=0$ $\quad \cos x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+72}}{12}=\dfrac{1\pm\sqrt{73}}{12}$

$\cos x=\dfrac{1-\sqrt{73}}{12}\cong-0{,}6287$ $\quad x=\alpha_1\cong 128^\circ 57'$ $\quad x=\alpha_2\cong 231^\circ 03'$

$\cos x=\dfrac{1+\sqrt{73}}{12}\cong 0{,}7953$ $\quad x=\alpha_3\cong 37^\circ 19'$ $\quad x=\alpha_4=322^\circ 41'$



$y''(x) > 0 \Rightarrow$

$\dfrac{1-\sqrt{73}}{12} < \cos x < \dfrac{1+\sqrt{73}}{12} \Rightarrow$

$\alpha_3 < x < \alpha_1 \, ; \, \alpha_2 < x < \alpha_4$

Il grafico della funzione presenta 4 flessi nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

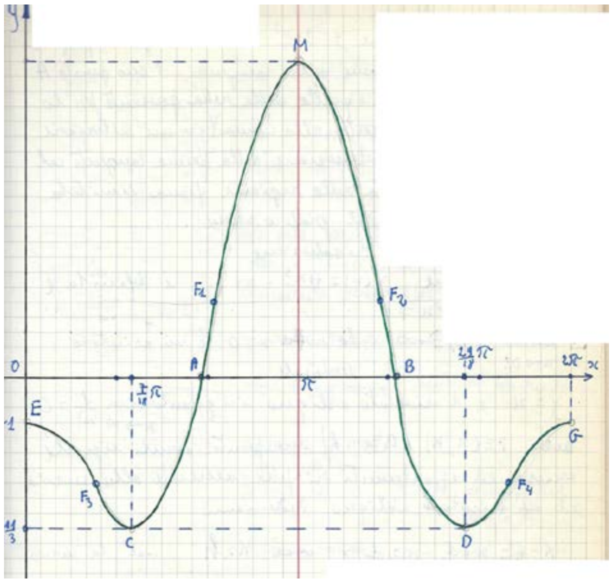
Le ordinate dei punti di flesso sono **-2,39** e **1,89** e si ottengono sostituendo i valori $x=\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4\}$ nella funzione $y(x)$. Otteniamo:

$$y(\alpha_1)=y(\alpha_2)=\frac{-1+\sqrt{73}}{4}\simeq 1,89 \qquad y(\alpha_3)=y(\alpha_4)=\frac{-1-\sqrt{73}}{4}\simeq -2,39$$

$$F_1\left(\alpha_1;\frac{-1+\sqrt{73}}{4}\right) \quad F_2\left(\alpha_2;\frac{-1+\sqrt{73}}{4}\right) \quad F_3\left(\alpha_3;\frac{-1-\sqrt{73}}{4}\right) \quad F_4\left(\alpha_4;\frac{-1-\sqrt{73}}{4}\right)$$

I coefficienti angolari delle tangenti di flesso sono:

$$m_1=y'(\alpha_1)=8,98 \quad m_2=y'(\alpha_2)=-8,98 \quad m_3=y'(\alpha_3)=-3,36 \quad m_4=y'(\alpha_4)=3,36$$



