LICEO SCIENTIFICO «P. S. MANCINI» - AVELLINO

QUADERNI DI SCIENZE 1

salvatore amico

elementi di calcolo vettoriale

FERRARO

Salvatore Amico

Elementi di calcolo vettoriale

e sue applicazioni in geometria analitica trigonometria e geometria euclidea

Editrice Ferraro

Napoli, Via S. Sebastiano 54
Prima edizione italiana settembre 1976

PREFAZIONE

Alla serie dei « quaderni d'arte » — iniziata nel maggio '74 con il « quaderno » dedicato a La Basilica dell'Annunziata e le Catacombe di Prata P. U. *e proseguita nel maggio '75 con quello dedicato a* L'attività di Cosimo Fanzago nella Avellino dei Caracciolo — *il Liceo Scientifico « P. S. Mancini » di Avellino intende affiancare una collana di « quaderni di scienze », che trattino problemi e aspetti delle scienze matematiche, fisiche e naturali.*

L'iniziativa vuole rispondere alla esigenza di fornire agli studenti, nel settore fondamentale delle discipline scientifiche, strumenti di lavoro elaborati attraverso l'esperienza viva della scuola e, nel contempo, favorire un'attività di ricerca metodologica e didattica che nasca dal seno stesso della comunità scolastica. È questo un terreno sul quale possono essere saggiate le capacità e le energie che sono pure implicite nel mondo agitato e inquieto della scuòla.

La collana si apre con un « quaderno » di matematica, Elementi di calcolo vettoriale e sue applicazioni in goniometria, geometria analitica e geometria euclidea, *del professore Salvatore Amico. Esso riguarda quel campo della vettorialistica che ha assunto, negli ultimi anni, un particolare sviluppo nelle scienze matematiche e fisiche ed è, quindi, in sintonia con le esigenze di modernizzazione e di sperimentazione che sono vive nella scuola di oggi.*

Maggio 1976

AURELIO BENEVENTO

INTRODUZIONE

Lo scopo di questo quaderno di matematica è quello di avvicinare i giovani allievi allo studio del calcolo vettoriale che consente una più rapida e semplice interpretazione di molteplici settori della matematica, della fisica e di altre discipline.

L'utilità della introduzione del simbolismo vettoriale è quella di ottenere una economia di pensiero, cioè di esprimere in maniera sintetica concetti che diversamente necessiterebbero di procedimenti laboriosi e complicati.

L'introduzione del calcolo vettoriale è cosa piuttosto recente e non ha più di un secolo di vita.

I primi matematici che introdussero i vettori e le loro operazioni fondamentali furono Hamilton e Grassmann ma non ebbero fortuna e per circa un cinquantennio la loro teoria cadde nell'oblio più profondo e fu quasi del tutto ignorata dai matematici del tempo.

Successivamente, verso la fine dell'ottocento, quasi esclusivamente per merito di Gibbs e dell'italiano Giuseppe Peano sorsero delle scuole di vettorialisti che diedero impulso e nuovo slancio alla teoria del calcolo vettoriale che venne applicata non solo a diverse branche della matematica (geometria euclidea, geometria analitica, trigonometria, numeri complessi) ma anche alla fisica e ad altre discipline.

La scuola italiana del Peano trattò col metodo assoluto, cioè senza l'ausilio del metodo analitico, il calcolo vettoriale riuscendo a sviluppare tutta la geometria, la teoria della relatività, la meccanica razionale, la meccanica dei fluidi, la teoria della relatività.

I vettorialisti italiani non trovarono consensi in quanto preferirono non avvalersi del vantaggioso apporto della geometria analitica sicché furono costretti ad introdurre un carico eccessivo di simboli rendendo l'esposizione del calcolo vettoriale non facilmente comprensibile e poco pratica.

Non stupisce pertanto che le due opere classiche di questa scuola — Burali-Forti-Marcolongo-Burgotti-Boggio: **Analisi vettoriale generale e sue applicazioni**; Burali-Forti-Boggio: **Espaces courbes, critique de la rélativité** — non trovarono i consensi sperati.

Altri matematici, armonizzando in un giusto equilibrio metodo assoluto e metodo analitico, riuscirono a dare a questo nuovo strumento di calcolo quella semplicità e quel rigore scientifico necessari alla sua affermazione.

Attualmente non c'è ramo della matematica, della fisica che non si serva di questo potente mezzo d'indagine.

Il calcolo vettoriale è indispensabile per uno studio serio ed approfondito della meccanica, dell'elettrologia, della relatività ed è estremamente utile per lo studio della geometria analitica, della trigonometria, della geometria euclidea, dei numeri complessi.

In verità, nella scuola secondaria il calcolo vettoriale non ha avuto l'attenzione che meritava e solo recentemente ha cominciato a trovare spazio nello studio della trigonometria e della fisica.

Questo quaderno non vuole essere una trattazione completa ed esauriente dell'argomento ma vuole soltanto fare vedere come esso può essere utile nello studio di diversi settori della matematica di offrire agli studenti ed ai colleghi lo spunto per una sua efficace e valida utilizzazione in matematica ed in fisica.

A mio avviso la conoscenza da parte degli allievi della scuola secondaria dei concetti fondamentali del calcolo vettoriale è non solo utile ma indispensabile.

Essa consente di approfondire meglio i concetti della fisica e può essere una via nuova per tentare il rinnovamento, da tante parti richiesto con insistenza, dell'insegnamento della matematica.

Ricordo ancora che, studente al primo anno del politecnico di Torino, digiuno o quasi di calcolo vettoriale, incontrai non poche difficoltà nello studio della geometria analitica trattata col metodo vettoriale ed in quello della fisica. Pertanto ritengo necessario far conoscere agli allievi della scuola media superiore ed in particolare a quelli del liceo scientifico le regole fondamentali del calcolo vettoriale, la loro interpretazione geometrica e fisica, la loro traduzione nel linguaggio cartesiano; questo primo contatto col mondo dei vettori aiuterà senz'altro tutti quei discenti che, dopo la maturità scientifica, proseguiranno gli studi nelle varie facoltà scientifiche.

1. La retta orientata.

Consideriamo la retta **r** intesa in senso euclideo.

Essa è dotata, per sua natura, di due soli possibili versi, uno dei quali viene assunto come **positivo** e l'altro, opposto, come **negativo**.

La scelta di uno dei due versi come verso positivo della retta è del tutto arbitraria e dipende unicamente dal particolare problema che si vuole trattare.

Però, una volta fatta la scelta, esso rimane invariato.

Abitualmente, quando occorre indicare il verso positivo fissato sulla retta si fa ricorso ad una freccia.

Ad es., la retta $\vec{r}$ della fig. (1.1) ha come verso positivo quello che va dal punto M al punto N.

Una retta sulla quale sia stato scelto il verso positivo di percorrenza si dice **orientata**.

È consuetudine orientare le **rette orizzontali**, fig. (1.2) da sinistra verso destra, le rette **verticali**, fig. (1.3), dal basso verso l'alto, le **semirette**, dette anche **raggi**, dall'origine verso un suo qualsiasi altro punto.

Così il raggio OA, di origine O, è orientato da destra verso sinistra, fig. (1.4).

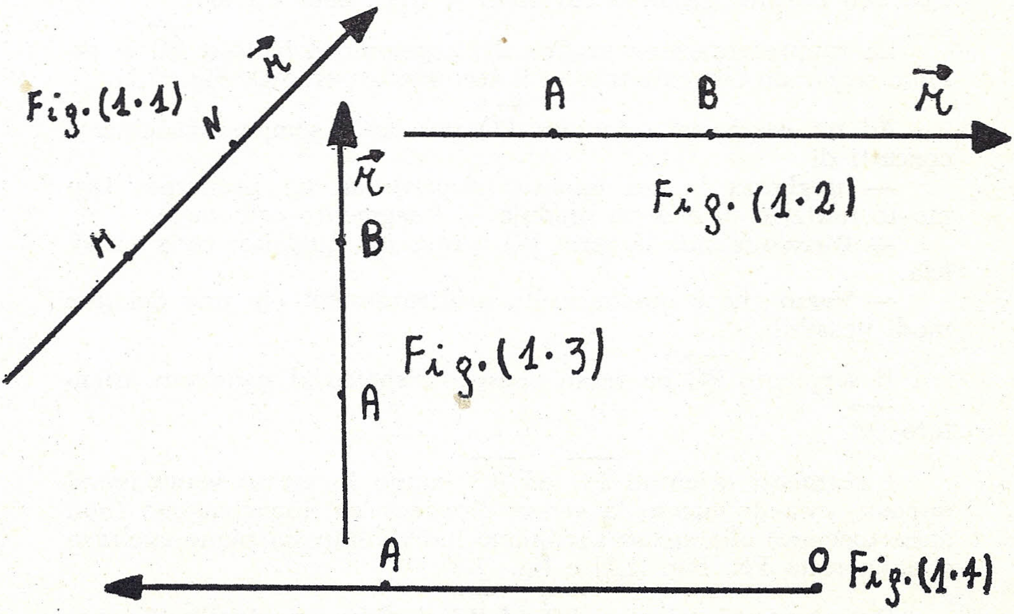


Fig. (1.1) Fig. (1.2) Fig. (1.3) Fig. (1.4)

Col simbolo $\vec{r}$ indichiamo una retta orientata quando la retta ordinaria r ne rappresenta il sostegno, cioè $\vec{r}$ rappresenta la totalità dei punti della retta ordinaria r ordinati secondo il verso positivo fissato su di essa.

Col simbolo r indichiamo la retta ordinaria sulla quale non è stato fissato alcun verso.

2. Segmenti orientati.

Dicesi **segmento orientato** un qualsiasi segmento sul quale è stato fissato un verso (o senso).

Come per le rette orientate, anche per i segmenti orientati possiamo scegliere il verso positivo in due maniere diverse.

Così il segmento orientato PQ è quel segmento che ha come verso positivo quello che va dal punto P (detto primo estremo, o estremo iniziale o origine) al punto Q (detto secondo estremo o estremo finale od anche, più semplicemente, estremo).

Esso è indicato col simbolo

$$\overrightarrow{PQ}$$

od anche con PQ se conveniamo di identificare il suo verso positivo con l'ordine secondo cui sono scritti i suoi estremi.

La rappresentazione grafica del segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ si ottiene segnando con una freccia il secondo estremo Q. Fig. (2.1).

Ad un segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ possiamo sempre associare i concetti di

— **lunghezza** la cui misura (rispetto ad un prefissato segmento unitario u) è detta **modulo** (del segmento orientato).

— **Direzione** cioè la retta PQ o una sua qualsiasi retta parallela.

— **Verso** che è quello scelto arbitrariamente in uno dei due modi possibili.

Il segmento $\overrightarrow{PQ}$ ha verso opposto rispetto al segmento orientato $\overrightarrow{QP}$.

I segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ hanno lo stesso verso (versi opposti) quando hanno la stessa direzione ed appartengono (non appartengono) allo stesso semipiano individuato sul piano euclideo π dalla retta PR. Fig. (2.2) e fig. (2.3).

Due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ si dicono **equipollenti** quando hanno: 1) la stessa direzione; 2) la stessa lunghezza; 3) lo stesso verso. Fig. (2.4).

Se P coincide con Q si ha il segmento orientato **nullo** il quale ha lunghezza nulla e direzione e verso indeterminati.

Due o più segmenti orientati nulli si considerano equipollenti.

Indicheremo con $I = \{ \overrightarrow{PQ} \}$ indifferentemente l'insieme di tutti i segmenti orientati della retta euclidea r, o del piano euclideo π, o dello spazio euclideo Ω.

N.B.

a) In generale non ha senso parlare di misura di un segmento orientato. Però se $\overrightarrow{PQ}$ appartiene alla retta orientata $\vec{r}$ allora possiamo definire misura di $\overrightarrow{PQ}$ il numero reale relativo α così definito:

1) $|\alpha| = \dfrac{PQ}{u}$

2) $\alpha > 0$ se $\overrightarrow{PQ}$ ha lo stesso verso di $\vec{r}$

3) $\alpha < 0$ se $\overrightarrow{PQ}$ ha verso opposto ad $\vec{r}$.

Pertanto la misura di un segmento orientato è un numero relativo e non un numero assoluto come avviene in geometria euclidea. Fig. (2.5).

b) La relazione di congruenza fra segmenti è una relazione di equivalenza.

Questo ci consente di ripartire l'insieme dei segmenti in classi di equivalenza ognuna delle quali ha come elementi tutti i segmenti fra loro congruenti.

Ognuna di queste classi definisce quella che noi chiamiamo lunghezza di un insieme di segmenti congruenti.

Pertanto un qualsiasi segmento PQ individua una lunghezza che si chiama anche lunghezza di quel segmento.

La lunghezza del segmento PQ dicesi anche distanza dei due punti P e Q.

Pertanto non bisogna confondere il concetto di lunghezza di un segmento con la sua misura da noi detta modulo del segmento.

Infatti la lunghezza di un segmento è una sua proprietà intrinseca che dipende esclusivamente dagli estremi che lo individuano, mentre la sua misura (modulo) dipende anche dal segmento unitario prescelto.

$$\vec{i}' = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j} \tag{27.2}$$

cioè, rispetto al riferimento xOy, le componenti di $\vec{i}'$ sono $\cos\theta$ e $\sin\theta$, mentre quelle di $\vec{j}'$ sono $-\sin\theta$ e $\cos\theta$.

Rispetto al riferimento xOy abbiamo:

$$P - O' = (x - \alpha) \cdot \vec{i} + (y - \beta) \cdot \vec{j} \tag{27.3}$$

mentre, rispetto al riferimento x′O′y′, abbiamo:

$$P - O' = x' \cdot \vec{i}' + y' \cdot \vec{j}' \tag{27.4}$$

cioè:

$$P - O' = x' \cdot (\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}) + y' (-\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j})$$

$$P - O' = (x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta) \cdot \vec{i} + (x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta)\, \vec{j}$$

Confrontando tale espressione con la (27.3) otteniamo:

$$\begin{cases} x - \alpha = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y - \beta = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x = \alpha + x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y = \beta + x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{27.5}$$

Se è $\theta = O$ **(traslazione degli assi)** la (27.5) diventa:

$$\begin{cases} x = \alpha + x' \\ y = \beta + y' \end{cases} \tag{27.6}$$

Se $O' = O$ **(rotazione degli assi)** la (27.5) diventa:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{27.7}$$

Le formule inverse si ricavano risolvendo le (27.5) o le (27.6) o le (27.7) rispetto ad x′ ed y′.

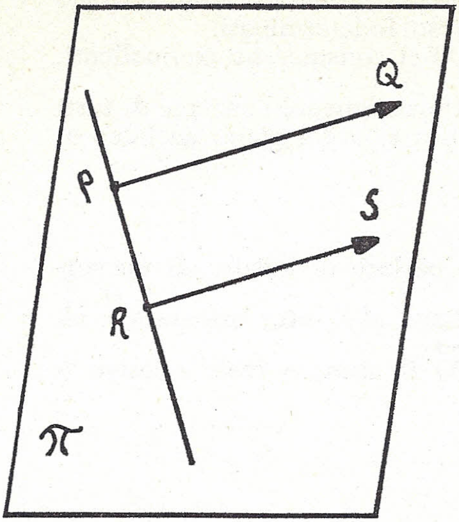


Fig.(2.2)

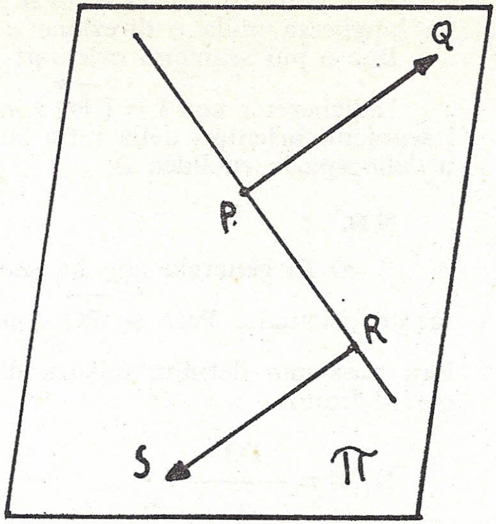


Fig.(2.3)

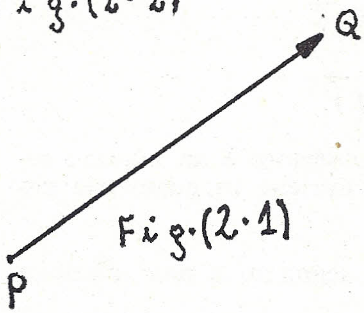


Fig.(2.1)

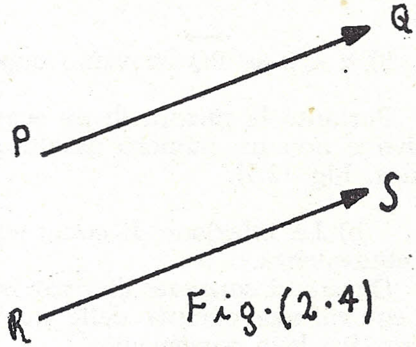


Fig.(2.4)

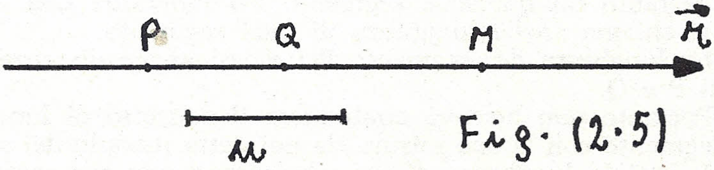


Fig. (2.5)

3. La nozione di vettore.

La relazione di **equipollenza** fra segmenti orientati è una relazione di **equivalenza** (indicata col simbolo $\sim$) in quanto per essa valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Infatti:

1) $\forall\ \overrightarrow{PQ} \in I \qquad \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}$ (proprietà riflessiva)

2) $\forall\ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \in I, \qquad \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{PQ}$
(proprietà simmetrica)

3) $\forall\ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{TU} \in I, \qquad (\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{TU}) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{TU}$
(proprietà transitiva)

come si potrebbe facilmente dimostrare.

Pertanto possiamo ripartire l'insieme I dei segmenti orientati in classi di equivalenza ciascuna delle quali contiene come elementi tutti i segmenti orientati fra loro equipollenti. Ciascuna di queste classi è individuata da uno qualsiasi dei suoi elementi. Se è:

$$I = \{ \overrightarrow{PQ}, \dots, \overrightarrow{RS}, \dots, \overrightarrow{TU}, \dots \}$$

$$\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'} \sim \overrightarrow{P''Q''} \sim \dots\dots$$

$$\overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{R'S'} \sim \overrightarrow{R''S''} \sim \dots\dots$$

$$\overrightarrow{TU} \sim \overrightarrow{T'U'} \sim \overrightarrow{T''U''} \sim \dots\dots$$

le classi di equivalenza sono:

$$[\overrightarrow{PQ}] = [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{P''Q''}, \dots\dots]$$

$$[\overrightarrow{RS}] = [\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{R'S'}, \overrightarrow{R''S''}, \dots\dots]$$

$$[\overrightarrow{TU}] = [\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{T'U'}, \overrightarrow{T''U''}, \dots\dots]$$

e determinano l'insieme quoziente $I/\sim$ cioè l'insieme delle classi di equivalenza dell'insieme I rispetto alla relazione di equipollenza $\sim$, cioè:

$$I/\sim \; = \{[\overrightarrow{PQ}], \ldots, [\overrightarrow{RS}], \ldots, [\overrightarrow{TU}], \ldots\}$$

Ciascuna di queste classi di equivalenza definisce un nuovo ente matematico a cui diamo il nome di **vettore libero ordinario**, o vettore libero, o più semplicemente vettore, cioè uno qualsiasi degli infiniti segmenti orientati appartenenti ad una data classe di equivalenza rappresenta un vettore.

Il vettore così definito si può indicare ancora con $\overrightarrow{PQ}$, oppure, secondo Hamilton, con $Q - P$ (si legga Q meno P), cioè come differenza fra due punti, oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto latino soprasegnata con una freccia ($\vec{a}$, $\vec{b}$,...) oppure con una lettera in carattere grassetto (**a**, **b**,...). Da quanto sopraddetto si può scrivere:

$$\vec{a} = Q - P \tag{3.1}$$

P si dice origine del vettore, Q estremo.

Al pari di un segmento orientato, un qualsiasi vettore $\vec{a}$ è caratterizzato da una direzione, da un verso o da una lunghezza la cui misura è detto **modulo** ed indicato con uno dei seguenti simboli:

$$|\vec{a}|; \quad a; \quad |Q - P| \quad |\overrightarrow{PQ}|, \quad \text{mod } \vec{a} \tag{3.2}$$

Indicheremo col simbolo J l'insieme di tutti i vettori (della retta euclidea, o del piano euclideo o dello spazio euclideo), cioè:

$$J = \{\vec{a}\} = \{\overrightarrow{PQ}\} \tag{3.3}$$

Ogni vettore di modulo unitario si dice **versore** o vettore unitario, per cui ogni versore definisce una direzione orientata e viceversa.

Di solito per indicare dei versori ci serviremo dei seguenti simboli:

$$\vec{i}, \qquad \vec{j}, \qquad \vec{k}, \qquad \vec{e}, \qquad \vec{u}.$$

Il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{a}$ si dice versore di $\vec{a}$ e si designa spesso col simbolo vers $\vec{a}$.

Se $P = Q$ il vettore (3.1) si dice **vettore** nullo. Esso ha modulo nullo e verso e direzione indeterminati e viene indicato col simbolo $\vec{o}$.

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si dicono **uguali** e si scrive

$$\vec{a} = \vec{b} \tag{3.4}$$

quando sono atti a rappresentare una stessa classe di segmenti orientati equipollenti, cioè quando hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso.

Si dice che due vettori sono **paralleli** quando si possono rappresentare, geometricamente, con segmenti orientati di una stessa retta o di rette parallele.

Tre vettori si dicono **complanari** se per essi è possibile una rappresentazione con segmenti orientati di uno stesso piano.

Due vettori si dicono **opposti** se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti.

L'opposto del vettore $\vec{a}$ è indicato col simbolo $-\vec{a}$.

Un vettore è ancora rappresentato da un segmento orientato il quale dà del vettore una rappresentazione grafica o un modello.

Due segmenti orientati equipollenti rappresentano lo stesso vettore ma danno di esso due modelli diversi.

A conclusione possiamo dire che gli elementi di un vettore sono:

1) l'**origine** P e l'**estremo** Q

2) la **direzione** cioè la retta $\overrightarrow{PQ}$ (la quale dicesi anche il sostegno o la retta d'azione del vettore $\overrightarrow{PQ}$) o una sua qualsiasi parallela

3) il **verso** che è quello di un punto che percorre il vettore dall'origine all'estremo

4) il **modulo** che è un numero aritmetico che esprime la misura del segmento PQ rispetto ad una prefissata unità di misura.

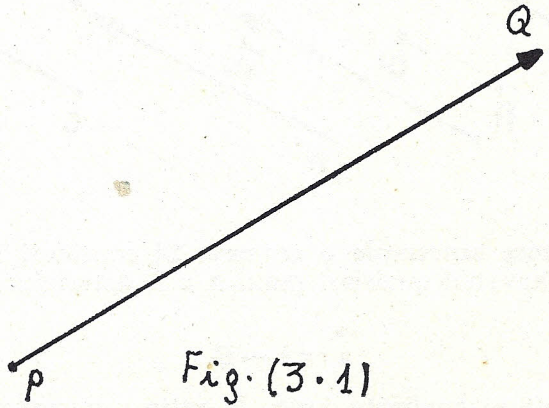


Fig. (3.1)

4. Grandezze scalari e grandezze vettoriali.

Tutte le grandezze che studiamo in fisica, in matematica o in altre discipline possono essere suddivise in due gruppi, le **grandezze scalari** e le **grandezze vettoriali.**

Definiamo **scalare** una grandezza completamente individuata da un numero (positivo o negativo) che ne esprime la misura rispetto ad un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura (**scala**).