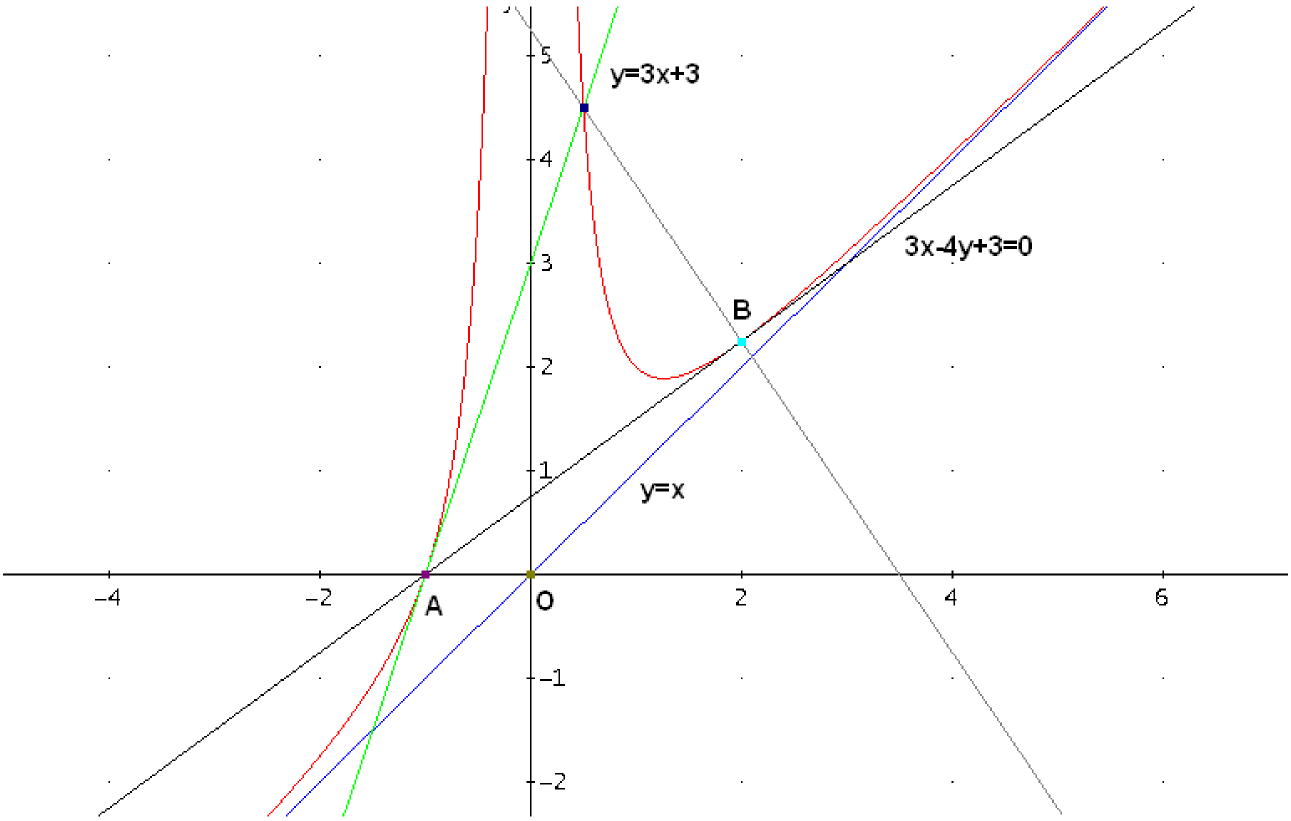
4. Si studi la funzione $y=\frac{1+x^3}{x^2}$ e se ne disegni il grafico γ . Si scriva poi l'equazione della tangente a γ nel suo punto A di ordinata nulla e quella della retta passante per A e tangente a γ in un ulteriore punto B. Detta C l'intersezione della prima tangente con γ, si calcoli a) l'area del triangolo ABC, b) l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento BC e da γ.

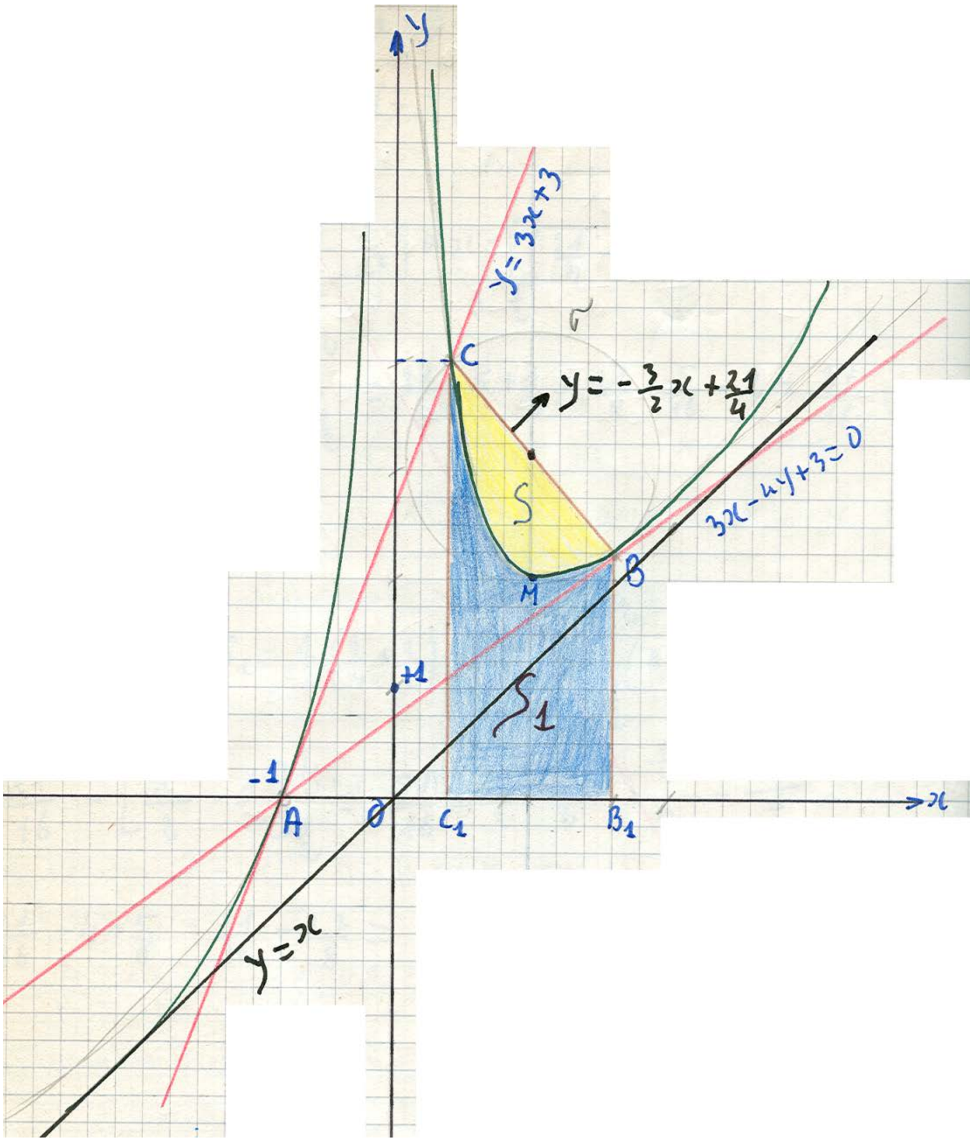
□ La funzione $y(x)=\frac{1+x^3}{x^2} = x+\frac{1}{x^2}$ è definita e continua $\forall x \neq 0$