Sono esempi di grandezze scalari le temperature, le masse dei corpi, le aree della superficie, il lavoro eseguito da una forza, ecc.

Definiamo **vettoriale** una grandezza completamente individuata da un numero positivo (modulo), da una direzione o da un verso.

Il nome vettoriale attribuito ad una generica grandezza di questo secondo gruppo scaturisce dal fatto che ciascuna di esse può essere rappresentata da un vettore.

Sono grandezze vettoriali gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni, le forze, l'intensità del campo elettrico, l'induzione magnetica, ecc...

5. Vettore libero, scorrevole, applicato.

a) **Vettore libero** è quelo vettore che ha direzione e verso determinati ma sostegno ed origine arbitrari.

Esso è rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ o da un qualsiasi altro segmento orientato ad esso equipollente.

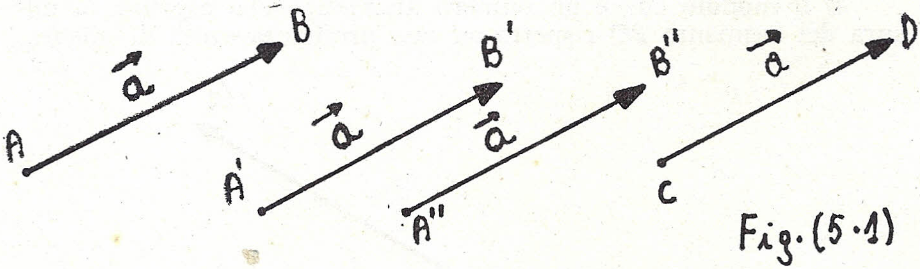


Fig. (5·1)

b) **Vettore scorrevole o cursore.** Si consideri la retta non orientata r. Due suoi qualsiasi punti A e B determinano il vettore

$$\vec{a} = A - B.$$

Dicesi **vettore applicato** lungo la **retta** r o **cursore** o **vettore**

scorrevole uno degli infiniti vettori equipollenti ad $\vec{a}$ ed appartenenti alla retta r. Fig. (5.2).

Con la notazione $(r, \vec{a})$ designeremo un **cursore** avente come sostegno la retta r, e come modulo e verso quello di $\vec{a}$.

Pertanto il cursore è quel vettore che ha definiti il sostegno, il modulo, il verso ma non l'origine.

c) **Vettore applicato.** Se fissiamo un punto P nello spazio, esiste un solo vettore, indicato col simbolo $(P, \vec{a})$, equipollente ad $\vec{a}$ ed avente come origine il punto P. Il vettore $(P, \vec{a})$ è detto **vettore applicato**, P è il **punto di applicazione**.

Pertanto vettore applicato è quel vettore di cui si conosce il sostegno, il verso, il modulo ed il punto di applicazione. Fig. (5.3)

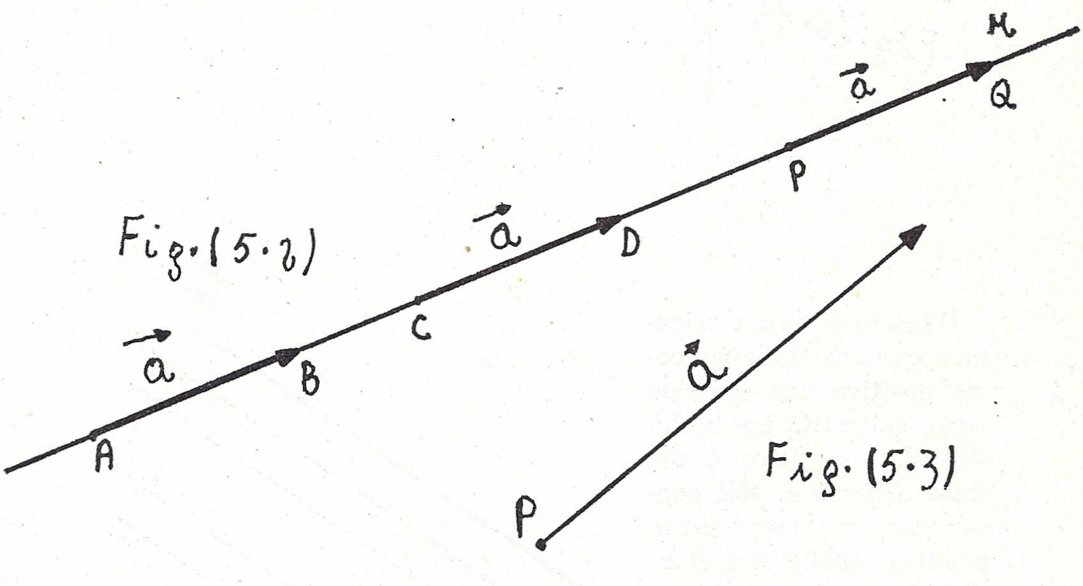


Fig. (5.2)

Fig. (5.3)

6. Fascio orientato di rette.

Dicesi **fascio di rette** di centro P l'insieme di tutte le rette del piano che passano per P. Fig. (6.1).

Se il punto P è improprio, cioè non situato al finito, allora tutte le rette del fascio risultano parallele e viceversa, fig. (6.2).

Nel primo caso si parla di **fascio proprio di rette**, nel secondo caso **fascio improprio di rette.**

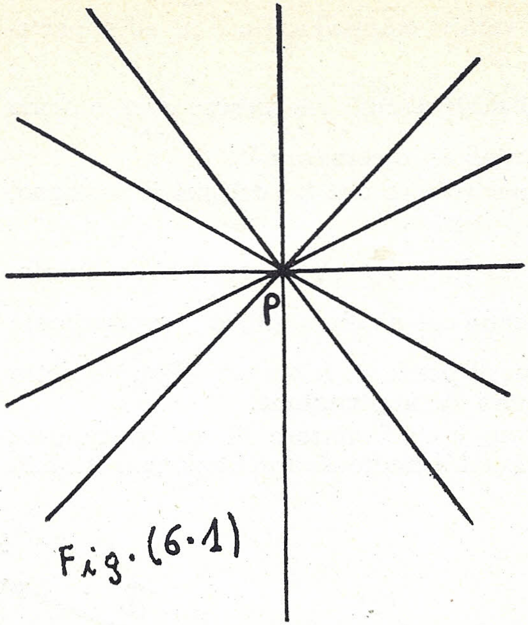


Fig. (6·1)

Più precisamente si parla di **fascio di rette orientate** o fascio di raggi o di semirette quando tutte le rette del fascio sono orientate. Ciò premesso, si intuisce facilmente che un qualsiasi fascio di rette può essere immaginato descritto da una qualsiasi retta orientata del fascio che ruota (o in senso orario o in senso antiorario) attorno al centro P.

Il fascio di rette è orientato quando fissiamo come positivo uno dei due versi suddetti. La scelta del verso positivo è del tutto arbitraria. Noi converremo di considerare **positive** quelle rotazioni che si compiono nel verso opposto a quello delle lancette di un orologio (**verso antiorario**) e **negative** le rotazioni che si compiono nello stesso verso delle lancette di un orologio (**verso orario**).

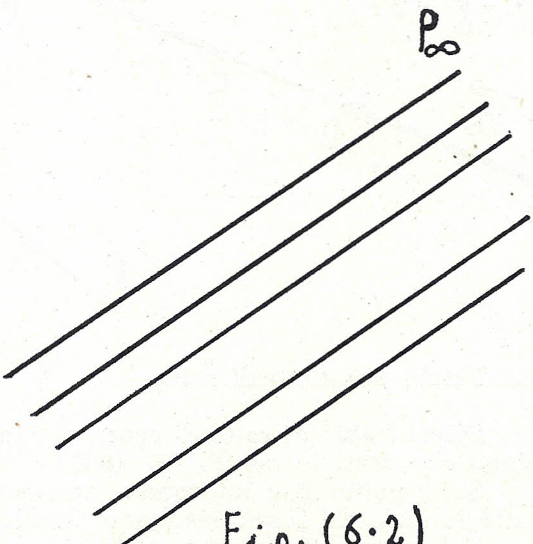


Fig. (6·2)

7. Misura degli angoli orientati.

Siano dati due raggi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di un fascio orientato di rette di centro O. Essi individuano due angoli (uno convesso ed uno concavo) i quali, in geometria euclidea, sono indicati indifferentemente col simbolo $\widehat{ab}$ o col simbolo $\widehat{ba}$.

Noi invece faremo alcune precisazioni.

Quando rappresentiamo uno dei due angoli con la scrittura $\widehat{ab}$ vogliamo dire che $\vec{a}$ è il primo lato e $\vec{b}$ è il secondo lato (o lato terminale o termine dell'angolo).

Con la scrittura $\widehat{ba}$ intendiamo invece che $\vec{b}$ è il primo lato (o lato iniziale) ed $\vec{a}$ il secondo lato dell'angolo.

Immagineremo un qualsiasi angolo orientato descritto dalla rotazione del primo lato fino alla sua sovrapposizione sul secondo lato. Alla misura α dell'angolo orientato individuato dai raggi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ assegneremo il segno + se il primo lato per sovrapporsi al secondo compie una rotazione antioraria. Fig. (7.1); assegneremo il segno — se il primo lato compie una rotazione oraria. Fig. (7.2).

Ma noi sappiamo dalla geometria euclidea che due rette con-

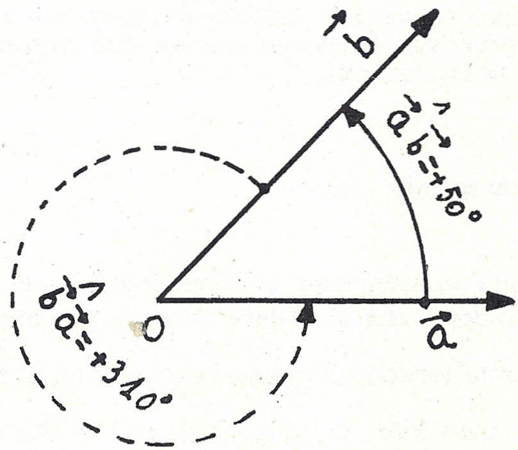


Fig. (7.1)

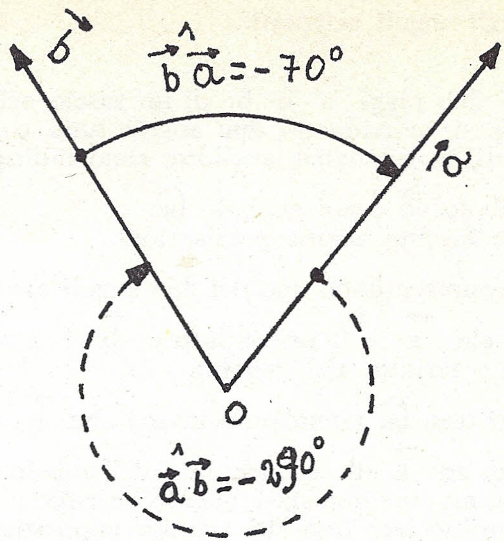


Fig. (7.2)

correnti formano quattro angoli a due a due uguali di cui uno è convesso (cioè minore di un angolo piatto) e l'altro concavo.

Pertanto sorge il problema di stabilire se con α dobbiamo indicare la misura (algebrica) dell'angolo convesso o di quello concavo. A tale proposito possiamo seguire due convenzioni, fra loro sostanzialmente equivalenti.

Prima convenzione

Con questa convenzione con $\widehat{ab}$ indichiamo l'angolo (compreso tra 0° e 360°) che si ottiene facendo ruotare positivamente (cioè in senso antiorario) il primo lato $\vec{a}$ fino a portarlo a coincidere col secondo lato $\vec{b}$. Fig. (7.3) e (7.4). Pertanto la misura di un angolo proprio è sempre positiva. Inoltre risulta sempre:

$$\widehat{ab} + \widehat{ba} = 360° \tag{7.1}$$

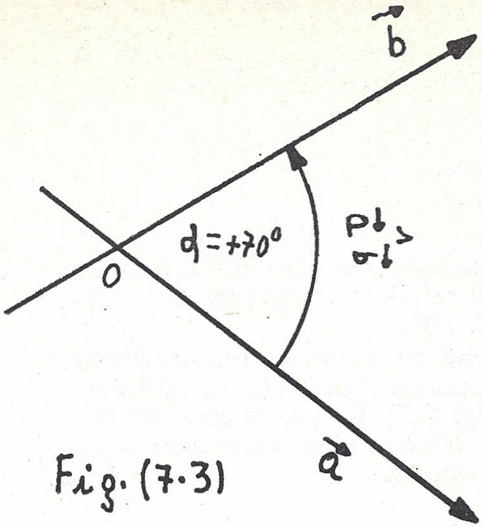


Fig.(7.3)

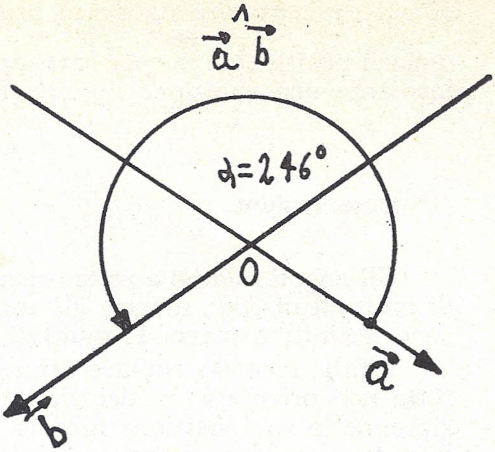


Fig.(7.4)

Seconda convenzione

Con questa seconda convenzione stabiliamo di convenire che α è la misura algebrica dell'angolo convesso formato dai due raggi $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cioè con $\widehat{ab}$ intendiamo indicare l'angolo convesso

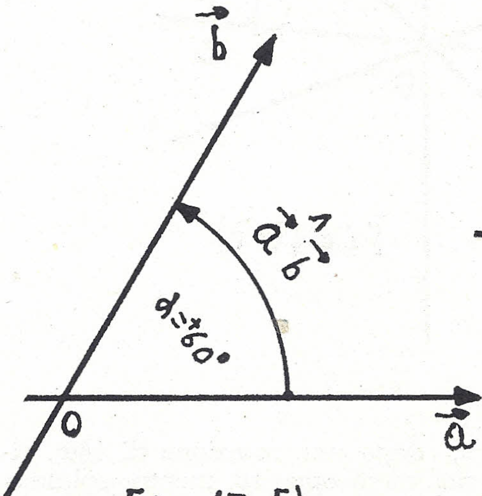


Fig.(7.5)

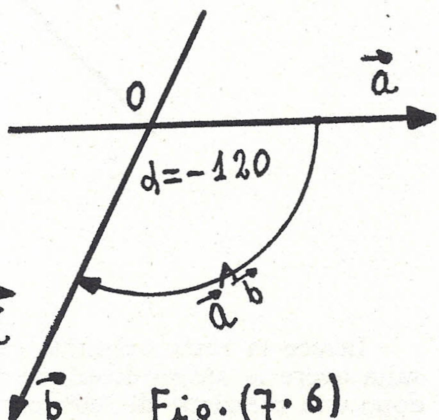


Fig.(7.6)

di cui deve ruotare (in senso orario o in senso antiorario) la direzione positiva di $\vec{a}$ per sovrapporsi alla direzione positiva di $\vec{b}$ mediante una rotazione minore di 180°. Fig. (7.5) e (7.6).

Osservazione

Gli angoli relativi a rette orientate sono sempre definiti a meno di multipli di 360°, mentre gli angoli relativi a rette non orientate sono definiti a meno di multipli di 180°.

Infatti facendo ruotare attorno ad un punto O, una qualsiasi retta non orientata r del piano, dopo una rotazione di 180° essa riprende la sua posizione iniziale. Fig. (7.7). La stessa cosa si verifica dopo un'altra rotazione di 180° (cioè complessivamente dopo una rotazione di 360°) e così via di seguito.

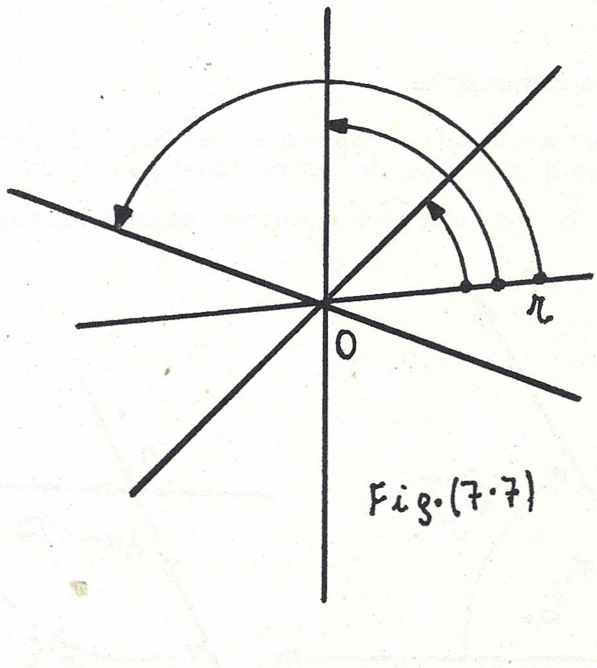


Fig.(7·7)

Invece la retta orientata $\vec{s}$, dopo una rotazione di 180°, risulta avere la stessa direzione ma verso opposto, mentre soltanto dopo una rotazione di 360° torna ad avere la stessa direzione e lo stesso verso. Fig. (7.8).

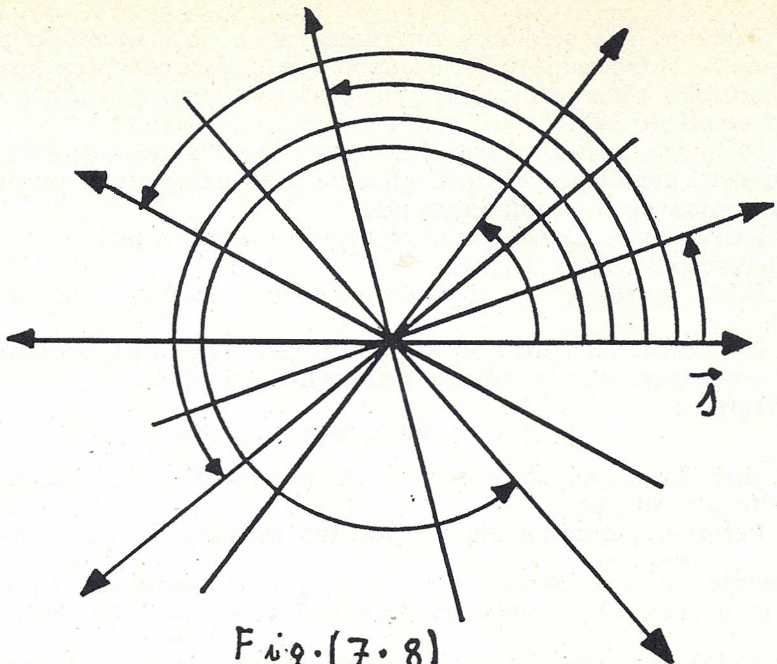


Fig.(7.8)

8. Estensione del concetto di angolo: angoli propri - angoli impropri - minimo angolo positivo.

Consideriamo l'angolo $\widehat{ab}$, fig. (8.1), e supponiamo che $\vec{a}$ (primo lato) abbia descritto l'angolo (la cui misura è α) necessario per sovrapporsi al raggio $\vec{b}$ (secondo lato).

È evidente che $\vec{a}$ può ancora ruotare (in senso orario o antiorario) fino a sovrapporsi una seconda, una terza, ... volta al raggio $\vec{b}$. In base a tali considerazioni l'angolo $\widehat{ab}$ può essere rappresentato dal numero algebrico α o da uno qualsiasi dei seguenti numeri algebrici:

$$\alpha \pm 1.360°; \qquad \alpha \pm 2.360°; \qquad \alpha \pm 3.360°; \; ....$$

cioè in generale l'angolo $\widehat{ab}$ è rappresentato dal seguente numero algebrico:

$$\vartheta = \alpha + k360° \quad \text{con} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{8.1}$$

Pertanto due semirette orientate $\vec{a}$ e $\vec{b}$, aventi la stessa origine 0, individuano infiniti angoli che differiscono fra loro per un multiplo intero di angoli giri, cioè essi sono definiti a meno di multipli di 360°.

Di questi infiniti angoli due sono minori di un angolo giro e sono detti **angoli propri**, tutti gli altri sono maggiori di un angolo giro e sono detti **angoli impropri**.

La misura α di un qualsiasi angolo orientato può essere resa a piacere positiva o negativa.

Basta aggiungere o togliere ad α un opportuno multiplo di 360°.

È evidente che tutto questo non dipende dalla particolare convenzione usata per la misura dell'angolo orientato.

Infatti:

$$+30^\circ = +30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$$

cioè dire che un angolo misura $+30^\circ$ è come dire che esso misura -330° e viceversa.

Definiamo **minimo angolo positivo** formato da due semirette orientate $\vec{a}$ e $\vec{b}$ aventi la stessa origine 0 l'angolo φ (compreso tra 0° e 360°) di cui deve ruotare (nel verso positivo delle rotazioni, cioè in verso antiorario) il primo lato $\vec{a}$ per sovrapporsi al secondo lato $\vec{b}$.

È appena il caso di ricordare che φ non dipende dalla particolare convenzione usata per la misura degli angoli orientati.

L'operazione che permette di calcolare φ (minimo angolo positivo di due raggi) è detta di **riduzione al primo giro**.

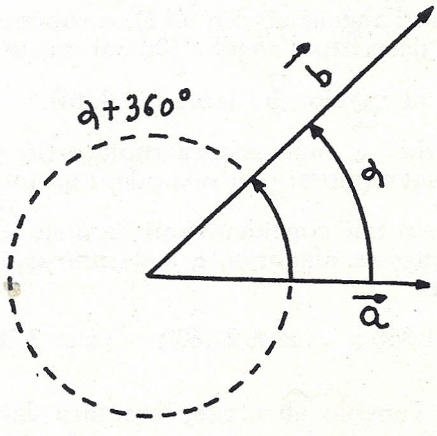


Fig. (8·1)

9. Archi orientati di una circonferenza.

Siano A e P due punti qualsiasi di una circonferenza di centro O e raggio r.

Essi individuano sulla circonferenza due archi (propri) **p** e **q** delimitati dagli stessi punti.

Conveniamo di chiamare uno dei due punti (ad es. A) **origine dell'arco** AP e l'altro **estremo** dell'arco AP.

Per definizione attribuiremo all'arco AP il segno dell'angolo orientato $\widehat{AOP}$, cioè il segno dell'angolo al centro corrispondente.

La misura in radianti di un arco orientato è definita a meno di multipli di 2π cioè:

$$AP = \lambda^R + 2k\pi \tag{9.1}$$

Due di questi infiniti archi (di solito uno minore e l'altro maggiore di una semicirconferenza) sono detti **archi propri**; tutti gli altri sono detti **archi impropri**.

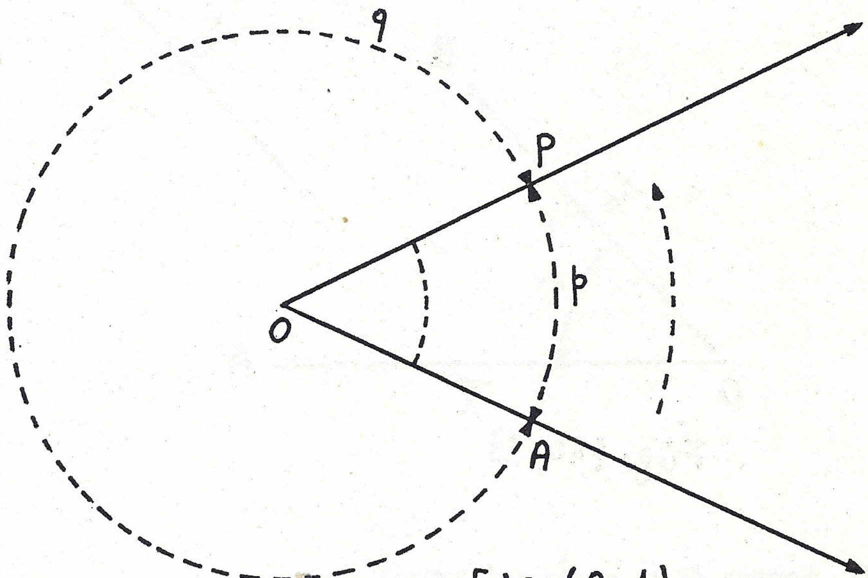


Fig. (9.1)

10. Angolo di due vettori complanari.

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due qualsiasi vettori liberi appartenenti ad un piano π.

Per un punto O qualsiasi del piano π tracciamo due vettori equipollenti rispettivamente ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e precisamente:

$$A - O = \vec{a} \qquad B - O = \vec{b}$$

L'angolo convesso $\widehat{AOB} = \alpha$ così ottenuto è l'angolo che formano i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\mathrm{ang}(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} \qquad (\vec{a}, \vec{b})$$

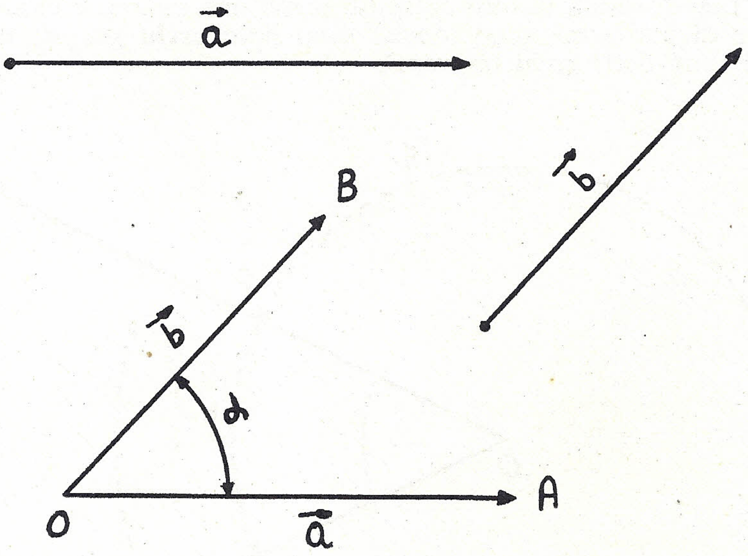


Fig. (10.1)

11. Somma di un punto e di un vettore.

Si definisce **somma** del punto A e del vettore $\vec{v}$, e si indica col simbolo $A + \vec{v}$, il punto B tale che sia:

$$B - A = \vec{v}$$

cioè le due uguaglianze:

$$B = A + \vec{v} \qquad (11.1)$$

e

$$B - A = \vec{v} \qquad (11.2)$$

esprimono, come nell'algebra ordinaria e con le stesse leggi per i segni, una medesima relazione.

La (11.1) associa il concetto fisico di traslazione alla nozione di vettore.

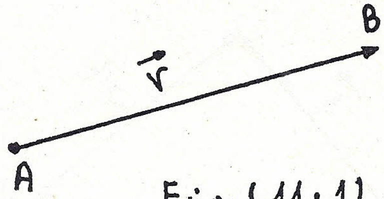


Fig. (11.1)

B risulta infatti il punto a cui si perviene sottoponendo A alla traslazione rappresentata dal vettore $\vec{v}$, cioè il vettore $\vec{v}$ applicato al punto A lo sposta nel punto B.

Da questa circostanza scaturisce il nome di **vettore** (dal latino *vehere* = trasportare).

12. Addizione vettoriale.

a) Somma di vettori consecutivi

Consideriamo due vettori consecutivi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e sia:

$$\vec{a} = B - A \qquad \vec{b} = C - B$$

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (B - A) + (C - B) = C - A \qquad (12.1)$$

cioè: la somma di due vettori consecutivi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il vettore $\vec{s}$ che ha come origine, l'origine del primo vettore e come estremo l'estremo del secondo vettore.

N.B.

$$(B - A) + (C - B) = C - A \quad \text{mentre} \quad \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

Consideriamo n(5) vettori complanari a due a due consecutivi. La loro somma è il vettore $\vec{s}$ così ottenuto:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_1 + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_2 + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_3 + \vec{e} = F - A \tag{12.2}$$

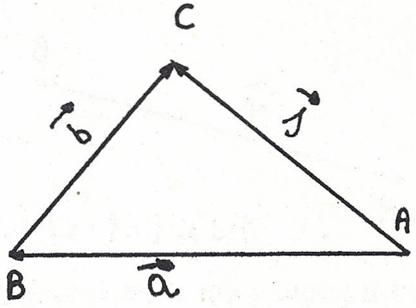


Fig. (12 · 1)

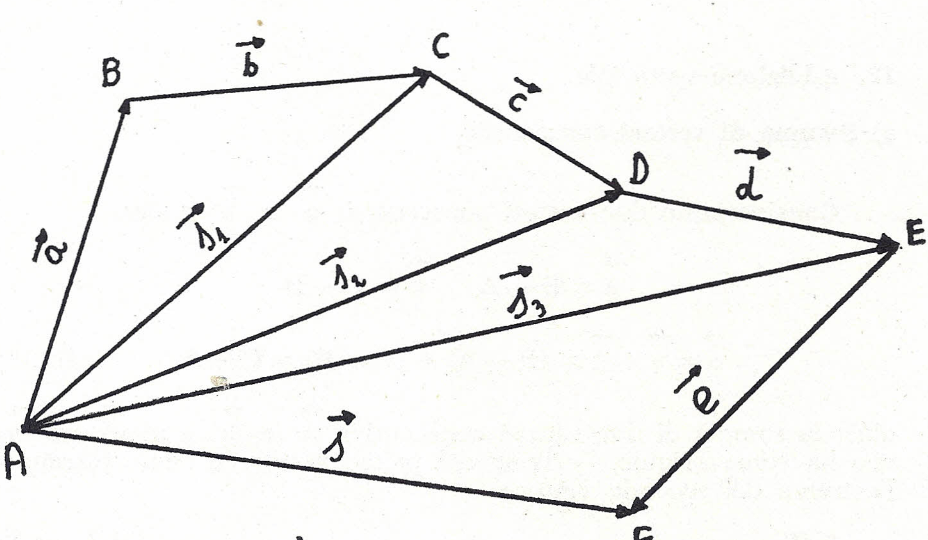


Fig. (12 · 2)

Diversamente:

$$\vec{s} = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + (F - E) = F - A$$

cioè:

« La somma di più vettori complanari, a due a due consecutivi, è il vettore $\vec{s}$ avente come origine, l'origine del primo vettore e come estremo, l'estremo dell'ultimo vettore ».

b) **Somma di due vettori aventi la stessa origine.**

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori aventi la stessa origine A.

La loro somma $\vec{s}$ è data da:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (B - A) + (D - A) = (B - A) + (C - B) = C - A$$

AC è la diagonale (avente un estremo coincidente con l'origine A dei due vettori) del parallelogramma avente per lati consecutivi i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Si esprime questa circostanza affermando che, in questo caso, i due vettori si sommano applicando la regola del parallelogramma. Il vettore $\vec{s}$ è detto anche **vettore risultante**.

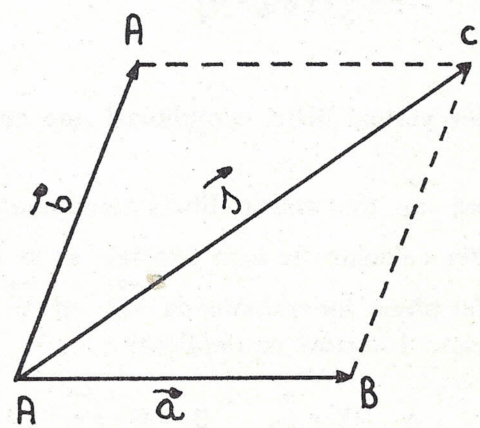


Fig.(12·3)

c) **Somma di più vettori aventi la stessa origine.**

Si possono sommare i vettori a due a due fino ad ottenere il vettore somma $\vec{s}$, oppure da B si traccia il vettore equipollente ad $\vec{a}_1$, da D il vettore equipollente ad $\vec{a}_3$.

$E - O = \vec{s}$ è il vettore somma. Infatti:

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (D - O) + \vec{a}_3 = E - O$$

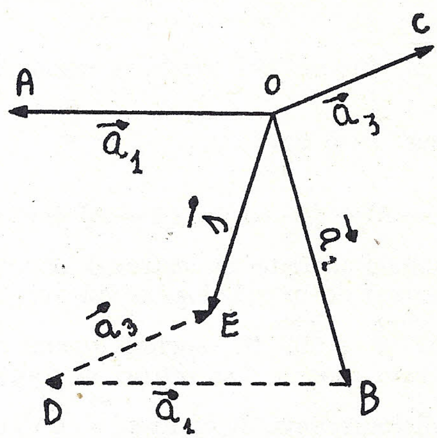


Fig.(12·4)

d) **Somma di due vettori liberi complanari non consecutivi.**

Siano $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$ due vettori liberi complanari non aventi la stessa origine. Per calcolare la loro somma $\vec{s}$ si sceglie un qualsiasi punto O del piano individuato da $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$.

Si costruiscono i vettori equipollenti

$$A - O = \vec{a}_2, \qquad B - O = \vec{a}_1$$

$\vec{s}$ si ottiene applicando la regola del parallelogramma.

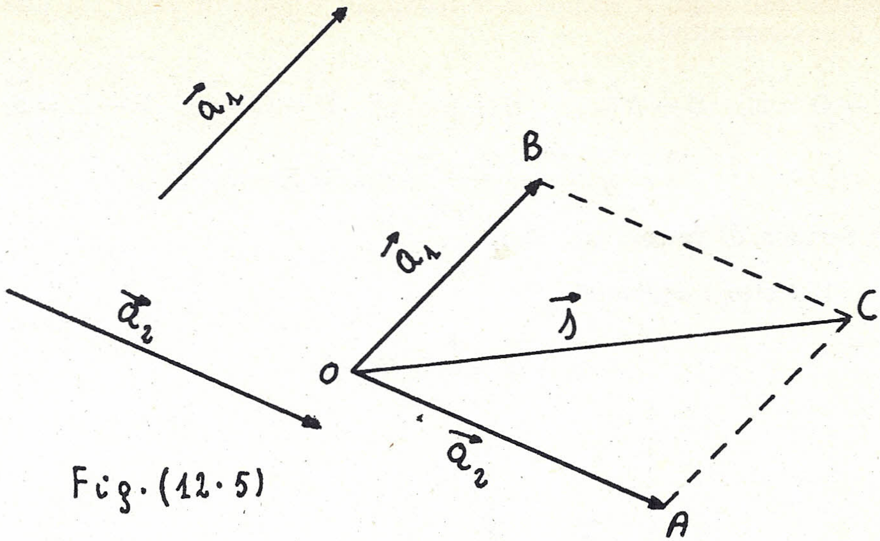


Fig. (12.5)

e) **Somma di più vettori liberi non consecutivi.**

Si definisce **somma** di n (5) vettori liberi complanari il vettore $\vec{s}$ così costruito:

si sceglie arbitrariamente il punto O appartenente al piano

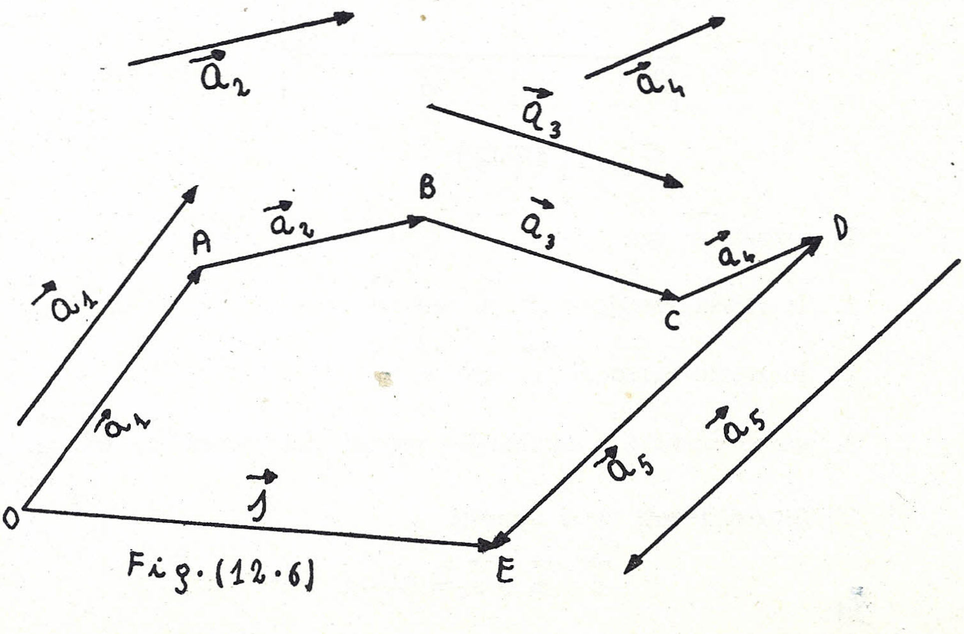


Fig. (12.6)

individuato dagli n vettori e si tracciano i seguenti vettori a due a due consecutivi:

$$A - O = \vec{a}_1; \quad B - A = \vec{a}_2; \quad C - B = \vec{a}_3; \quad D - C = \vec{a}_4; \quad E - D = \vec{a}_5$$

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = E - O$$

f) **Somma di vettori paralleli.**

1) **Vettori equiversi**

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = C - A$$

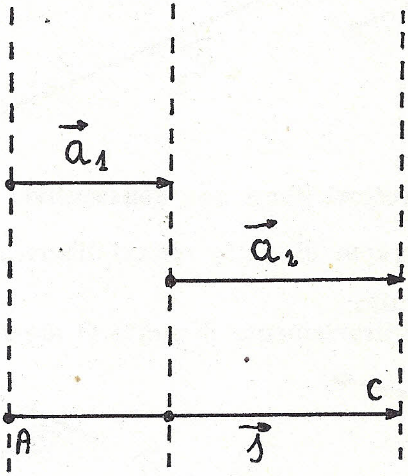


Fig.(12.7)

Il vettore $\vec{s}$ ha:

1. la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$
2. lo stesso verso di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$
3. come modulo la somma dei moduli dei vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$.

2) **Vettori aventi versi opposti**

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = B - A$$

Il vettore $\vec{s}$ ha:

— la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$
— modulo uguale alla differenza tra il modulo maggiore ed il modulo minore
— verso del vettore che ha modulo maggiore.

3) **Vettori opposti**

La somma di due vettori opposti (vettori cioè aventi la stessa direzione; lo stesso modulo e versi opposti) è il vettore nullo, cioè:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{0}$$

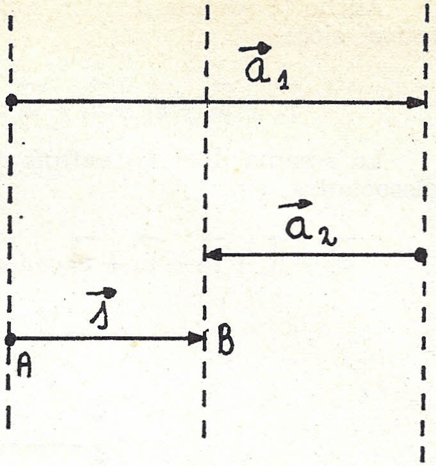


Fig.(12.8)

L'opposto del vettore $\vec{a}$ si indica comunemente col simbolo

$$-\vec{a}$$

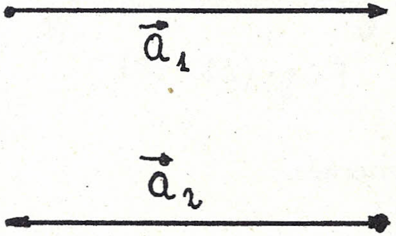


Fig.(12.9)

g) **Proprietà formali della somma di due o più vettori.**

La somma di due vettori gode della **proprietà commutativa,** cioè:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Infatti:

$$\vec{s} = (A - O) + (D - A) = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{s} = (B - O) + (D - B) = \vec{b} + \vec{a}$$

Anche la somma di n (5) vettori gode della proprietà commutativa, cioè:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = \vec{a}_4 + \vec{a}_2 + \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_5$$

La somma di n (5) vettori gode delle proprietà **associativa** e **dissociativa**, cioè:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 \Leftrightarrow (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3 + (\vec{a}_4 + \vec{a}_5) =$$

$$= \vec{s}_1 + \vec{a}_3 + \vec{s}_2$$

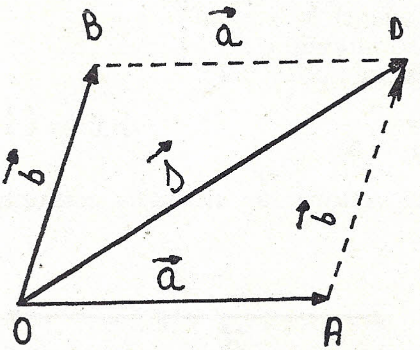


Fig. (12·10)

13. Sottrazione vettoriale.

Si chiama **differenza** fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo

$$\vec{a} - \vec{b}$$

il vettore $\vec{d}$ che si ottiene addizionando ad $\vec{a}$ l'opposto di $\vec{b}$, cioè:

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$$

$\vec{d}$ è un vettore che ha come **origine** l'estremo di $\vec{b}$ e come **estremo** l'estremo di $\vec{a}$.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (A - O) + (D - O) = C - O = A - B$$

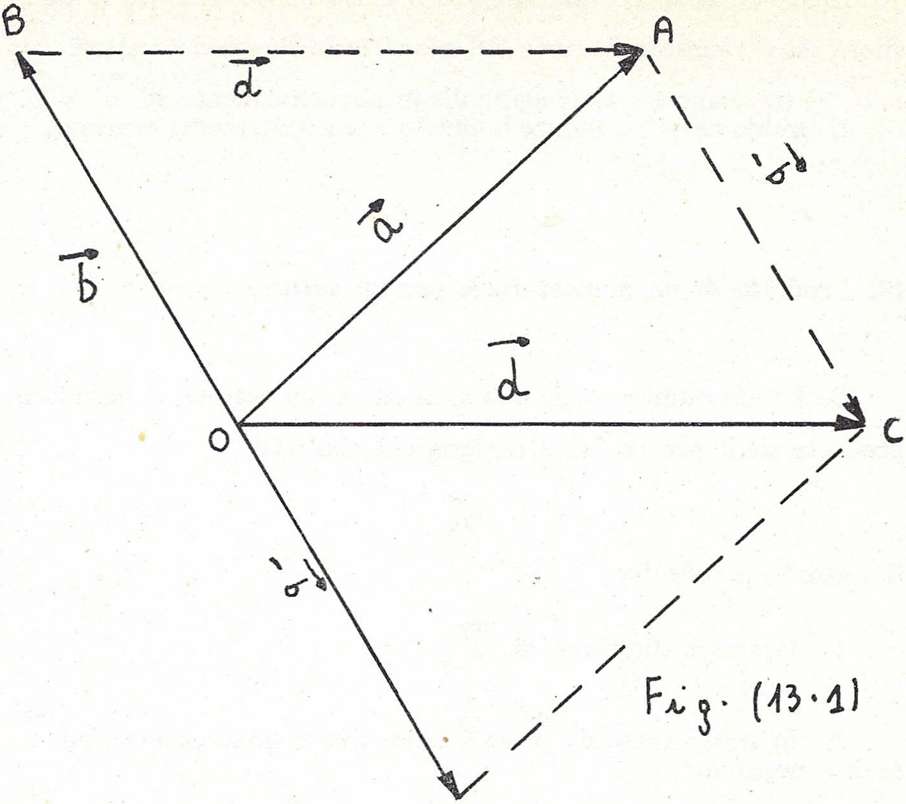


Fig. (13·1)

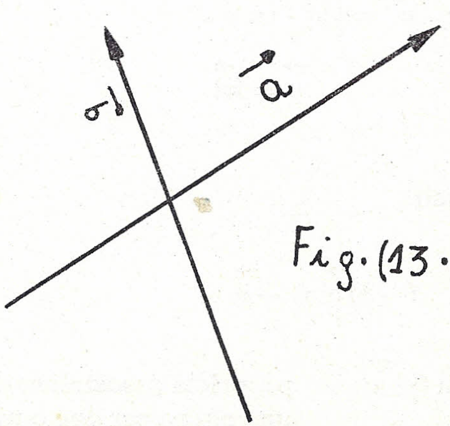


Fig. (13·1)

N.B. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non hanno lo stesso punto di applicazione, allora da O, punto arbitrario del piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si tracciano i vettori equipollenti rispettivamente ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il problema si riconduce a quello precedentemente trattato.

14. Prodotto di un numero reale per un vettore.

Se k è un numero reale qualsiasi ed $\vec{a}$ un vettore, si definisce **prodotto** di k per $\vec{a}$ e si designa col simbolo

$$k\vec{a}$$

il vettore $\vec{p}$ che ha:

1. la stessa direzione di $\vec{a}$

2. lo stesso verso di $\vec{a}$ se k è positivo e verso opposto ad $\vec{a}$ se k è negativo

3. come modulo il prodotto del modulo di $\vec{a}$ per il valore assoluto di k, cioè: $|\vec{p}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

$$\vec{p} = k\vec{a} \tag{14.1}$$

Proprietà formali:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\quad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

2. $k(m)\vec{a} = m(k)\vec{a}$: proprietà **associativa** del prodotto di un vettore per due o più numeri reali

3. $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$: proprietà **distributiva** rispetto alla somma di numeri reali

4. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$: proprietà **distributiva** rispetto alla somma di vettori.

15. Rapporto di due vettori paralleli.

Dati il numero reale k ed il vettore $\vec{a}$, abbiamo definito il vettore $\vec{p} = k\vec{a}$.

Viceversa dati due vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ possiamo definire il numero reale k come rapporto dei vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$, cioè:

$$k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}} \tag{15.1}$$

Risulta così giustificata la seguente definizione:

« Il rapporto di due vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ è il numero reale k avente per modulo il rapporto dei moduli di $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ e per segno + o — secondo che $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ sono equiversi od opposti ».

Pertanto possiamo scrivere:

$$\vec{p} = k\vec{a} \Leftrightarrow k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}} \tag{15.2}$$

16. Il componente di un vettore secondo una retta.

Sia $\vec{a}$ un vettore libero non nullo di cui $\overrightarrow{AB}$ sia un segmento orientato rappresentativo ed r una qualsiasi retta complanare con

$\vec{a}$. Siano A′ e B′ rispettivamente le proiezioni ortogonali di A e B sulla retta r. Il vettore

$$B' - A' = \vec{a}_r$$

chiamasi **il componente** di $\vec{a}$ secondo la retta r.