□ $\lim_{x\to 0^\pm} y(x) = +\infty$ La retta $x=0$ è un asintoto verticale

$y=x$ è l'asintoto obliquo in quanto $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}=0$

Detti $P\equiv(x,k)$ e $Q\equiv(x,h)$ due punti aventi uguale ascissa ed appartenenti rispettivamente alla curva ed all'asintoto obliquo deduciamo



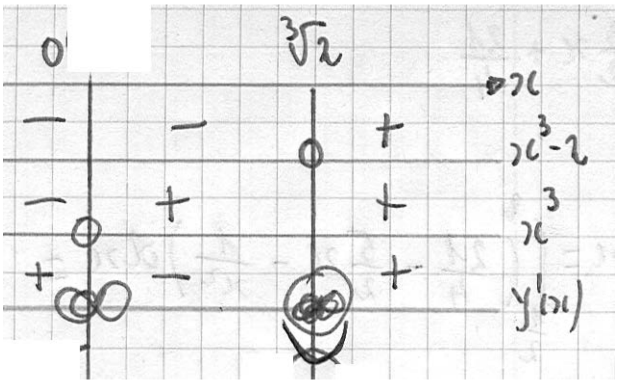


$K - h = x + \frac{1}{x^2} - x = \frac{1}{x^2} > 0$ cioè $K > h$ cioè la curva si sviluppa nel semipiano individuato dalla retta $y = x$ e contenente il semiasse positivo delle y.

	-1		0		x
−	0	+		+	$1+x^3$
+		+	0	+	x^2
−	0	+	∞	+	$y(x)$

La curva incontra l'asse y nel punto $A \equiv (-1, 0)$

$$y'(x) = 1 - \frac{2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$$



$x_0 = \sqrt[3]{2}$ = punto di minimo relativo $\cong 1{,}2599$

$M \equiv \left(\sqrt[3]{2} ; \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ $\quad y_M = \frac{3}{2}x_M$

$y(\sqrt[3]{2}) = \frac{1+2}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

□ $y''(x) = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$ funzione sempre positiva la curva non presenta flessi e volge sempre la sua concavità verso l'alto.

□ $y'(-1) = 3$ $\quad y = 3x+3$ retta tangente alla curva in A

$y = m(x+1)$ equazione del fascio di rette di centro A

$$\begin{cases} y = m(x+1) \\ y = \frac{x^3+1}{x^2} \end{cases}$$

$m(x+1) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}$

$(x+1)(mx^2-x^2+x-1) = 0$ $\quad x=-1$ ascissa del punto A

$(m-1)x^2+x-1=0$ $\quad \Delta = 1+4(m-1) = 4m-3=0$ $\quad m = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}(x+1)$ retta passante per A (ma non tangente alla curva in A) e tangente a γ in B

$x_B = \frac{-1}{2(m-1)} = +2$ $\quad y_B = \frac{9}{4}$ $\quad B \equiv \left(2, \frac{9}{4}\right)$

□ Le coordinate del punto C comune ~~alla~~ a γ ed alla tangente a γ in A si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 3(x+1) \\ y = \dfrac{x^3+1}{x^2} \end{cases} \qquad 3(x+1) = \frac{x^3+1}{x^2} \; ; \quad 3x^2(x+1) = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$(x+1)(2x^2+x-1) = 0 \qquad (x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{9}{2} \qquad C \equiv \left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right)$$

Equazione della retta BC

$$\frac{y-\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}-\frac{9}{4}} = \frac{x-2}{\frac{1}{2}-2} \qquad y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}$$

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[-\frac{3}{2}x + \frac{21}{4} - x - \frac{1}{x^2}\right]dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{21}{4} - \frac{5}{2}x - \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{21}{4}x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{21}{2} - 5 + \frac{1}{2} - \frac{21}{8} + \frac{5}{16} - 2 = \frac{27}{16}$$

Altro metodo

$$S = S(BCC_1B_1) - S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{81}{16} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{81}{16} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{81}{16} - 4 + \frac{5}{8} = \frac{81}{16} - \frac{27}{8} = \frac{81-54}{16} = \frac{27}{16}$$