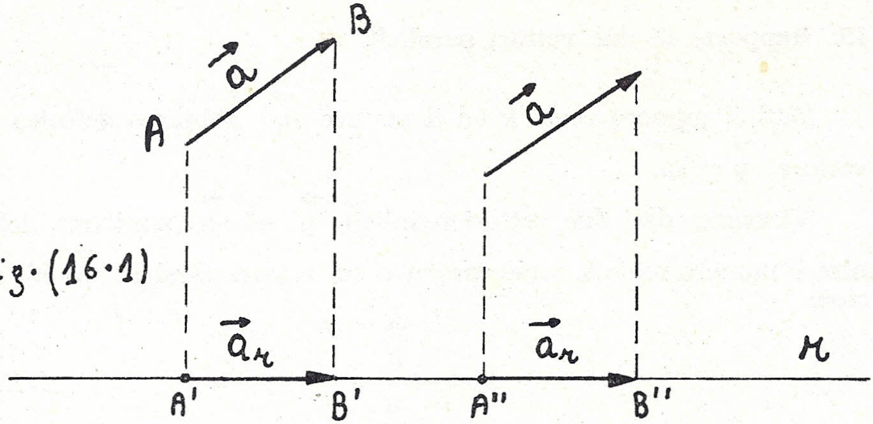


Fig. (16·1)

Il componente del cursore $(s, \vec{a})$ secondo la retta r è il vettore

$$\vec{a}_r = B' - A' = B'' - A''$$

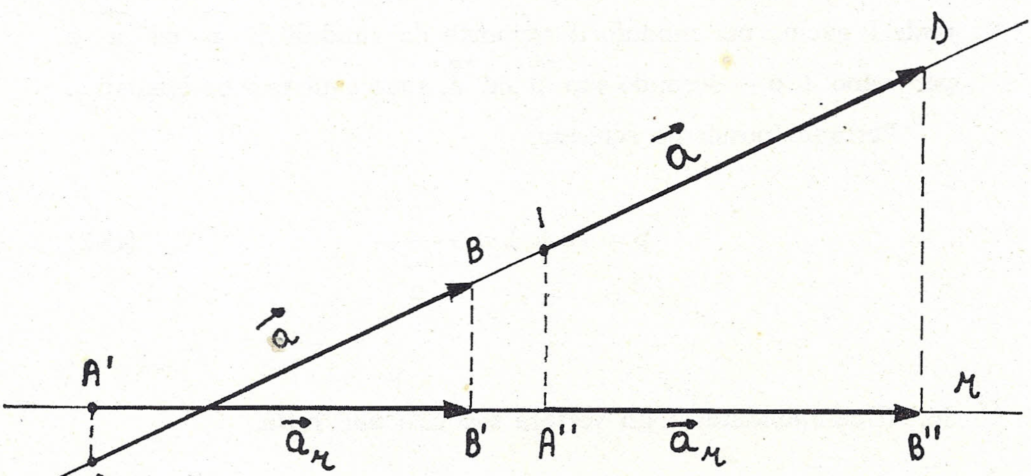


Fig. (16·2)

che si ottiene proiettando ortogonalmente su r gli estremi del vettore $\vec{a}$. Designeremo questo vettore (che è ancora un cursore) col simbolo

$$(s, \vec{a_r}).$$

Infine, il componente di un vettore applicato $(A, \vec{a})$ non nullo secondo una retta r è il vettore la cui origine A′ è la proiezione ortogonale dell'origine A ed il cui estremo B′ è la proiezione ortogonale dell'estremo B di $(A, \vec{a})$ sulla retta r.

Denoteremo questo vettore col simbolo

$$(A', \vec{a_r}).$$

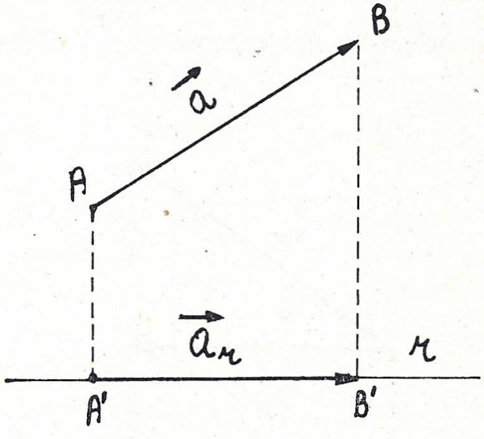


Fig. (16.3)

17. La componente di un vettore secondo una retta orientata.

Noi sappiamo che il **versore** di una retta orientata è il vettore $\vec{e}$ avente modulo unitario e direzione e verso di $\vec{r}$.

Consideriamo una retta orientata $\vec{r}$ di versore $\vec{e}$.

La componente del vettore libero $\vec{a}$, non ortogonale ad $\vec{r}$, secondo la retta orientata $\vec{r}$ è il numero reale relativo a_r definito dal seguente rapporto:

$$a_r = \frac{\vec{a}_r}{\vec{e}} \tag{17.1}$$

Pertanto tra il componente $\vec{a}_r$ di un vettore libero $\vec{a}$ secondo la retta non orientata r e la componente dello stesso vettore secondo la medesima retta orientata (cioè di versore $\vec{e}$) sussiste la relazione:

$$\vec{a}_r = a_r \cdot \vec{e} \tag{17.2}$$

In maniera del tutto analoga si definisce la componente secondo una retta orientata del cursore $(s, \vec{a})$ o del vettore applicato $(A, \vec{a})$.

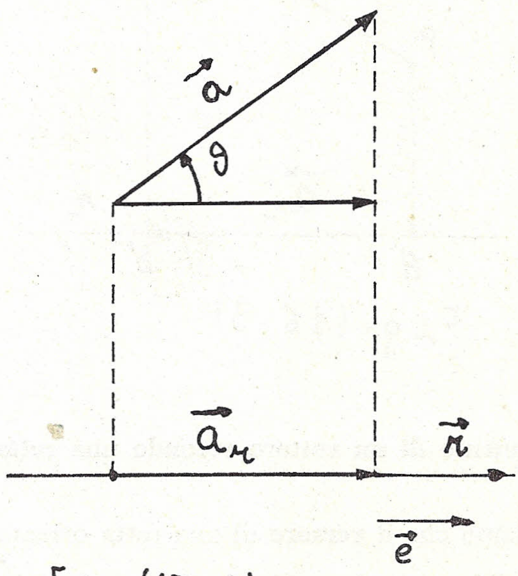


Fig. (17.1)

18. Vettore combinazione lineare di altri due

Se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono 3 vettori complanari e se $\vec{b}$ e $\vec{c}$ non sono paralleli, allora il vettore $\vec{a}$ si può esprimere in una sola maniera come combinazione lineare:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{b} + y_1 \cdot \vec{c} \quad \text{con} \quad (x_1, y_1 \in R^*) \tag{18.1}$$

dei vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Dimostrazione

Dall'origine A del vettore $\vec{a}$ si tracci la retta parallela alla direzione di $\vec{b}$ e dall'estremo B del vettore $\vec{a}$ si tracci la retta parallela alla direzione di $\vec{c}$ e sia H il punto d'intersezione di tali parallele.

Si ottengono i vettori (H — A) e (B — H) e risulta:

$$\vec{a} = (H - A) + (B - H)$$

ma:

$$\vec{b} \,||\, (H - A) \Rightarrow H - A = x_1 \cdot \vec{b}$$

$$\vec{c} \,||\, (B - H) \Rightarrow B - H = y_1 \cdot \vec{c}$$

per cui si ottiene:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{b} + y_1 \cdot \vec{c}$$

Dimostriamo che la combinazione lineare (18.1) è unica. Supponiamo per il momento che si abbia:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{b} + y_1 \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} = x_2 \cdot \vec{b} + y_2 \cdot \vec{c}$$

Sottraendo membro a membro si ricava:

$$(x_1 - x_2) \cdot \vec{b} + (y_1 - y_2)\,\vec{c} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{o}$$

Questo implica:

$$x_1 - x_2 = 0, \; y_1 - y_2 = 0 \quad \text{cioè:} \quad x_1 = x_2, \; y_1 = y_2$$

e quindi la combinazione lineare (18.1) è unica.

I vettori $x_1 \cdot \vec{b}$ ed $y_1 \cdot \vec{c}$ si dicono **i componenti** del vettore $\vec{a}$.
In base a quanto dimostrato precedentemente possiamo affermare che:

$$x_1 \cdot \vec{b} + y_1 \cdot \vec{c} = x_2 \cdot \vec{b} + y_2 \cdot \vec{c} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2 \qquad (18.2)$$

Se risulta contemporaneamente:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{b} + y_1 \cdot \vec{c} \qquad (18.3)$$

$$\vec{a} = x_2 \cdot \vec{b} + y_2 \cdot \vec{c} \qquad (18.4)$$

$$x_1 \neq x_2; \; y_1 \neq y_2 \qquad (18.5)$$

allora i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono paralleli e viceversa.

Dimostrazione

Se dalla (18.3) sottraiamo, membro a membro la (18.4), otteniamo:

$$\vec{a} - \vec{a} = (x_1 - x_2) \cdot \vec{b} + (y_1 - y_2) \vec{c}$$

Ponendo:

$$x = x_1 - x_2 \neq 0 \text{ ed } y = y_1 - y_2 \neq 0$$

otteniamo:

$$x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{b} = \vec{o} \Rightarrow \frac{\vec{b}}{\vec{c}} = -\frac{y}{x} \in R^*$$

I vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ risultano paralleli.

Viceversa se i vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono paralleli, allora possiamo scrivere:

$$\frac{\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ con } \gamma, \beta \in R^*$$

e quindi:

$$\beta \cdot \vec{b} - \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad (18.6)$$

e potendo scrivere:

$$\beta = x_1 - x_2 \neq 0 \quad e \quad \gamma = y_2 - y_1 \neq 0$$

la (18.6) diventa:

$$(x_1 - x_2) \cdot \vec{b} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{c}$$

cioè:

$$x_1 \cdot \vec{b} + y_1 \cdot \vec{c} = x_2 \cdot \vec{b} + y_2 \cdot \vec{c} = \vec{a} \qquad \text{con} \qquad x_1 \neq x_2 \qquad e \qquad y_1 \neq y_2$$

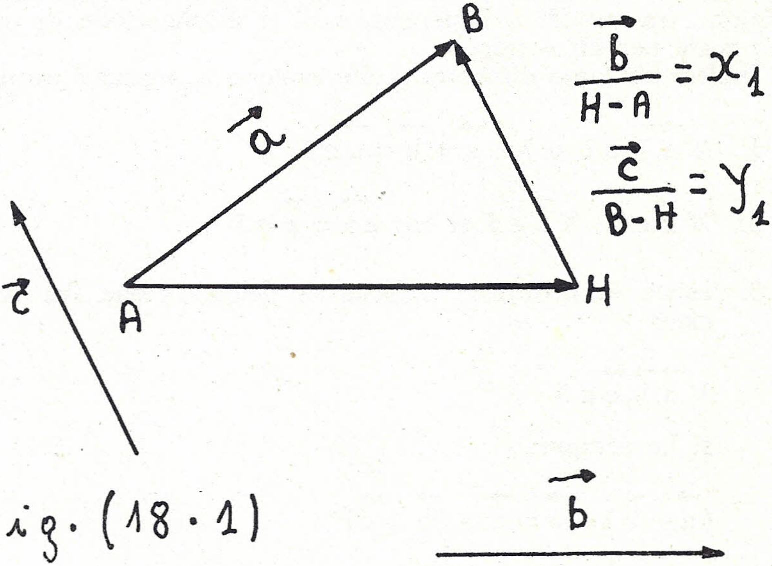


Fig. (18·1)

19. Spazi vettoriali ordinari.

Il vettore $\vec{v}$ è **combinazione lineare** di n vettori

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots \vec{v}_n$$

se esistono n numeri reali relativi $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (detti **coefficienti della combinazione lineare**) non tutti contemporaneamente nulli tali da soddisfare la relazione

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots\ldots + k_n\vec{v}_n \tag{19.1}$$

Gli n vettori si dicono **linearmente dipendenti** se $\vec{v}$ è il vettore nullo $\vec{o}$, cioè se:

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots. + k_n\vec{v}_n = \vec{o} \tag{19.2}$$

In caso contrario si dicono **linearmente indipendenti.**

Sia $J = \{\vec{v}\}$ l'insieme di tutti i vettori del piano euclideo π ed R l'insieme dei numeri reali.

Abbiamo visto che possono essere introdotte l'operazione di addizione fra vettori e l'operazione di moltiplicazione di un numero reale per un vettore.

Inoltre abbiamo dimostrato che valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in J$ si ha: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s} \in J$

2. $\forall\ k \in R,\ \forall\ \vec{a} \in J$ si ha: $k\,\vec{a} = \vec{p} \in J$

3. esiste la proprietà associativa dell'addizione fra vettori, cioè:

   $\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in J$

   si ha sempre:

   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

4. esiste la proprietà commutativa dell'addizione fra vettori:

   $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in J$

   si ha sempre:

   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

5. esiste il vettore nullo $\vec{o}$, cioè:

   $\forall\ \vec{a} \in J$

si ha sempre:

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$$

6. esiste il vettore opposto, cioè:

$$\forall \vec{a} \in J$$

si ha sempre:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$$

7. esiste la proprietà **associativa mista**, cioè:

$$\forall \vec{a} \in J \text{ e } \forall m, n \in R$$

si ha sempre:

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a} = mn\vec{a}$$

8. esiste l'unità come operatore identico, cioè:

$$\forall a \in J$$

si ha sempre:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

9. esiste la proprietà **distributiva mista**, cioè:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in J \text{ e } \forall m, n \in R$$

si ha sempre:

$$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}; \; m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

Si dice che J è uno **spazio vettoriale ordinario** su R rispetto alle operazioni di addizione (fra vettori) e di moltiplicazione (di un numero per un vettore) in quanto:

— è possibile definire l'operazione di addizione fra vettori;

— è possibile definire la moltiplicazione di un numero reale per un vettore;

— sono valide le proprietà 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Definiamo **dimensione** di uno spazio vettoriale ordinario il numero massimo di vettori linearmente indipendenti.

Lo spazio vettoriale ordinario costituito da tutti i vettori liberi di una retta r ha dimensione 1.
Infatti per la (15.1) possiamo scrivere:

$$k \cdot \vec{a} = \vec{p} \qquad \text{cioè} \qquad k \cdot \vec{a} - \vec{p} = \vec{o} \tag{19.3}$$

cioè due qualsiasi vettori di r sono sempre linearmente dipendenti.
Lo spazio vettoriale ordinario costituito da tutti i vettori di un piano ha dimensione 2. Infatti per la (18.1) possiamo affermare che tre vettori qualsiasi sono sempre linearmente dipendenti e quindi al massimo esistono soltanto due vettori (ad es. $\vec{a}$ e $\vec{b}$) linearmente indipendenti, che non possono essere paralleli.
Tutti gli altri vettori si possono esprimere in una sola maniera come combinazione lineare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

In tal caso si suol dire che i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ costituiscono una base o un sistema di riferimenti del piano vettoriale.
In seguito noi assumeremo come base una coppia ortogonale di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Sotto tale ipotesi un generico vettore $\vec{v}$ del piano può essere rappresentato nella seguente maniera:

$$\vec{v} = h \cdot \vec{i} + k \cdot \vec{j} \tag{19.4}$$

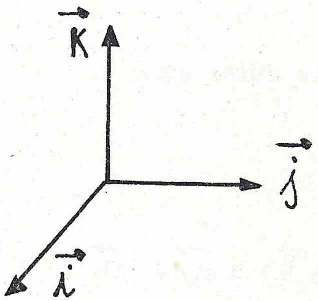


Fig. (19.2)

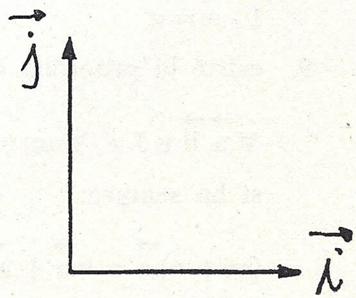


Fig. (19.1)

Lo spazio vettoriale ordinario costituito da tutti i vettori liberi ha dimensione 3. Ciò significa che esistono al massimo tre vettori (ad es. $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$) linearmente indipendenti e ciò si verifica quando essi non sono nulli né complanari.

È evidente che nota l'ascissa x si può ricavare la posizione del punto P e viceversa, quindi vi è corrispondenza biunivoca fra i numeri reali ed i punti di una retta.

Da tutto ciò si deduce che ogni punto di una retta orientata x, di dato versore, può essere rappresentato da un numero reale relativo e viceversa.

22. Coordinate cartesiane nel piano.

Si fissino nel piano due rette orientate Ox (di versore $\vec{i}$), Oy (di versore $\vec{j}$) uscenti da uno stesso punto O.

Considerato nel piano un qualsiasi punto P si traccino per esso le rette parallele all'asse x ed all'asse y.

È valida la seguente relazione vettoriale:

$$P - O = (P_1 - O) + (P_2 - O) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (22.1)$$

I numeri reali relativi x, y si dicono le **coordinate cartesiane** del punto P. Si scrive P = (x, y) e si legge P di coordinate x ed y.

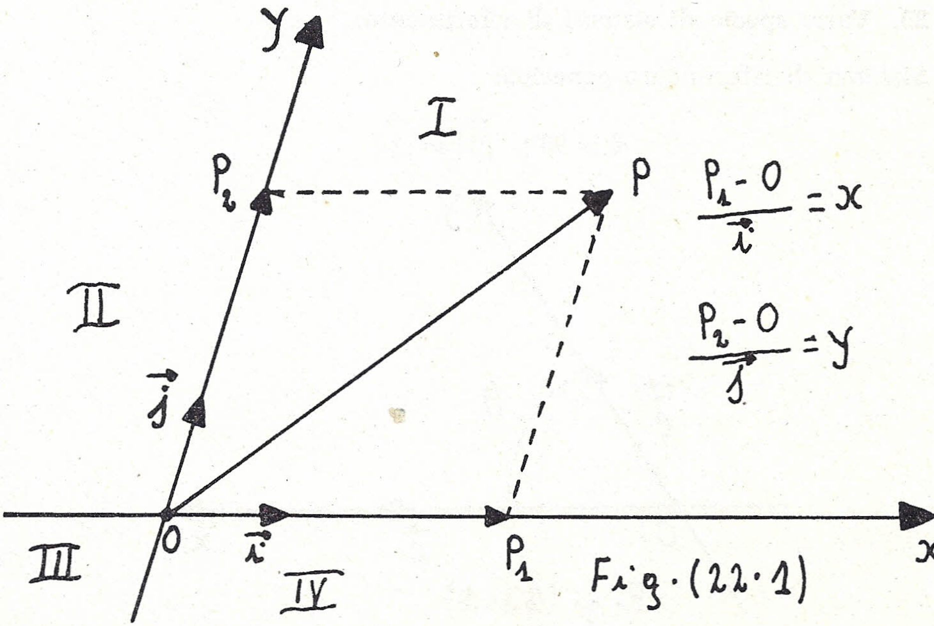


Fig. (22.1)

x è detta **ascissa** ed y **ordinata** del punto P. Spesso si dice brevemente punto (x, y) in luogo di punto di ascissa x ed ordinata y.

La retta x, così orientata, è detta **asse delle ascisse** o asse delle x, mentre la retta orientata y è detta **asse delle ordinate** o asse delle y; le due rette x ed y costituiscono una coppia di assi coordinati cartesiani ortogonali o obliqui a seconda che esse sono ortogonali o no.

Il punto O è detto **origine degli assi**.

Da tutto ciò si deduce che c'è una corrispondenza biunivoca fra coppie ordinate di numeri reali e i punti del piano e viceversa.

Infatti da P si deducono le coordinate x, y. Viceversa, date x, y restano individuati su Ox e Oy i punti P_1 e P_2, e conseguentemente P, come quarto vertice del parallelogrammo costruito su OP_1 e OP_2.

Quindi un punto P del nostro piano non è altro che una coppia ordinata di numeri reali.

Noi considereremo soltanto coordinate cartesiane ortogonali.

I due assi O_x, O_y dividono il piano in quattro regioni angolari (dette **quadranti**) in ciascuna delle quali i punti hanno coordinate di segni particolari: $P_1\widehat{O}P_2$ è il 1° quadrante, $P_2\widehat{O}B$ è il 2° quadrante, $B\widehat{O}C$ è il 3° quadrante, $C\widehat{O}P_1$ è il 4° quadrante. Le rette Ox, Oy e le due bisettrici degli assi dividono il piano in otto regioni angolari dette **ottanti**.

23. Varie specie di sistemi di riferimento.

Sistema di riferimento **generico**:

$$\theta \neq 90°; \quad |\vec{i}| \neq |\vec{j}|$$

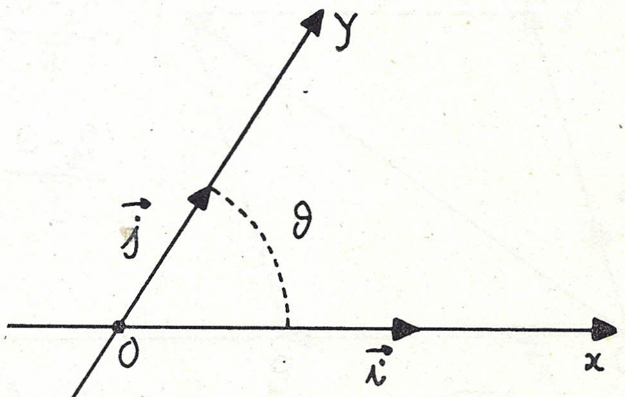


Fig. (23.1)

Sistema di riferimento **normale**:

$$\theta \neq 90°; \quad |\vec{i}| = |\vec{j}|$$

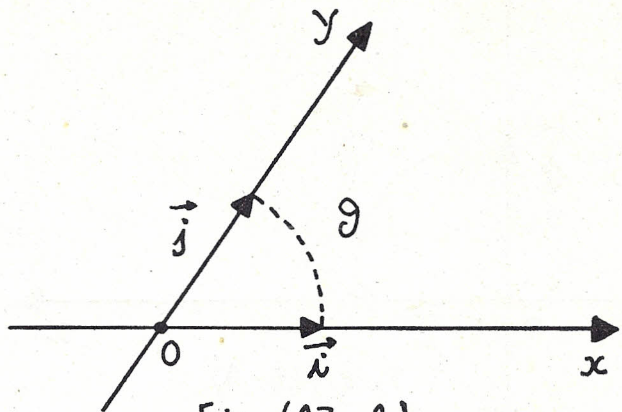


Fig. (23 . 2)

Sistema di riferimento **ortogonale**:

$$\theta = 90°; \quad |\vec{i}| \neq |\vec{j}|$$

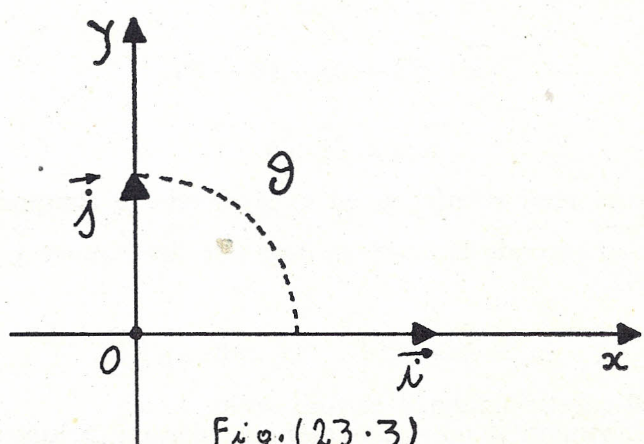


Fig. (23 . 3)

Sistema di riferimento **ortonormale**:

$$\theta = 90°; \quad |\vec{i}| = |\vec{j}|$$

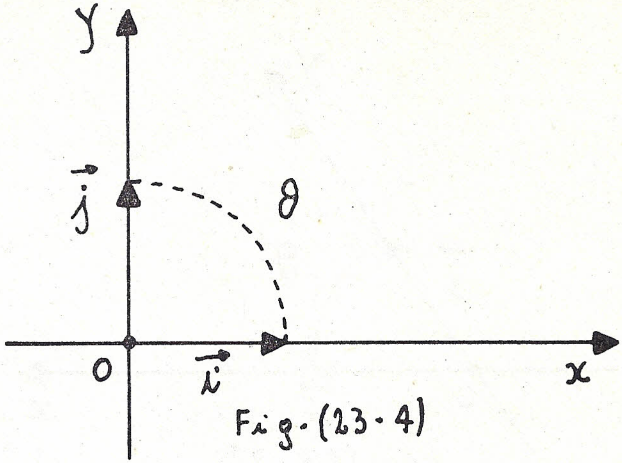


Fig. (23·4)

In tutte le questioni che tratteremo ci riferiremo sempre a sistemi ortonormali. In caso contrario ne faremo esplicita menzione.

24. Rappresentazione cartesiana di un vettore.

Si consideri un sistema ortonormale di assi cartesiani xOy ed un vettore $\vec{a}$. Si può scrivere:

$$\vec{a} = (H - A) + (B - H)$$

cioè:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \tag{24.1}$$

I numeri reali relativi a_x ed a_y si dicono **le componenti cartesiane** di $\vec{a}$ secondo le direzioni orientate dei versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (del riferimento).

$$a_x = 0 \Rightarrow \vec{a} \,||\, \vec{j}; \qquad a_y = 0 \Rightarrow \vec{a} \,||\, \vec{i} \tag{24.2}$$

$a_x = a_y = 0$ caratterizzano il vettore nullo.

Le componenti a_x ed a_y possono considerarsi in luogo del vettore che rappresentano.

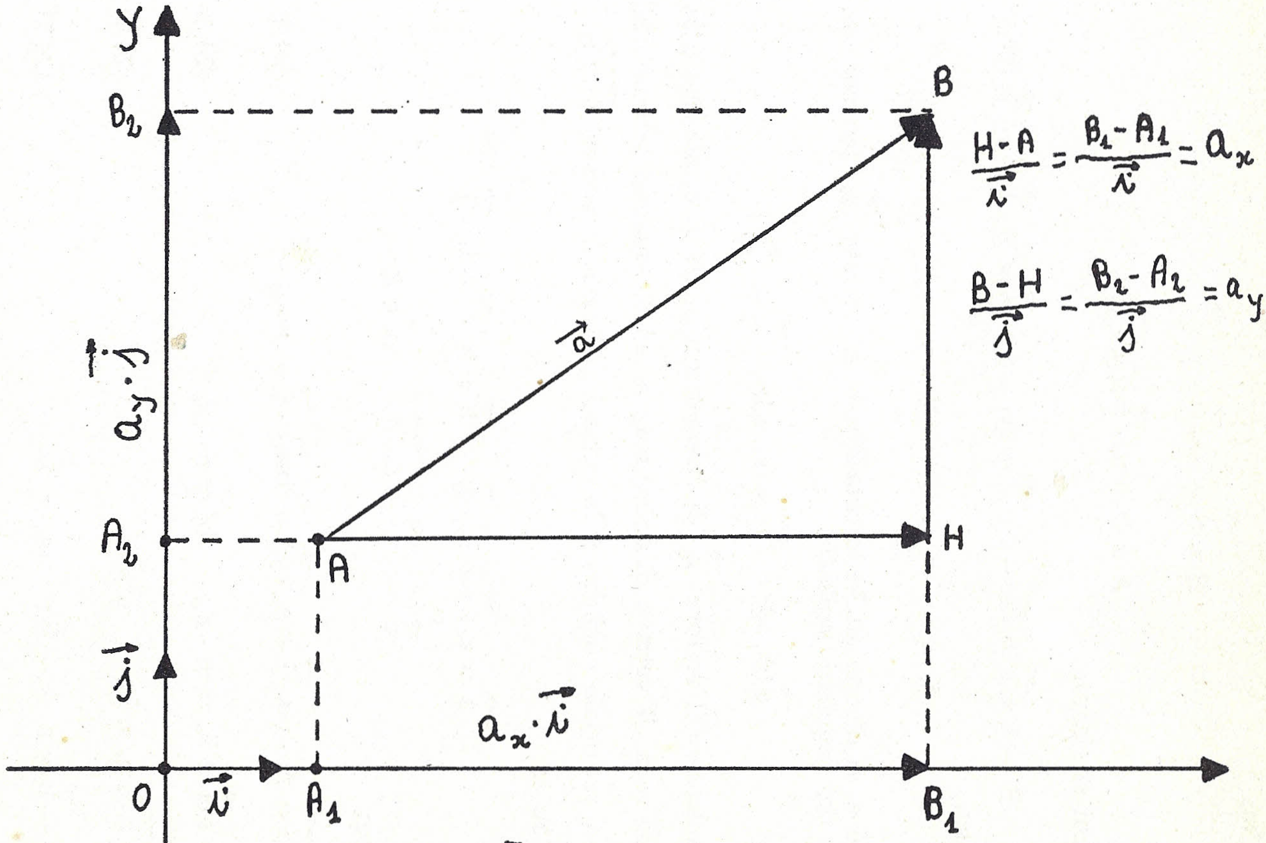

Y
B_2
A_2
$a_y \cdot \vec{j}$
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
A_1
B_1
A
B
H
$\vec{a}$
$a_x \cdot \vec{i}$
$\frac{H-A}{\vec{i}} = \frac{B_1 - A_1}{\vec{i}} = a_x$
$\frac{B-H}{\vec{j}} = \frac{B_2 - A_2}{\vec{j}} = a_y$

Fig. (24.1)

Se poi è:

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

risulta:

$$B = O + x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$$

$$A = O + x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$$

da cui si ricava:

$$B - A = \vec{a} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} = X \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad (24.3)$$

essendo:

$$X = x_2 - x_1 = a_x; \qquad Y = y_2 - y_1 = a_y$$

a_x ed a_y si dicono anche le **coordinate** del vettore $\vec{a}$, per cui con uno dei seguenti simboli:

$$\vec{a}\,(a_x, a_y); \qquad \vec{a} = (a_x, a_y); \qquad \vec{a} = \left.\begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix}\right)$$

intenderemo il vettore $\vec{a}$ di componenti a_x ed a_y o, ciò che è la stessa cosa, il vettore di coordinate a_x ed a_y, quando la base del piano vettoriale euclideo è la coppia ordinata di versori $(\vec{i}, \vec{j})$.

Se è:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}; \qquad \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j}; \qquad m \in R$$

allora:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) = (ma_x) \cdot \vec{i} + (ma_y) \cdot \vec{j} \quad (24.4)$$

$$\vec{b} = m\vec{a} \Rightarrow b_x = m \cdot a_x; \qquad b_y = m \cdot a_y \quad (24.5)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow a_x = b_x; \qquad a_y = b_y \quad (24.6)$$

$$\vec{a} = -\vec{b} \Rightarrow a_x = -b_x; \qquad a_y = b_y \quad (24.7)$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow c_x = a_x + b_x; \qquad c_y = a_y + b_y \quad (24.8)$$

25. Funzioni circolari.

Consideriamo un sistema ortonormale di assi cartesiani e siano $\vec{i} = A - O$ e $\vec{j} = B - O$ rispettivamente i versori dell'asse x e dell'asse y.

Sia $\vec{e} \Rightarrow P - O$ un generico versore del piano xOy applicato al punto O.

Al variare della direzione del vettore $\vec{e}$, il punto P descrive una circonferenza di centro O e raggio unitario.

Essa prende il nome di **circonferenza goniometrica** o trigonometrica.

Sia α la misura dell'angolo formato dai versori $\vec{i}$ ed $\vec{e}$, cioè sia:

$$\alpha = (\widehat{\vec{i}, \vec{e}}) \tag{25.1}$$

Il numero α può essere indifferentemente pensato o come misura dell'arco $\overset{\frown}{AP}$ (avendo assunto il raggio OA come unità di misura) o come misura in radianti del corrispondente angolo al centro $A\hat{O}P$.

Conveniamo inoltre di misurare gli **angoli** a partire dal lato OA e gli **archi** a partire dal punto A.

Siano t, t′, t″ le tangenti geometriche alla circonferenza goniometrica rispettivamente nei punti A, B e P.

Se E ed F sono le proiezioni ortogonali del punto P rispettivamente sull'asse x e sull'asse y, si ha:

$$\vec{e} = (E - O) + (F - O) \tag{25.2}$$

I punti E ed F, assieme a quelli individuati dalle tre tangenti geometriche t, t′, t″, individuano i sei vettori:

$$(E - O); \quad (G - B); \quad (S - O); \quad (F - O); \quad (T - A); \quad (R - O)$$

dei quali, i primi tre risultano paralleli al versore $\vec{i}$, e gli altri tre risultano paralleli al versore $\vec{j}$.

I seguenti sei rapporti fra vettori paralleli definiscono le sei **funzioni circolari** (o trigonometriche o goniometriche):

$$\text{seno dell'angolo } \alpha = \sin \alpha = \frac{F - O}{\vec{j}} =$$

$= \text{ordinata del punto } P \qquad (25.3)$

cioè il seno dell'angolo α coincide con la componente del versore $\vec{e}$ lungo l'asse delle ordinate.

$$\text{coseno dell'angolo } \alpha = \cos\alpha = \frac{E - O}{\vec{i}} =$$

$$= \text{ascissa del punto } P \qquad (25.4)$$

cioè il coseno dell'angolo α coincide con la componente del versore $\vec{e}$ lungo l'asse delle ascisse.

$$\text{tangente trigonometrica) dell'angolo } \alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{T - A}{\vec{j}} =$$

$$= \text{ordinata del punto } T \qquad (25.5)$$

$$\text{cotangente (trigonometrica) dell'angolo } \alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{G - B}{\vec{i}}$$

$$= \text{ascissa del punto } G \qquad (25.6)$$

$$\text{secante dell'angolo } \alpha = \sec\alpha = \frac{S - O}{\vec{i}} = \frac{T - O}{\vec{e}} =$$

$$= \text{ascissa del punto } S \qquad (25.7)$$

$$\text{cosecante dell'angolo } \alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{R - O}{\vec{j}} = \frac{G - O}{\vec{e}} =$$

$$= \text{ordinata del punto } R \qquad (25.8)$$

È consuetudine chiamare $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$, semplicemente **funzioni** e $\cos\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$, **cofunzioni.**

Spesso la misura α dell'angolo è chiamata **argomento** delle funzioni circolari.

Le sei funzioni circolari così definite sono funzioni numeriche, cioè esse rappresentano numeri reali relativi variabili, cioè:

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{cotg}\alpha,\ \sec\alpha,\ \operatorname{cosec}\alpha \in R$$

Esse non dipendono dal particolare raggio unitario OA che si sceglie, ma dipendono esclusivamente dall'arco $\overset{\frown}{AP}$ o, ciò che è la stessa cosa, dal corrispondente angolo al centro $\alpha = A\hat{O}P$.

Le (25.4) e (25.3) possono essere scritte anche nella seguente maniera:

$$E - O = \cos\alpha\, \vec{i} \qquad F - O = \sin\alpha\, \vec{j}$$

per cui la (25.2) diventa:

$$\vec{e} = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j} \tag{25.9}$$

Pertanto $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ rappresentano le componenti cartesiane del vettore unitario.

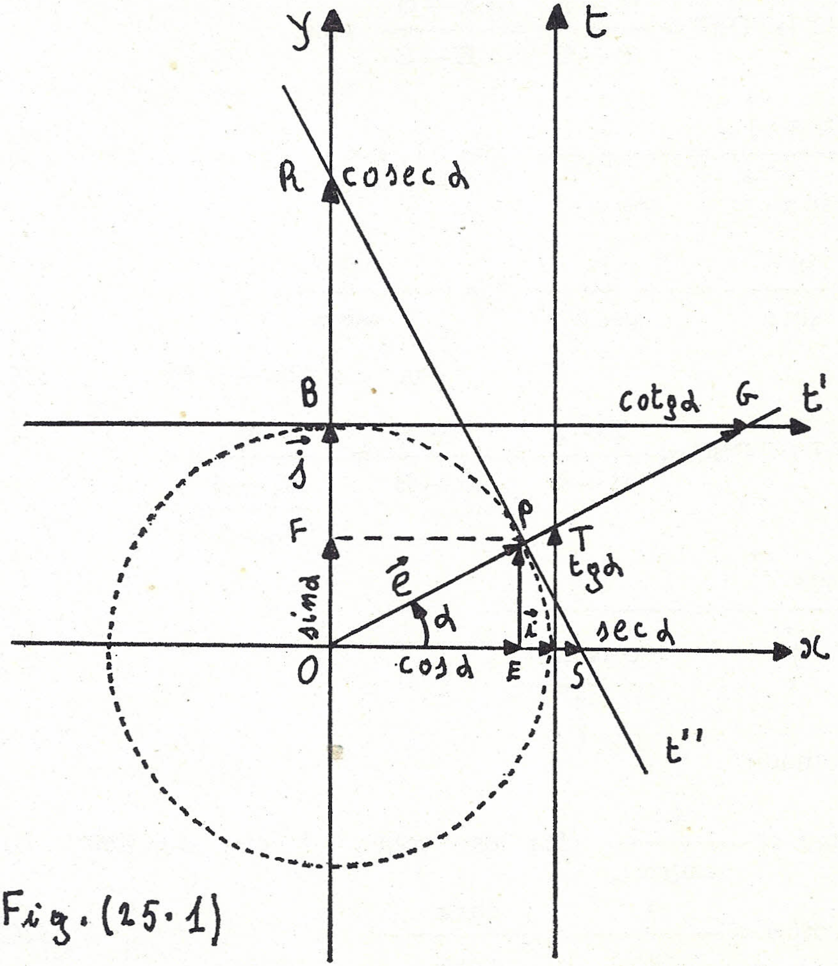


Fig. (25.1)

26. Alcune relazioni fra le varie funzioni circolari.

$$\left.\begin{array}{l} OP = OA \\ \widehat{POS} = \widehat{AOT} \\ \widehat{OPS} = \widehat{OAT} \end{array}\right\} \Rightarrow OAT = OPS \Rightarrow OT = OS$$

$$\left.\begin{array}{l} OP = OB \\ \widehat{OPR} = \widehat{OBG} \\ \widehat{ORP} = \widehat{OGB} \end{array}\right\} \Rightarrow OPR = OBG \Rightarrow OR = OG$$

$$OAT\ [s]\ OEP \Rightarrow \frac{T - A}{P - E} = \frac{A - O}{E - O} \quad \text{cioè:}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \vec{j}}{\sin\alpha \cdot \vec{j}} = \frac{\vec{i}}{\cos\alpha \cdot \vec{i}} \qquad \text{ma:} \quad \vec{j} / \vec{j} = 1 \quad \vec{i} / \vec{i} = 1$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{con} \quad \alpha \neq (2k + 1)\, 90^\circ \tag{26.1}$$

$$OAT\ [s]\ OBG \Rightarrow \frac{T - A}{B - O} = \frac{A - O}{G - B} = \frac{1}{\dfrac{G - B}{A - O}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \vec{j}}{\vec{j}} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha \cdot \vec{i}}{\vec{i}}}$$

e quindi:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \quad \text{cioè} \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \quad \text{con} \quad \alpha \neq K90^\circ \\ \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{array}\right. \tag{26.2}$$

$$\text{OAT [s] OEP} \Rightarrow \frac{T-O}{P-O} = \frac{A-O}{E-O} = \frac{1}{\dfrac{E-O}{A-O}} \quad \text{cioè:}$$

$$\frac{T-O}{\vec{e}} = \frac{1}{\dfrac{E-O}{\vec{i}}} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \alpha \neq (2k+1)\,90^\circ \tag{26.3}$$

$$\text{OBG [s] OFP} \Rightarrow \frac{G-O}{P-O} = \frac{B-O}{F-O} = \frac{1}{\dfrac{F-O}{B-O}} \quad \text{cioè:}$$

$$\frac{G-O}{\vec{e}} = \frac{1}{\dfrac{F-O}{\vec{j}}} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \text{con } \alpha \neq k180^\circ \tag{26.4}$$

27. Cambiamento del riferimento.

Riferiamo il piano a due sistemi ortonormali di assi cartesiani: xOy (di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$) ed x'O'y' (di versori $\vec{i}'$ e $\vec{j}'$).

Un generico punto P del piano ha, rispetto ad xOy, coordinate cartesiane (x, y) e rispetto ad x'O'y', (x', y').

Siano (a, β) le coordinate di O' rispetto ad xOy.

Se (Q — O) ed (R — O) sono due versori equipollenti rispettivamente a $\vec{i}'$ e $\vec{j}'$ e $\theta = (\vec{i}, \vec{i}')$, per la (25.9), possiamo scrivere:

$$\vec{j}' = \cos(\widehat{AOR}) \cdot \vec{i} + \sin(\widehat{AOR}) \cdot \vec{j} =$$

$$= \cos(90^\circ + \theta) \cdot \vec{i} + \sin(90^\circ + \theta) \cdot \vec{j} =$$

$$= -\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j} \tag{27.1}$$

$$\vec{i}' = \cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j} \tag{27.2}$$

cioè, rispetto al riferimento xOy, le componenti di $\vec{i}'$ sono $\cos\theta$ e $\sin\theta$, mentre quelle di $\vec{j}'$ sono $-\sin\theta$ e $\cos\theta$.

Rispetto al riferimento xOy abbiamo:

$$P - O' = (x - \alpha) \cdot \vec{i} + (y - \beta) \cdot \vec{j} \tag{27.3}$$

mentre, rispetto al riferimento x'O'y', abbiamo:

$$P - O' = x' \cdot \vec{i}' + y' \cdot \vec{j}' \tag{27.4}$$

cioè:

$$P - O' = x' \cdot (\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}) + y' (-\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j})$$

$$P - O' = (x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta) \cdot \vec{i} + (x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta) \vec{j}$$

Confrontando tale espressione con la (27.3) otteniamo:

$$\begin{cases} x - \alpha = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y - \beta = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x = \alpha + x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y = \beta + x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{27.5}$$

Se è $\theta = O$ (**traslazione degli assi**) la (27.5) diventa:

$$\begin{cases} x = \alpha + x' \\ y = \beta + y' \end{cases} \tag{27.6}$$

Se $O' = O$ (**rotazione degli assi**) la (27.5) diventa:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta \\ y = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{27.7}$$

Le formule inverse si ricavano risolvendo le (27.5) o le (27.6) o le (27.7) rispetto ad x' ed y'.

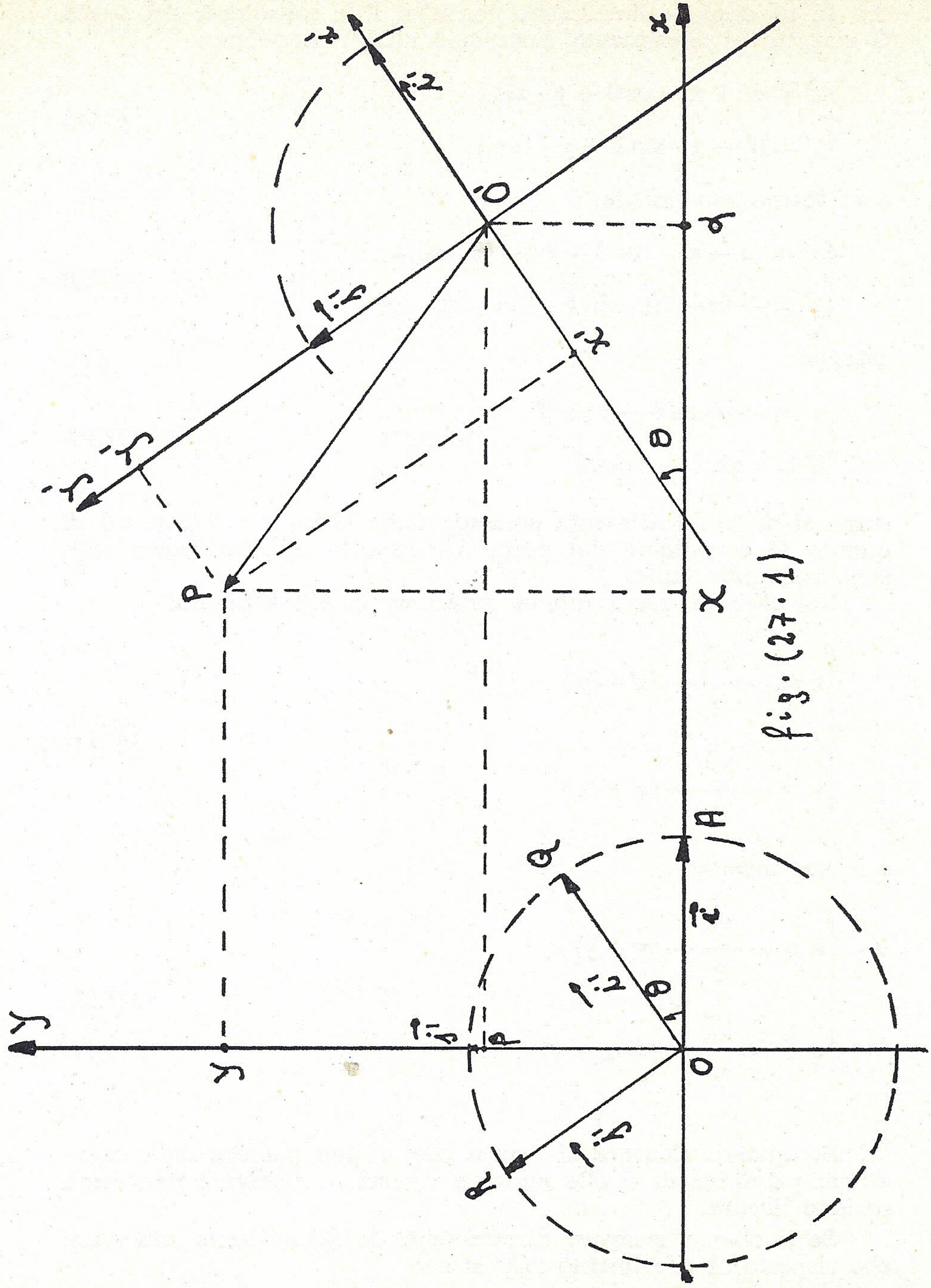


fig. (27.1)

In tal caso, se indichiamo con α' e β' le coordinate del punto O rispetto al riferimento cartesiano x'O'y', otteniamo:

$$\begin{cases} x' = \alpha' + x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta \\ y' = \beta' - x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{27.8}$$

o in forma equivalente:

$$\begin{cases} x' = (x - \alpha) \cdot \cos\theta + (y - \beta) \cdot \sin\theta \\ y' = -(x - \alpha) \cdot \sin\theta + (y - \beta) \cdot \cos\theta \end{cases} \tag{27.9}$$

essendo:

$$\begin{cases} \alpha' = -\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta \\ \beta' = \alpha \sin\theta - \beta \cos\theta \end{cases} \tag{27.10}$$

come si deduce facilmente ponendo nella (27.5) $x = 0$ e $y = 0$ in quanto le coordinate del punto O, rispetto al riferimento xOy, sono entrambe nulle.

Nel caso di una semplice rotazione di 45° abbiamo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases} \tag{27.11}$$

e le sue inverse

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \tag{27.12}$$

Da quanto ricavato si evince che si può passare dalle coordinate primitive di P alle nuove e viceversa, mediante una sostituzione lineare.

Se vogliamo ricavare direttamente le (27.6) basta osservare che rispetto al riferimento xOy si ha:

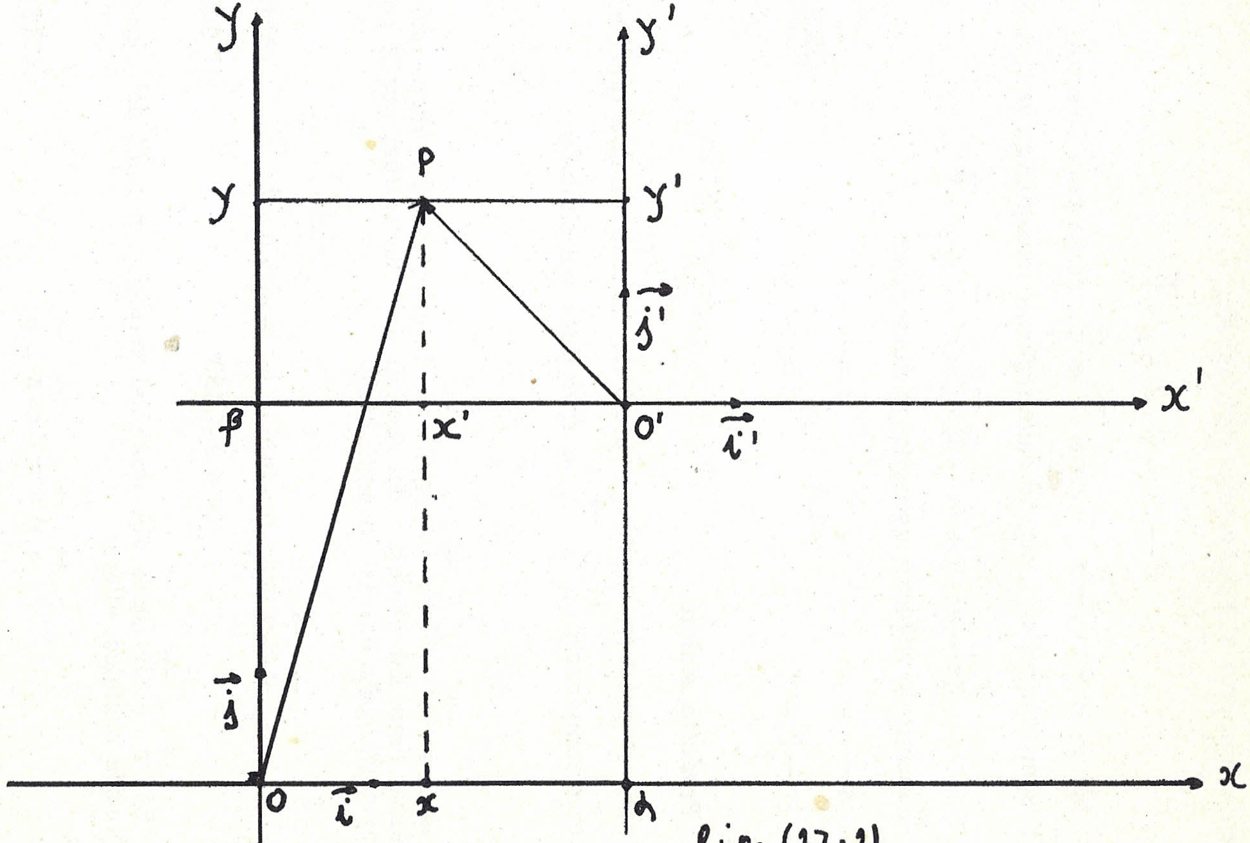


fig. (27.2)

$$P - O' = (x - \alpha) \cdot \vec{i} + (y - \beta) \cdot \vec{j}$$

mentre rispetto al riferimento x'O'y' si ha:

$$P - O' = x' \cdot \vec{i'} + y' \cdot \vec{j'}$$

Ma, in questo caso, i versori $\vec{i}$ e $\vec{i'}$, come pure i versori $\vec{j}$ e $\vec{j'}$ sono equipollenti, per cui dalla seguente uguaglianza vettoriale:

$$(x - \alpha) \cdot \vec{i} + (y - \beta) \cdot \vec{j} = x' \cdot \vec{i'} + y' \cdot \vec{j'}$$

si deducono le seguenti uguaglianze numeriche:

$$\begin{cases} x - \alpha = x' \\ y - \beta = y' \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad \begin{cases} x = \alpha + x' \\ y = \beta + y' \end{cases} \tag{27.13}$$

28. Prodotto scalare.

Dicesi **prodotto scalare** o **prodotto interno** di due qualsiasi vettori complanari $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si designa col simbolo

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

(e si legge $\vec{a}$ scalare $\vec{b}$ oppure $\vec{a}$ interno $\vec{b}$) il numero reale relativo dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo da essi formati, cioè:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(a, b) = ab \cdot \cos\theta \tag{28.1}$$

con:

$$0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ \tag{28.2}$$

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono due qualsiasi vettori non nulli del piano vettoriale euclideo, allora:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \tag{28.3}$$

cioè la condizione $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, con $\vec{a} \neq o$ e $\vec{b} \neq o$, è la condizione necessaria e sufficiente perché i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ siano perpendicolari. Infatti:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow ab\cos(a, b) = 0 \Rightarrow \cos(a, b) = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

mentre: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = ab\cos 90^\circ = 0$

$\forall\, \vec{a} \in J$ si pone:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{a}^2 = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2 \tag{28.4}$$

cioè $\vec{a}^2$ è il quadrato scalare del vettore $\vec{a}$.

Similmente si avrà:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{i}^2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 \\ \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{j}^2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 \end{aligned} \tag{28.5}$$

mentre:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{i} = \cos 90^\circ = 0 \tag{28.6}$$

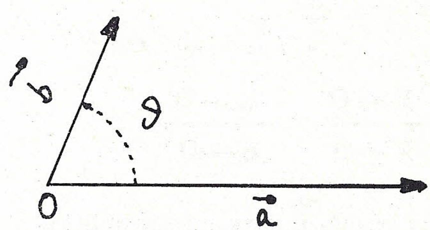


fig. (28·1)

Proprietà commutativa del prodotto scalare

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} \tag{28.7}$$

Infatti:

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = ab \cdot \cos(\vec{b}, \vec{a})$$

Ma:

$$(a, b) = (b, a)$$

per cui è valida la (28.7).

Teorema

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è uguale al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per la componente di $\vec{b}$ su $\vec{a}$, oppure al prodotto del modulo di $\vec{b}$ per la componente di $\vec{a}$ su $\vec{b}$, cioè:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a \cdot b_a = a_b \cdot b \qquad (28.8)$$

dove con a_b indichiamo la componente di $\vec{a}$ su $\vec{b}$ e con b_a indichiamo la componente di $\vec{b}$ su $\vec{a}$.

Riferiamo i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ad un sistema ortonormale di assi cartesiani come quello indicato nella figura.

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \cdot \cos\theta$$

$$OKB\ [s]\ OEP \Rightarrow \frac{B - O}{P - O} = \frac{K - O}{E - O}$$

Ma $E - O = \cos\theta \cdot \vec{i}$ per cui abbiamo:

$$\frac{\vec{b}}{\vec{e}} = \frac{b_a \cdot \vec{i}}{\cos \cdot \vec{i}}; \qquad b = \frac{b_a}{\cos\theta} \qquad b_a = b\cos\theta \qquad (28.9)$$

$$ORH\ [s]\ OEP \Rightarrow \frac{R - O}{P - O} = \frac{H - O}{E - O} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R - O \times (E - O) = (H - O) \times (P - O)$$

$$\vec{a} \times (\cos\theta \cdot \vec{i}) = a_b \cdot \vec{e} \times \vec{e}$$

$$a_b = a \cdot \cos\theta \tag{28.10}$$

Così la (28.8) è dimostrata.

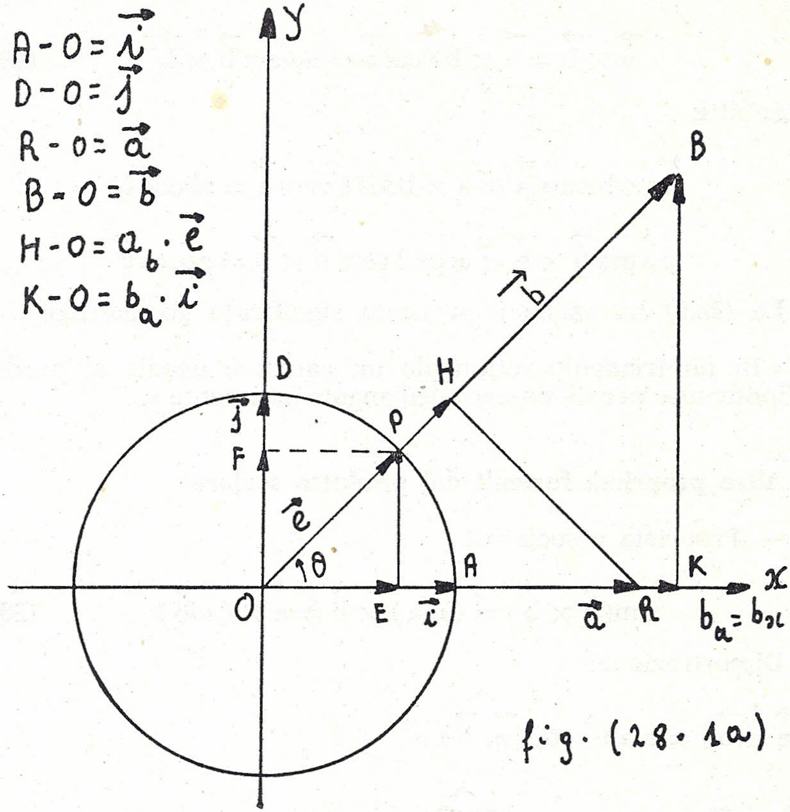


fig. (28·1a)

Una interpretazione della (28.9) o della (28.10) è la seguente:

« La componente di un vettore $\vec{b}$ lungo una retta orientata $\vec{x}$ è uguale al prodotto del modulo di $\vec{b}$ per il coseno dell'angolo (compreso tra 0 e 180°) formato da $\vec{x}$ e da $\vec{b}$ ».

Pertanto la (17.2) può essere scritta, con l'ovvio significato dei simboli:

$$\vec{b}_x = b_x \cdot \text{vers } \vec{x} = b_x \cdot \vec{i} = b\cos\theta \cdot \vec{i} \qquad (28.11)$$

Se sostituiamo il vettore $\vec{b}$ col suo componente su $\vec{a}$ o il vettore $\vec{a}$ col suo componente su $\vec{b}$ il prodotto scalare fra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non muta, cioè:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times b_a \text{vers } \vec{a} = a_b \text{vers } \vec{b} \times \vec{b} \qquad (28.12)$$

Infatti:

$$\vec{a} \times b_a \text{vers } \vec{a} = \vec{a} \times b\cos\theta \text{ vers } \vec{a} = ab\cos\theta$$

$$a_b \text{vers } \vec{b} \times \vec{b} = a\cos\theta \text{ vers } \vec{b} \times \vec{b} = ab\cos\theta$$

La (28.9) ha anche il seguente significato geometrico:

« In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente ».

Altre proprietà formali del prodotto scalare

— Proprietà associativa

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) \qquad (28.13)$$

Dimostrazione:

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = mab \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$(m\vec{a}) \times \vec{b} = mab \cdot \cos(\widehat{m\vec{a}, \vec{b}})$$

$$\vec{a} \times (m\vec{b}) = amb \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, m\vec{b}})$$

Se $m \in R^+$, allora è: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{m\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{a}, m\vec{b}})$

e la proprietà è dimostrata.

Se $m \in R^-$ allora dobbiamo fare le seguenti considerazioni.

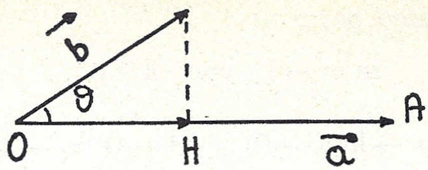


fig. (28·2)

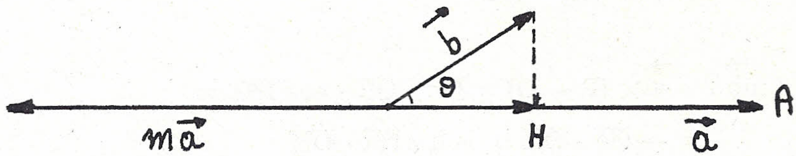


fig. (28·3)

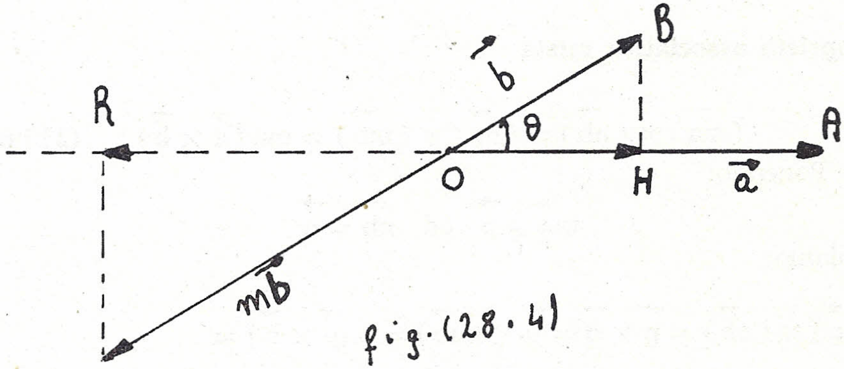


fig. (28·4)

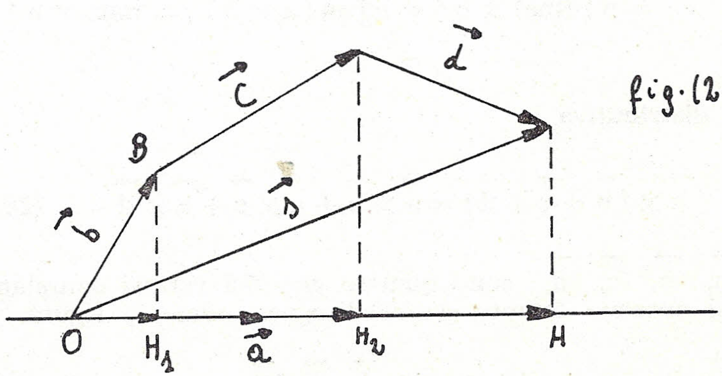


fig. (28·5)

Intanto possiamo porre

$$m = -k \quad \text{con} \quad k \in R^+.$$

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = -k\,(A - O) \times (H - O) = -k \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OH}$$

$$(m\vec{a}) \times \vec{b} = (C - O) \times (H - O) = -k(A - O) \times (H - O) =$$
$$= -k \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OH}$$

$$\vec{a} \times (m\vec{b}) = \vec{a} \times (R - O) = \overline{OA} \cdot \overline{OR} \cdot \cos 180^\circ =$$
$$= -\overline{OA} \cdot \overline{OR} = -k \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OH}$$

in quanto $\qquad ODA\,[s]\,OHB \Rightarrow \overline{OR} = k \cdot \overline{OH}$

Proprietà associativa mista

$$(m\vec{a}) \times (n\vec{b}) = (n\vec{a}) \times (m\vec{b}) = mn(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (28.14)$$

Ponendo:

$$m\vec{a} = \vec{p} \quad \text{ed} \quad n\vec{b} = \vec{q}$$

abbiamo:

$$(m\vec{a}) \times (n\vec{b}) = \vec{p} \times \vec{q} = \vec{p} \times (n\vec{b}) = n(\vec{p} \times \vec{b}) =$$
$$= n[(m\vec{a}) \times \vec{b}] = n[m(\vec{a} \times \vec{b})] = mn\vec{a} \times \vec{b}$$

Proprietà distributiva

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} \qquad (28.15)$$

Se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, sono quattro generici vettori complanari liberi, essi possono sempre essere disegnati come in figura.

Sia $\vec{s}$ la somma dei vettori $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{s} = \vec{a} \times (H - O) = a \cdot \overline{OH}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} = \vec{a} \times (H_1 - O) + \vec{a} \times (H_2 - H_1) +$$

$$+ \vec{a} \times (H - H_2) = a \cdot \overline{OH_1} + a \cdot \overline{H_1H_2} + a \cdot \overline{H_2H} =$$

$$= a\,(\overline{OH_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_1H_2} + H_2H) = a \cdot \overline{OH}$$

La proprietà è così dimostrata.

Teorema. Il prodotto scalare di somme di vettori conserva le stesse regole del prodotto di somme di numeri reali, cioè:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} \tag{28.16}$$

Infatti, posto $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ abbiamo:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{s} \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{s} \times \vec{c} + \vec{s} \times \vec{d} =$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{d} = \vec{a} \times \vec{c} +$$

$$+ \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d}$$

Inoltre si pone:

$$\vec{a} \times \vec{o} = \vec{o} \times \vec{a} = 0 \tag{28.17}$$

$$\vec{o} \times \vec{o} = 0 \tag{28.18}$$

mentre:

$$\vec{a} = \vec{o} \quad \text{opp.} \quad \vec{b} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \tag{28.19}$$

29. Espressione cartesiana del prodotto scalare.

Sia:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}; \quad \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}) =$$

$$= (a_x \cdot \vec{i}) \times (b_x \cdot \vec{i}) + (a_x \cdot \vec{i}) \times (b_y \cdot \vec{i}) + (a_y \cdot \vec{j}) \times$$

$$\times (b_x \cdot \vec{i}) + (a_y \cdot \vec{j}) \times (b_y \cdot \vec{j}) = a_x b_x + a_y b_y$$

cioè:

$$a \times b = a_x b_x + a_y b_y \tag{29.1}$$

Il prodotto scalare di due vettori è uguale alla somma dei prodotti delle componenti omonime.

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

cioè:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{29.2}$$

Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{a} \times \vec{i} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \times \vec{j} = a_x \tag{29.3}$$

$$\vec{a} \times \vec{j} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \times \vec{j} = a_y \tag{29.4}$$

I prodotti scalari di un vettore per i versori del riferimento cartesiano esprimono le componenti cartesiane ortogonali del vettore stesso.

30. Applicazioni del prodotto scalare.

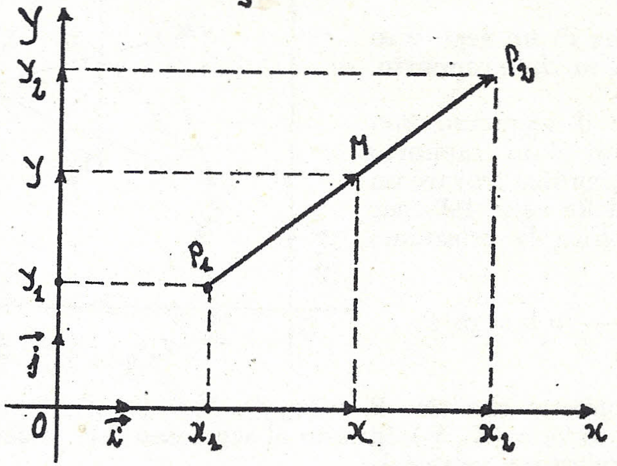
a) coordinate del punto medio di un segmento

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ gli estremi del segmento ed $M = (x, y)$ il suo punto medio. $M - P_1 = P_2 - M \Rightarrow (x - x_1) \cdot \vec{i} + (y - y_1) \cdot \vec{j} = (x_2 - x) \cdot \vec{i} + (y_2 - y) \cdot \vec{j} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - x_1 = x_2 - x \\ y - y_1 = y_2 - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \qquad (30a.1)$$

Fig. (30a.1)



b) **coordinate del baricentro di un triangolo.**

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ i vertici di un triangolo e $G = (x_0, y_0)$ il suo baricentro.

G è definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$P_1 - G = 2\,(G - M_1)$$

Dalla geometria euclidea sappiamo che $\overline{GP_1} = 2\overline{MG}$, quindi possiamo scrivere:

$$(x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} = 2\left(x_0 - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)\vec{i} +$$

$$+ 2\left(y_0 - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = 2x_0 - x_2 - x_3 \\ \\ y_1 - y_0 = 2y_0 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases} \qquad (30b.1)$$

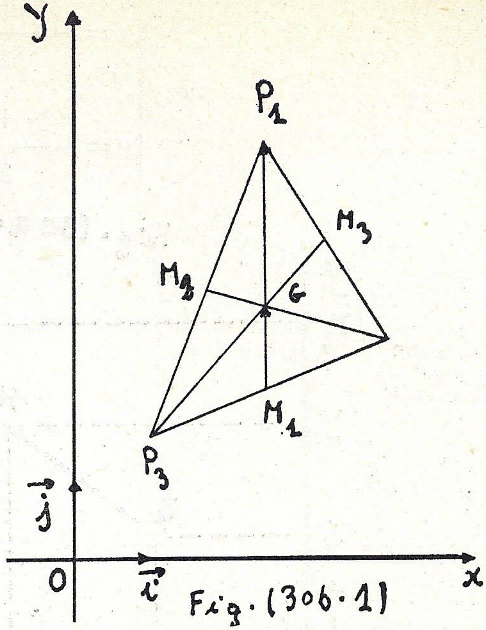


Fig. (30b.1)

c) **Divisione di un segmento secondo un dato rapporto.**

Dividere il segmento P_1P_2 secondo un dato rapporto $k = m/n$ significa trovare un punto Q della retta P_1P_2 per cui si verifica la relazione:

$$\frac{QP_1}{QP_2} = k = m/n$$

Supponiamo che sia: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $Q = (X, Y)$.

Il punto $Q_1 = (X_1, Y_1)$, interno al segmento P_1P_2, è definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$(Q_1 - P_1) = k\,(P_2 - Q_1)$$

da cui si deduce che:

$$(X_1 - x_1) \cdot \vec{i} + (Y_1 - y_1) \cdot \vec{j} = k\,(x_2 - X_1) \cdot \vec{i} + k\,(y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

$$\begin{cases} X_1 - x_1 = k\,(x_2 - X_1) \\ Y_1 - y_1 = k\,(y_2 - Y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{x_1 + kx_2}{1 + k} = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m + n} \\ Y_1 = \dfrac{y_1 + ky_2}{1 + k} = \dfrac{ny_1 + my_2}{m + n} \end{cases} \qquad (30c.1)$$

Se $k = 1$ Q è il punto medio del segmento P_1P_2 e le (30c.1) esprimono appunto le coordinate del punto medio di un segmento.

Il punto $Q_2 = (X_2, Y_2)$, esterno al segmento P_1P_2, è definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$(Q_2 - P_1) = k\,(Q_2 - P_2)$$

da cui si deduce che:

$$(X_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (Y_1 - y_1) \cdot \vec{j} = k\,(X_2 - x_2) \cdot \vec{i} + k\,(Y_2 - y_2) \cdot \vec{j}$$

$$\begin{cases} X_2 - x_1 = k\,(X_2 - x_2) \\ Y_1 - y_1 = k\,(Y_2 - y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k} = \dfrac{nx_1 - mx_2}{n - m} \\ \\ Y_2 = \dfrac{y_1 - ky_2}{1 - k} = \dfrac{ny_1 - my_2}{n - m} \end{cases} \qquad (30c.2)$$

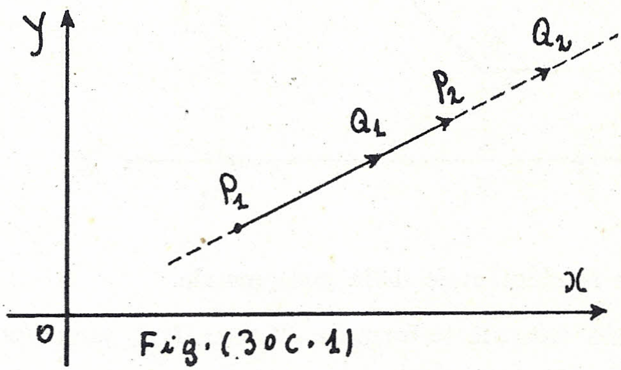


Fig. (30c.1)

d) **distanza fra due punti A e B.**

Sia $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$
Se poniamo:

$$\vec{a} = (B - A)$$

otteniamo:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

Tenendo presente la (29.2) possiamo scrivere:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (30d.1)$$

che è la relazione richiesta.

Se poi è: $A = O = (O, O)$ e $B = P = (X, Y)$ la (30d.1) diventa:

$$OP = \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad (30d.2)$$

che esprime la distanza di un generico punto del piano cartesiano dall'origine degli assi di riferimento.

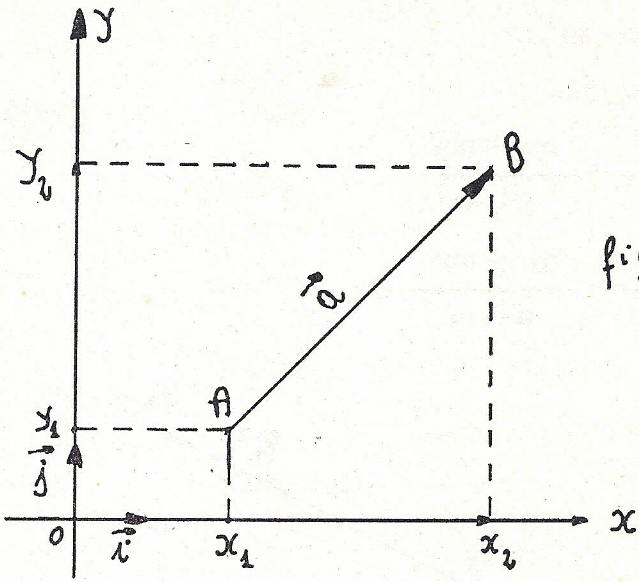


fig. (30d.1)

e) **formula fondamentale della goniometria.**

Tenendo presente le formule (25.9) e (29.2) possiamo scrivere:

$$\vec{e}^2 = e^2 = 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

cioè

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (30e.1)$$

La (30e.1) è detta formula fondamentale della goniometria.

f) **archi ed angoli associati.**

Consideriamo i versori $\vec{i}$, $\vec{e}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$, $-\vec{e}$. A meno di multipli di 360° risultano completamente individuati i seguenti angoli (archi):

$(\vec{i}, \vec{e}) = \alpha$, $(\vec{e}, \vec{i}) = -\alpha$, $(\vec{e}, \vec{j}) = 90° - \alpha$, $(\vec{e}, -\vec{i}) = 180° - \alpha$, $(\vec{i}, -\vec{e}) = 180° + \alpha$, $(\vec{j}, -\vec{e}) = 90° + \alpha$.

Definiamo associati dell'angolo(o dell'arco) α i seguenti angoli (o archi):

$$90^\circ \pm \alpha, \quad 180^\circ \pm \alpha, \quad 360^\circ - \alpha = -\alpha$$

Sapendo che:

$\vec{e} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$

$\vec{e} \times \vec{i} = \cos\alpha =$ componente di $\vec{e}$ su x

$\vec{e} \times \vec{j} = \sin\alpha =$ componente di $\vec{e}$ su y

e tenendo presente le (28.1), (28.2), (28.7), (28.8) abbiamo:

$\vec{e} \times \vec{i} = \cos(-\alpha) =$ componente di $\vec{e}$ su $\vec{i} = \cos\alpha$

$\vec{e} \times \vec{j} = \cos(90^\circ - \alpha) =$ componente di $\vec{e}$ su $\vec{j} = \sin\alpha$

$\vec{e} \times (-\vec{i}) = \cos(180^\circ - \alpha) = -(\vec{e}) \times (\vec{i}) =$

$\quad = -$ componente di $\vec{e}$ su $\vec{i} = -\cos\alpha$

$\vec{i} \times (-\vec{e}) = \cos(180^\circ + \alpha) = -(\vec{i}) \times (\vec{e}) =$

$\quad = -(\vec{e}) \times (\vec{i}) = -\cos\alpha$

$\vec{j} \times (-\vec{e}) = \cos(90^\circ + \alpha) = -(\vec{j}) \times (\vec{e}) =$

$\quad = -(\vec{e}) \times (\vec{j}) = -\sin\alpha$

Quindi si hanno le seguenti formule:

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \vec{a} \times \vec{i} = \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \vec{a} \times \vec{j} = \sin\alpha \\ \cos(90^\circ + \alpha) = -\vec{a} \times \vec{j} = -\sin\alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\vec{a} \times \vec{i} = -\cos\alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) = -\vec{a} \times \vec{i} = -\cos\alpha \end{cases} \qquad (30f.1)$$

Tenendo presente che il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare, si ottengono le seguenti formule:

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos[90^\circ - (90^\circ - \alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ - (90^\circ + \alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) = \cos[90^\circ - (180^\circ - \alpha)]) = \\ \qquad = \cos[-(90^\circ - \alpha)] = \sin\alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ - (180^\circ + \alpha)] = \\ \qquad = \cos[-(90^\circ + \alpha)] = -\sin\alpha \end{cases} \tag{30f.2}$$

Dalle precedenti formule si deducono facilmente le seguenti:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \end{cases} \tag{30f.3}$$

$$\begin{cases} \operatorname{cotg}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha \end{cases} \tag{30f.4}$$

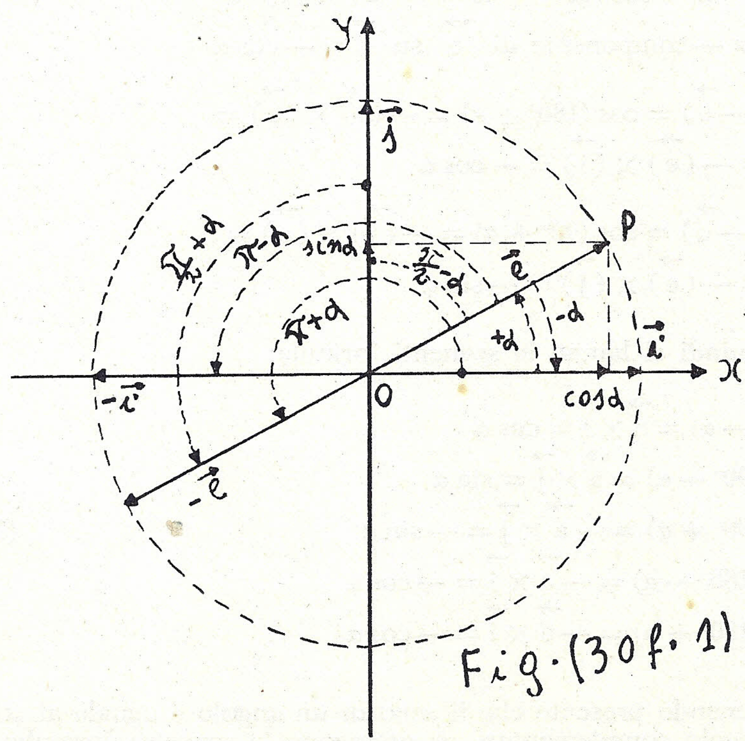


Fig. (30f. 1)

g) **distanza di un punto da una retta.**

Consideriamo la retta r di equazione $ax + by + c = 0$ ed il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenente al piano xOy.

Sia $d = \overline{P_0H}$ la distanza del punto P_0 dalla retta r con $H = (x_1, y_1)$. Se P è un generico punto della retta r, allora valgono le seguenti relazioni:

$$P \in r \Rightarrow ax + by + c = 0 \qquad (30g.1)$$

$$H \in r \Rightarrow ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad (30g.2)$$

cioè:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \qquad (30g.3)$$

Il vettore $N - O = a\vec{i} + b\vec{j}$ è normale alla retta r.

Infatti, considerando il vettore

$$P - H = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$$

e tenendo presente la (30g.3), possiamo scrivere:

$$(N - O) \times (P - H) = a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

cioè $\overrightarrow{ON} \perp r$ per cui risulta: $\overrightarrow{ON} \,||\, \overrightarrow{HP_0}$.

$$(P_0 - H) \times (N - O) = \overline{HP_0} \cdot \overline{ON} \cdot (\pm 1) = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)$$

(+ 1 se $P_0 - H$ ed $N - O$ hanno lo stesso verso, — 1 se hanno versi opposti, in quanto, nel primo caso i suddetti vettori formano un angolo di 0°, nel secondo caso un angolo di 180°).

Per la (30g.2) è: $c = -(ax_1 + by_1)$ ed essendo $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$ abbiamo:

$$d = \overline{HP_0} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (30g.4)$$

Il doppio segno dipende dall'orientamento dei vettori $N - O$ ed $H - P_0$ ed esprime il fatto geometrico che esistono due punti del piano, simmetrici rispetto ad r, che hanno la stessa distanza dalla retta r.

Se si considerano distanze senza segno, allora la (30g.4) va scritta così:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{30g.5}$$

In taluni casi è conveniente scrivere la (30g.4) nella forma equivalente:

$$\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm d \tag{30g.6}$$

Se è $P_0 = O$ abbiamo:

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{30g.7}$$

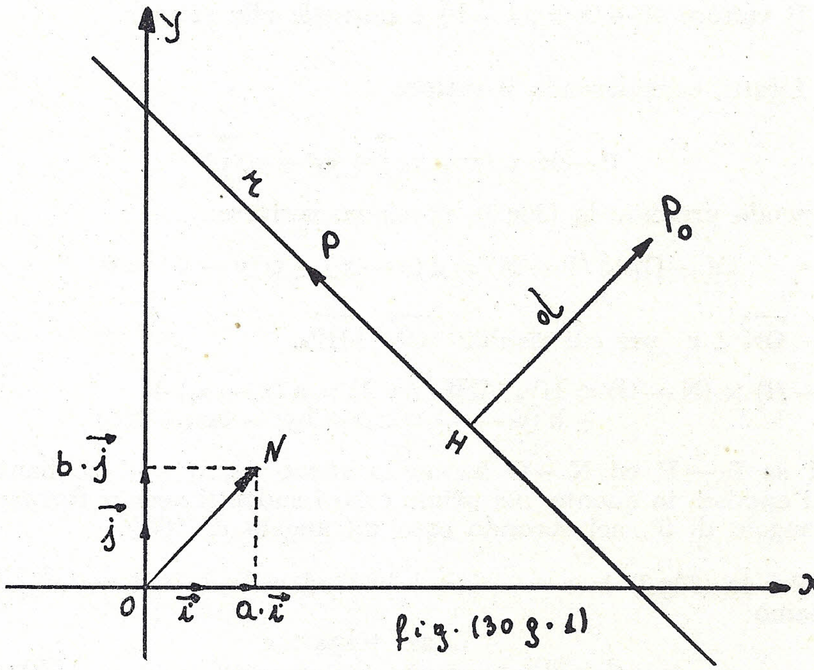


fig. (30 g. 1)

h) **angolo di due vettori espresso mediante le componenti.**

Sia θ l'angolo formato dai vettori $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$. Tenendo presente le (28.1), (29.1), (29.2) possiamo scrivere:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \tag{30h.1}$$

Se dall'origine degli assi cartesiani traccio i vettori equipollenti ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cioè $P - O = \vec{a}$, $P_1 - O = \vec{b}$ e se $P = (x, y)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, dovendosi avere

$$P - O = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}, \quad P_1 - O = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$$

allora la (30h.1) diventa:

$$\cos\theta = \frac{xx_1 + yy_1}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \tag{30h.2}$$

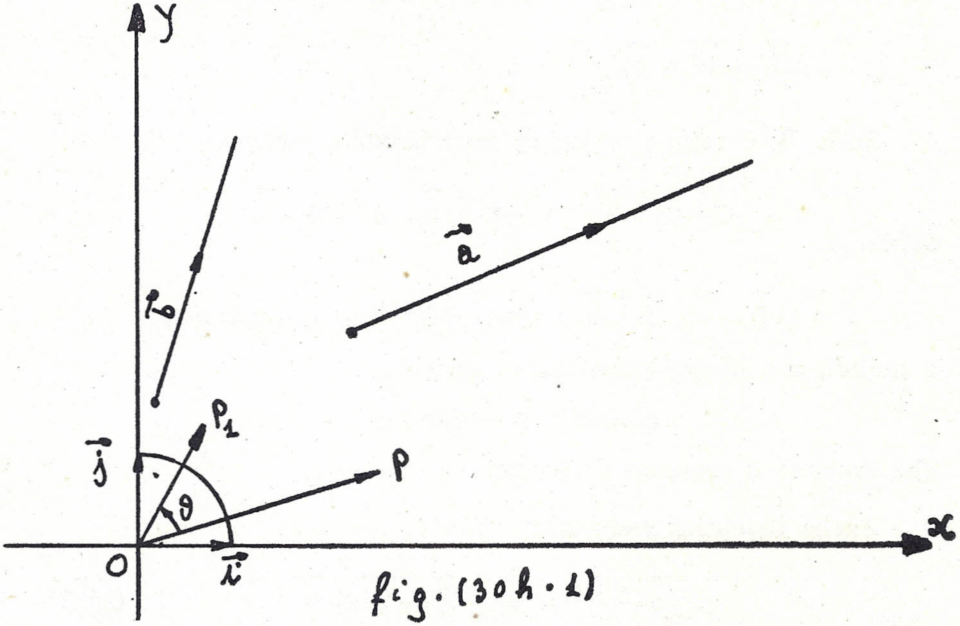


fig. (30h.1)

i) **identità vettoriali e loro interpretazione geometrica.**

L'uguaglianza fra due espressioni vettoriali dicesi **identità vettoriale** se è verificata da tutti i vettori, dicesi **equazione vettoriale** se è verificata da un numero finito di vettori ciascuno dei quali dicesi soluzione dell'equazione vettoriale.

Una identità vettoriale si considera verificata quando primo e secondo membro assumono la stessa forma.

Per fare ciò si può operare sul primo membro o sul secondo o su entrambi. Se interpretiamo i vettori come lati di un poligono o di un poliedro in generale l'identità vettoriale esprime una proprietà geometrica del poligono o del poliedro.

L'identità vettoriale

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \times \vec{b} \qquad (36i.1)$$

esprime, in termini vettoriali, il **teorema di Carnot**.

Essa si verifica facilmente tenendo presente che $\vec{v}^2 = \vec{v} \times \vec{v}$.

Infatti:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b}^2 =$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \times \vec{b}$$

Se A, B, C sono i vertici di un triangolo, ponendo

$$C - B = \vec{a}, \quad A - C = \vec{b}, \quad A - B = \vec{c}$$

abbiamo:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = ab\cos(180^\circ - \gamma) = -ab\cos\gamma$$

e quindi, per la (36i.1) possiamo scrivere

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

che esprime il teorema di Carnot.

Anche l'identità vettoriale

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \times \vec{b} \qquad (36i.2)$$

esprime il **teorema di Carnot**.

La verifica è immediata in quanto:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b}^2 =$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \times \vec{b}$$

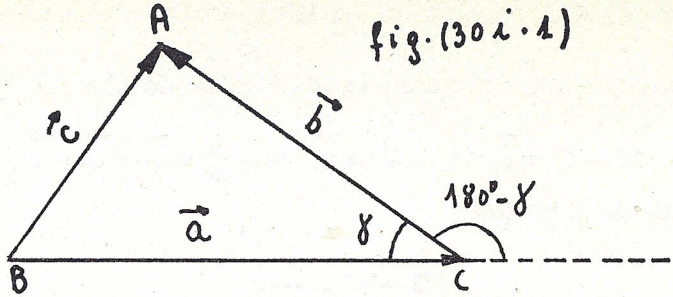


fig.(30i.1)

Orientando i lati del triangolo ABC in modo che sia:

$$B - A = \vec{c}, \quad A - C = \vec{b}, \quad B - A = \vec{c}$$

e tenendo presente che $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ cioè $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ e che $\vec{a} \times \vec{b} = ab \cdot \cos\gamma$ la (36i.2) diventa:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

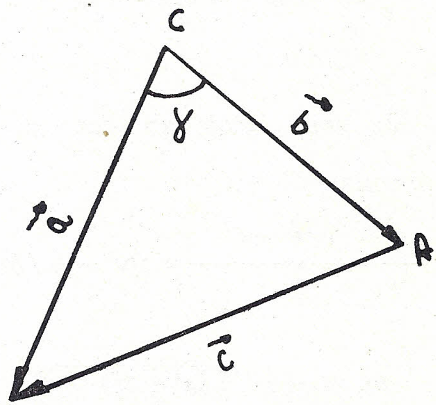


fig.(30i.2)

L'identità vettoriale

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \qquad (36i.3)$$

esprime, in termini vettoriali, la relazione che intercorre fra una mediana di un triangolo ed i suoi tre lati. La sua verifica è piuttosto immediata. Infatti:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Orientati i lati del triangolo ACM in modo che sia

$$M - C = \vec{u}, \quad A - M = \vec{v}, \quad A - C = \vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$$

ci costruiamo il vettore

$$B - M = -\vec{v}.$$

È evidente che $\overline{MC} = m_c = u$ rappresenta la misura della mediana del triangolo ABC relativa al lato AB. Tenendo presente che:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}| \cdot |\vec{u} - \vec{v}| \cos \gamma = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma =$$
$$= ab \cdot \cos \gamma$$

e che $c = 2v$, l'identità (36i.3) diventa:

$$ab \cdot \cos \gamma = m^2_c - (^c/_2)^2 \tag{36i.4}$$

Sapendo che:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad \text{cioè} \quad ab \cdot \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

l'identità (36i.4) diventa:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = m_c^2 - (c/_2)^2$$

e quindi:

$$m_c = - \tfrac{1}{2} \sqrt{2\,(a^2 + b^2) - c^2}$$

Se poi i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno lo stesso modulo allora l'identità (36i.3) si semplifica ed assume la forma:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \tag{36i.5}$$

Questa identità esprime il fatto geometrico che in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è metà ipotenusa. Infatti:

$$(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=0\Rightarrow\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v})\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$$

e quindi:

$$m_c = {}^{c}/_{2}$$

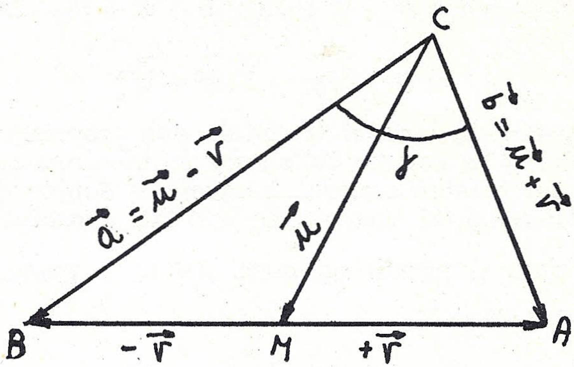


fig. (30i.3)

L'identità (36i.5) esprime anche il fatto elementare che le diagonali di un rombo sono fra loro perpendicolari.

Infatti, se PQRS è un rombo avente come lati concorrenti i vettori $\vec{u}=Q-P$ e $\vec{v}=S-P$ aventi lo stesso modulo, allora le diagonali sono $R-P=\vec{u}+\vec{v}$, $Q-S=\vec{u}-\vec{v}$ e per quanto precedentemente detto risultano perpendicolari.

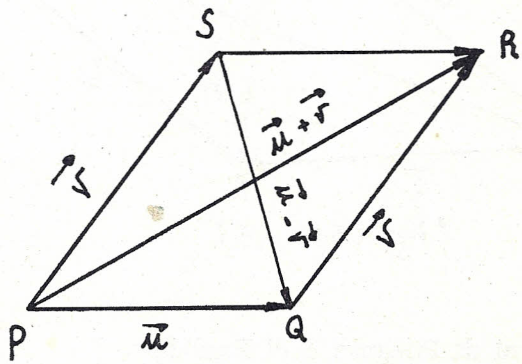


fig. (30i.4)

Consideriamo l'identità vettoriale

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) \tag{36i.6}$$

La sua verifica si ottiene operando sul primo membro. Infatti:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \times \vec{b} =$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$$

Essa esprime, in termini vettoriali, una proprietà dei parallelogrammi, cioè: « La somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale al doppio della somma delle aree dei quadrati costruiti su due lati consecutivi ».

Infatti, dato il parallelogramma ABCD, e posto $A - D = \vec{a}$, $C - D = \vec{b}$ si deduce che

$$A - C = \vec{a} - \vec{b}, \quad B - D = \vec{a} + \vec{b}$$

per cui la (36i.6) diventa:

$$\overline{DB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2)$$

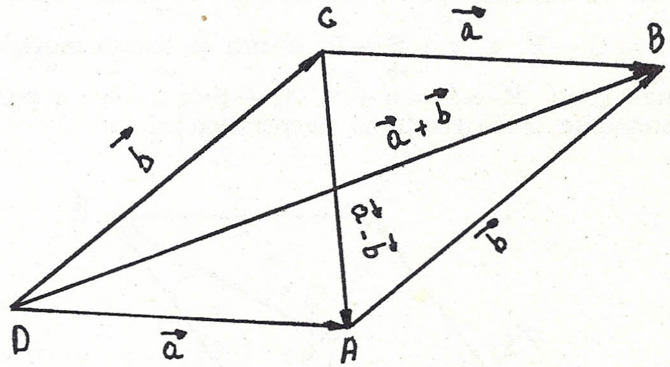


fig. (36i.5)

1) Teoremi di Pitagora e di Euclide

Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con AH altezza relativa all'ipotenusa. Orientiamo i lati del triangolo in modo che risulti:

$$B - A = \vec{c}, \quad A - C = \vec{b}, \quad B - C = \vec{a},$$

$$H - C = \vec{m}, \quad A - H = \vec{h}, \quad B - H = \vec{n}$$

Tenendo presente che

$$\vec{b} \times \vec{c} = 0, \quad \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

possiamo scrivere:

$$(\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b} \times \vec{c}$$

cioè:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

che esprime il teorema di Pitagora.

Moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'identità vettoriale $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ per il vettore $\vec{b}\,(\vec{c})$ otteniamo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} \qquad [\,\vec{a} \times \vec{c} = (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c}\,]$$

$$ab \cdot \cos\gamma = \vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} \qquad [\,ac \cdot \cos\beta = \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{c}\,]$$

$$am = b^2 \qquad (an = c^2)$$

$$a : b = b : m \qquad (a : c = c : n)$$

che esprime il primo teorema di Euclide.

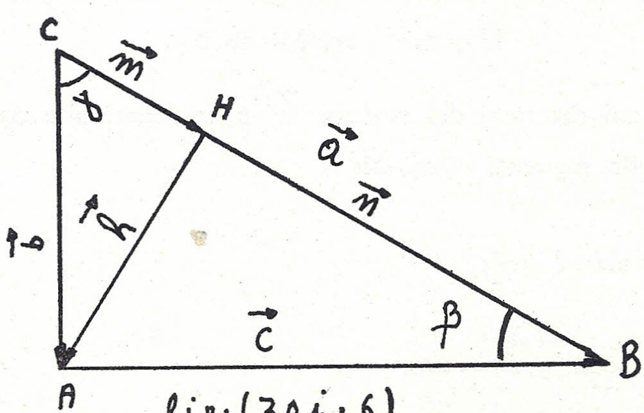


fig. (30 i . 6)

$$\{ \vec{b} = \vec{m} + \vec{h}, \ \vec{c} = \vec{n} - \vec{h} \} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{m} + \vec{h}) \times (\vec{n} - \vec{h}) = 0$$

cioè

$$\vec{m} \times \vec{n} - \vec{m} \times \vec{h} + \vec{n} \times \vec{h} - \vec{h}^2 = 0$$

$$mn - h^2 = 0 \qquad mn = h^2 \qquad m : h = h : n$$

che esprime il secondo teorema di Euclide.

m) **coseni direttori di un vettore.**

Sia $\vec{a} = B - A$ un qualsiasi vettore libero riferito al sistema ortonormale di assi cartesiani xOy.

Si chiamano **coseni direttori** del vettore $\vec{a}$ i coseni degli angoli orientati che gli assi cartesiani formano con la retta $\vec{r}$ avente la stessa direzione e lo stesso orientamento di $\vec{a}$, cioè:

$$\begin{cases} l_0 = \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{r}}) = \cos\theta \\ m_0 = \cos(\widehat{\vec{y}, \vec{r}}) = \cos(90° - \theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad (30n.1)$$

I coseni direttori di un vettore non sono fra loro indipendenti in quanto debbono soddisfare la seguente identità goniometrica:

$$l_0^2 + m_0^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (30n.2)$$

I coseni direttori del vettore $\vec{a}$ sono legati alle componenti di $\vec{a}$ dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_x = a\cos\theta = al_0 \\ a_y = a\cos(\widehat{\vec{y}, \vec{r}}) = am_0 \end{cases} \qquad (30n.3)$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = al_0 \cdot \vec{i} + am_0 \cdot \vec{j} \qquad (30n.4)$$

$$\vec{e} = \text{vers}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}}{a} = \frac{a_x}{a}\vec{i} + \frac{a_y}{a}\vec{j} =$$

$$= l_0 \cdot \vec{i} + m_0\vec{j} \qquad (30n.5)$$

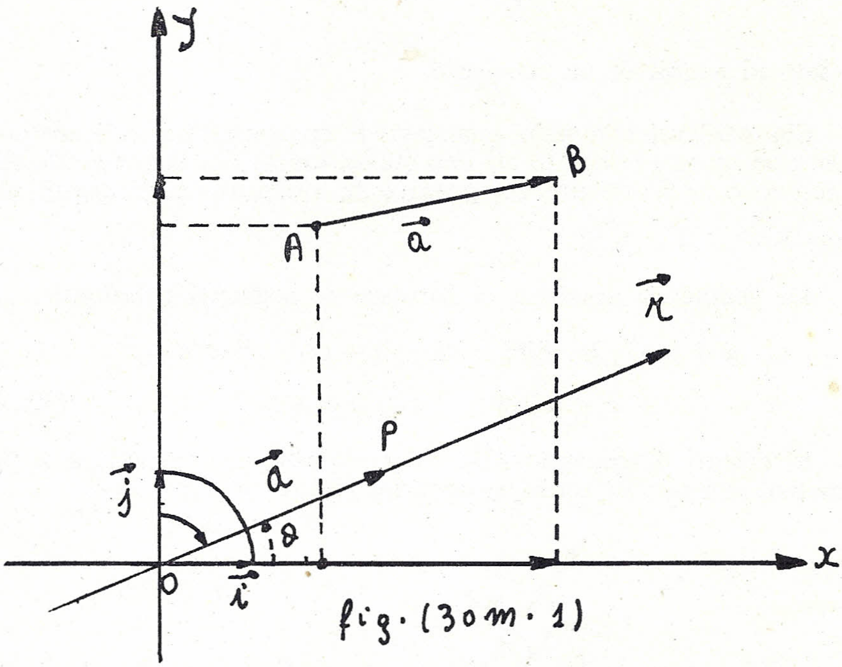


fig. (30m. 1)

Esercizio n. 1.

Dato il vettore $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ determinare il suo versore

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \qquad \vec{e} = \text{vers}\,\vec{a} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

Esercizio n. 2.

Determinare i coseni direttori ed il versore del vettore $P_2 - P_1$ sapendo che $P_1 = (-2, 1)$ e $P_2 = (-1, -1)$.

$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} = i - 2j$$

$$|P_2 - P_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$$

$$l_0 = a_x/a = {}^1/_5 \qquad m_0 = a_y/a = -{}^2/_5$$

n) **lati ed angoli di un triangolo.**

Sia ABC un triangolo qualsiasi. È consuetudine indicare con a, b, c le misure (rispetto ad una stessa unità) dei lati BC, CA, AB e con α, β, γ le misure (in gradi o in radianti) degli angoli, interni $B\widehat{A}C$, $C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}B$.

La geometria euclidea ci fornisce le seguenti relazioni:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°; \qquad a < b + c; \qquad b < a + c;$$
$$c < a + b; \qquad a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta \tag{30n.1}$$

Si orienti il triangolo ABC in modo che, percorrendone il perimetro, si ruoti in senso antiorario, cioè si ponga:

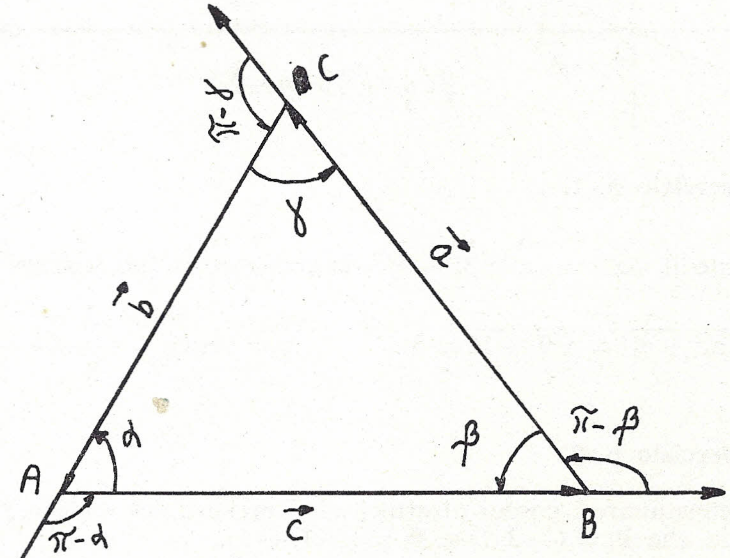


fig. (30n.1)

$$C - B = \vec{a}; \qquad A - C = \vec{b}; \qquad B - A = \vec{c} \tag{30n.2}$$

Orientato così il triangolo risulta sempre:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \tag{30n.3}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 180° - \gamma; \qquad (\vec{b}, \vec{c}) = 180° - \alpha$$

$$(\vec{c}, \vec{a}) = 180° - \beta \tag{30n.4}$$

o) **teorema dei seni.**

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{h} = -\vec{c} \times \vec{h}$$

$$\vec{a} \times \vec{h} + \vec{b} \times \vec{h} = -\vec{c} \times \vec{h}$$

$$ahcos(\vec{a}, \vec{h}) + bh \cdot \cos(\vec{b}, \vec{h}) = -ch \cdot \cos(\vec{c}, \vec{h})$$

$$bh \cdot \cos(180° - \alpha_2) = -ch \cdot \cos \alpha_1; \quad \cos(\vec{a}, \vec{h}) = \cos 90° = 0$$

$$-bh \cdot \cos \alpha_2 = -ch \cdot \cos \alpha_1; \qquad b \cdot \cos \alpha_2 = -c \cdot \cos \alpha_1;$$

1° caso: triangolo acutangolo:

$\alpha_1 = 90° - \beta; \qquad \alpha_2 = 90° - \gamma$

$b \cdot \cos(90° - \gamma) = c \cdot \cos(90° - \beta); \qquad b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$

cioè:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \tag{30o.1}$$

2° caso: triangolo ottusangolo:

$\alpha_1 = 90° - \beta; \qquad \alpha_2 = \gamma - 90°$

$b \cdot \cos(\gamma - 90°) = c \cdot \cos(90° - \beta)$ cioè: $b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$

In maniera del tutto analoga si dimostra che:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \tag{30o.2}$$

per cui risultano valide le seguenti relazioni, che esprimono il **teorema dei seni**:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{30o.3}$$

cioè: « in un qualsiasi triangolo si mantiene costante il rapporto tra ciascun lato ed il seno dell'angolo opposto ».

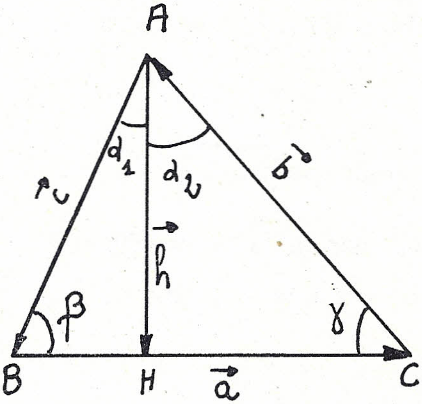


fig. (30.0.1)

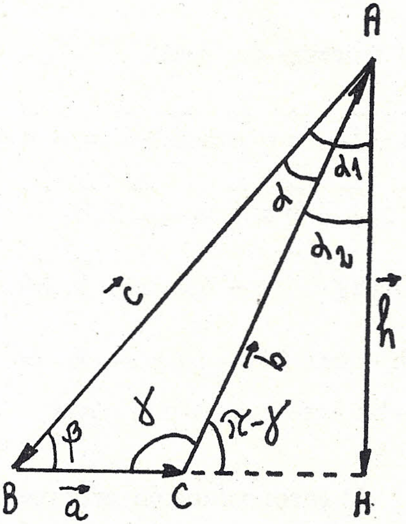


fig. (30.0.2)

p) **teorema delle proiezioni.**

In un triangolo qualsiasi la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti delle misure degli altri due lati per il coseno dell'angolo che esso forma col primo, cioè:

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta, \qquad b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha, \qquad c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha \tag{30p.1}$$

Se moltiplichiamo scalarmente ambo i membri dell'identità vettoriale $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$ per il vettore $\vec{a}$ otteniamo:

$$\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c},$$

$$a^2 = -ab \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) - ac \cdot \cos(\vec{a}, \vec{c})$$

$$a = -b \cdot \cos(180° - \gamma) - c \cdot \cos(180° - \beta) =$$

$$= b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

Similmente si dimostrano le altre due formule.

q) **Equazione della tangente alla circonferenza in un suo punto.**

$$(P - P_0) \times (P_0 - C) = 0 \Rightarrow (x - x_0)(x_0 - \alpha) +$$
$$+ (y - y_0)(y_0 - \beta) = 0$$

Sviluppando si ottiene:

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y - x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = 0$$

$$P_0 \in \sigma \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + c = 0;$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 2\alpha x_0 + 2\beta y_0 - c$$

$$x_0x + y_0y - \alpha x - 2\beta y - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + c + \alpha x_0 + \beta y_0 = 0$$

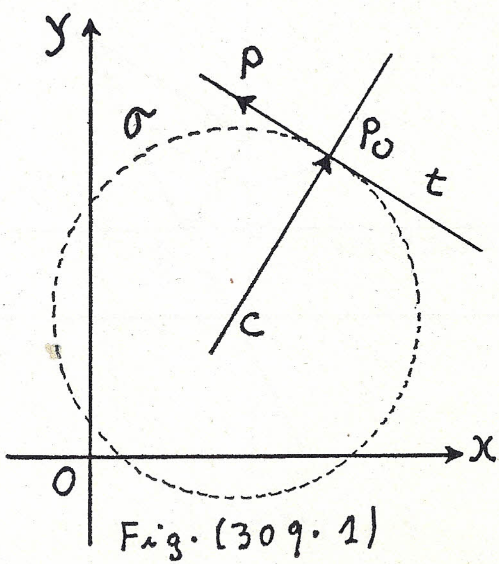


Fig. (309. 1)

e quindi:

$$x_0x + y_0y - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) + c = 0 \qquad (30q.1)$$

La (30q.1) rappresenta l'equazione della tangente a σ in P_0 che si può ottenere anche applicando la cosidetta Regola degli Sdoppiamenti secondo cui:

$$x^2 \rightarrow x_0x, \quad y^2 \rightarrow y_0y, \quad 2x \rightarrow x + x_0, \quad 2y \rightarrow y + y \qquad (30q.2)$$

r) **una proprietà della parabola.**

« Il segmento di tangente ad una parabola i cui estremi sono il punto di tangenza e l'intersezione con la direttrice è visto dal fuoco secondo un angolo retto ».

Per semplificare i calcoli ci riferiamo ad una parabola avente equazione $y = ax^2$, il cui fuoco ha coordinate $(0, {}^p/_2)$ e la cui direttrice ha equazione $y = - {}^p/_2$.

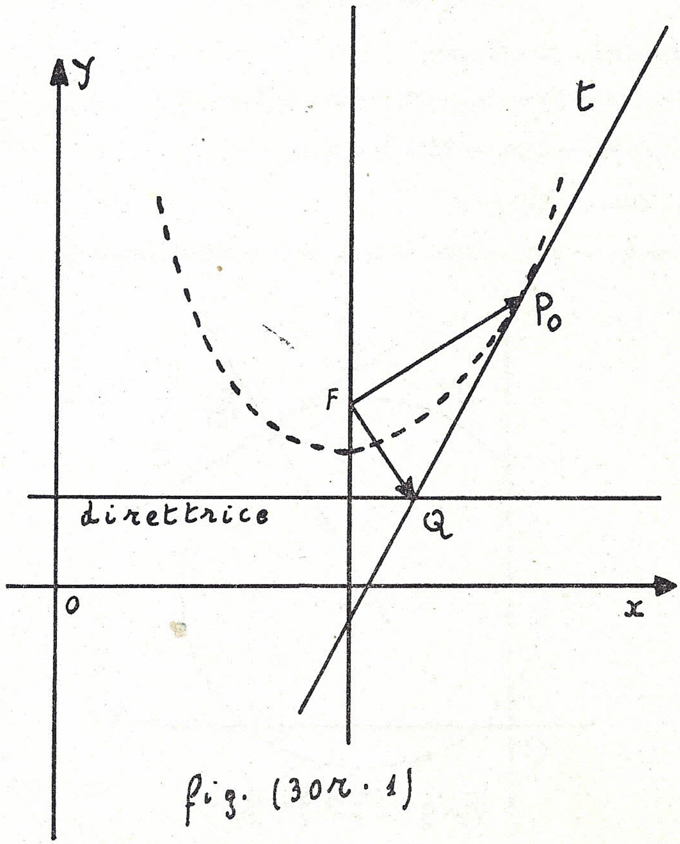


fig. (30r.1)

La retta tangente alla parabola nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ha equazione $x_0 x = p\,(y + y_0)$

$$x_Q = \frac{p}{x_0}\left(y_0 - \frac{p}{2}\right), \qquad y_Q = -{}^{p}/_{2}$$

sono le coordinate del punto comune alla tangente t ed alla direttrice.

Esse si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -{}^{p}/_{2} \\ x_0 x = p\,(y + y_0) \end{cases}$$

$$P_0 - F = x_0 \cdot \vec{i} + \left(y_0 - \frac{p}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

$$Q - F = \frac{p}{x_0}\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) \cdot \vec{i} - p \cdot \vec{j}$$

$$(Q - F) \times (P_0 - F) = x_0 \cdot \frac{p}{x_0}\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) + -p\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) = 0$$

Quindi:

$$\widehat{QFP_0} = 90^\circ$$

31. Formule di prostaferesi.

Assieme ad un sistema ortonormale di assi cartesiani xOy di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ consideriamo i versori $\vec{e}$ ed $\vec{u}$.

Se:

$$(\vec{i}, \vec{e}) = \beta, \qquad (\vec{i}, \vec{u}) = \alpha, \qquad BH = HC$$

allora:

$$\vec{e} = \cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j}, \qquad \vec{u} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

$(\vec{e}, \vec{u}) = \alpha - \beta$, OBDC è un rombo, $(\vec{e}, \vec{h}) = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$$(\vec{i}, \vec{h}) = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$h = 1 \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\vec{h} = h_x \cdot \vec{i} + h_y \cdot \vec{j} = \left(h \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \vec{i} + \left(h \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \vec{j} =$$

$$= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \vec{i} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \vec{j}$$

E quindi dalla identità vettoriale

$$\vec{e} + \vec{u} = D - O = 2\vec{h}$$

ricaviamo:

$$\cos \beta \cdot \vec{i} + \sin \beta \cdot \vec{j} + \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= 2\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \vec{i} + 2\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \vec{j}$$

cioè:

$$(\cos \alpha + \cos \beta) \cdot \vec{i} + (\sin \alpha + \sin \beta) \cdot \vec{j} =$$

$$\left(2\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \vec{i} + \left(2\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \vec{j}$$

$$\mathbf{\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \tag{31.1}$$

$$\mathbf{\sin \alpha + \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \tag{31.2}$$

Se poi consideriamo il vettore $\vec{g}$ definito dall'identità vettoriale $\vec{u} - \vec{e} = \vec{g}$ abbiamo:

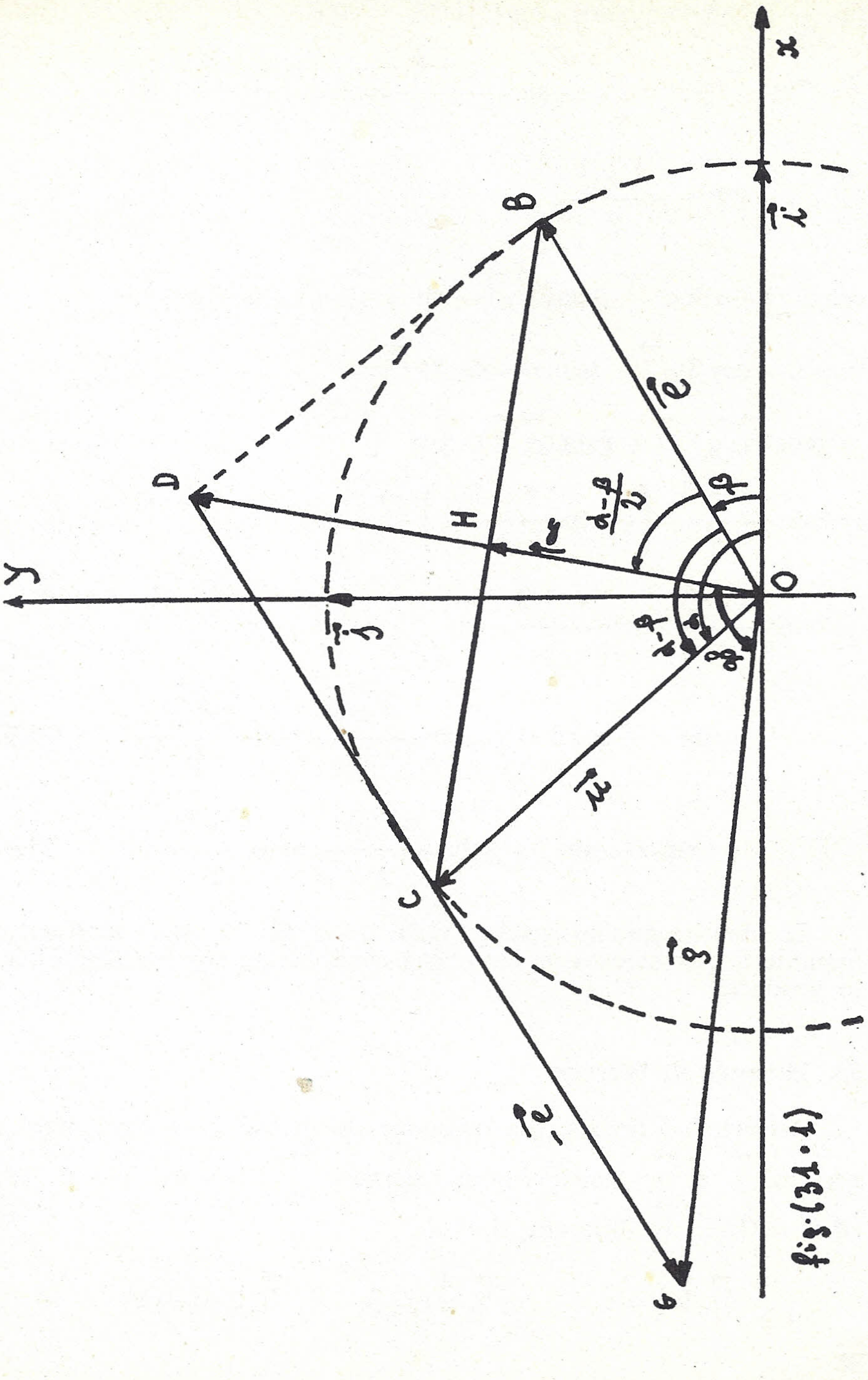


fig.(31.1)

$(\vec{h}, \vec{g}) = 90°$ in quanto $BC \parallel OG, \quad OH \perp BC$

$$g = \overline{BC} = 2\overline{BH} = 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$(\vec{i}, \vec{g}) = 90° + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j} - \cos\beta \cdot \vec{i} - \sin\beta \cdot \vec{j} = g_x \cdot \vec{i} + g_y \cdot \vec{j};$$

$$(\cos\alpha - \cos\beta) \cdot \vec{i} + (\sin\alpha - \sin\beta) \cdot \vec{j} =$$

$$= g\cos(\vec{i}, \vec{g}) \cdot \vec{i} + g\sin(\vec{i}, \vec{g}) \cdot \vec{j} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \vec{i} +$$

$$+ 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \vec{j}$$

$$\mathbf{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}} \qquad (31.3)$$

$$\mathbf{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}} \qquad (31.4)$$

Le identità goniometriche (31.1), (31.2), (31.3), (31.4) sono dette formule di prostaferesi e servono a trasformare somme algebriche in prodotti.

32. Formule di Werner.

Assieme ad un sistema ortonormale di assi cartesiani xOy di versori $\vec{j}$ e $\vec{j}$ consideriamo i versori $\vec{e} = B - O$, $\vec{u} = C - O$ ed il vettore $\vec{h}$ tale che sia:

$$(\vec{i}, \vec{h}) = \alpha, \qquad (\vec{h}, \vec{u}) = \beta, \qquad \vec{h} \perp (C - B)$$

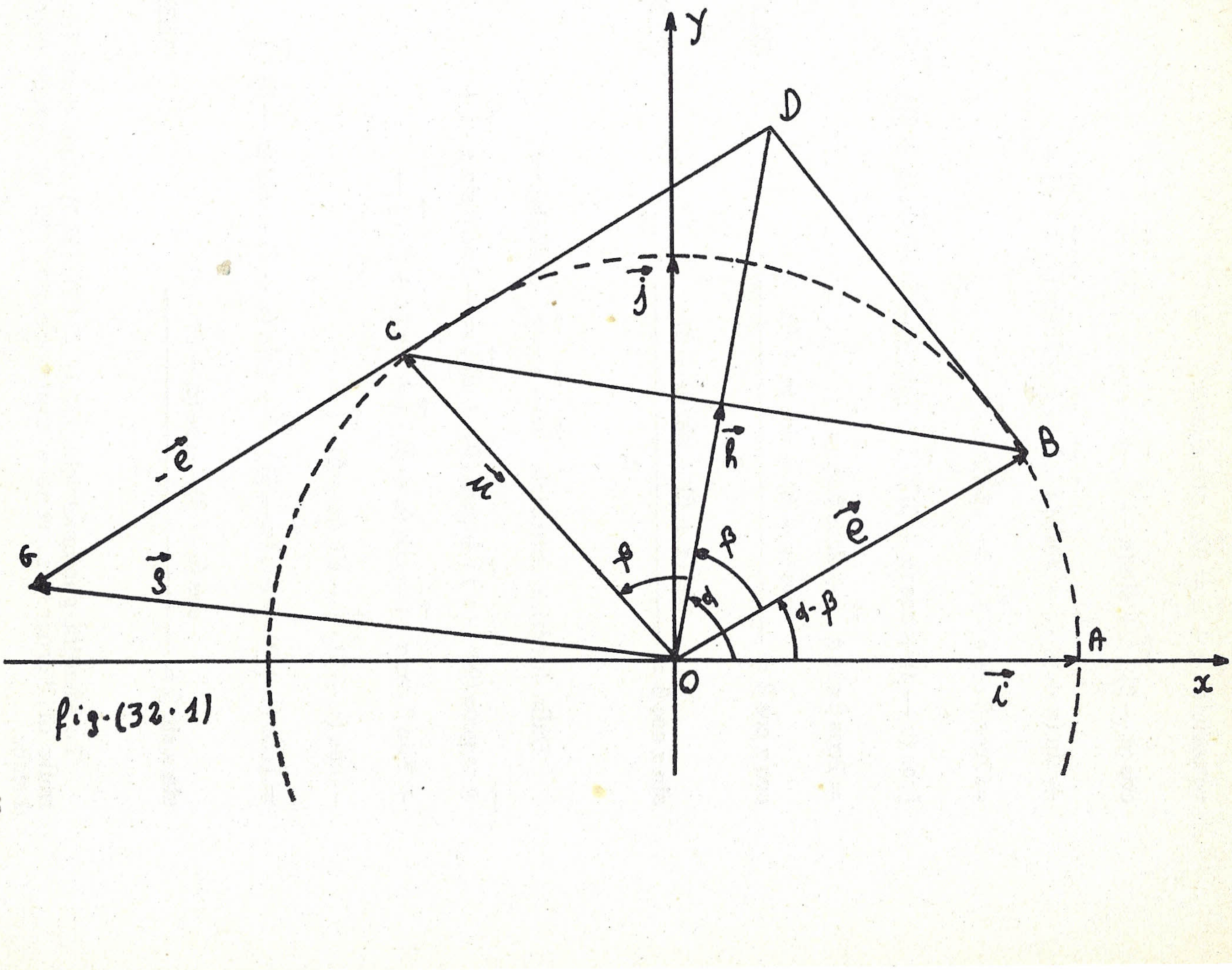

y
D
C
$\vec{j}$
$\vec{h}$
B
$-\vec{e}$
$\vec{u}$
$\vec{e}$
G
$\vec{g}$
β
β
α
α-β
A
O
$\vec{i}$
x

fig.(32.1)

Se esprimiamo in componenti cartesiane i vettori dell'identità vettoriale $\vec{e} + \vec{u} = 2\vec{h}$ otteniamo:

$$\cos(\alpha - \beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha - \beta) \cdot \vec{j} + \cos(\alpha + \beta)\,\vec{i} +$$

$$+ \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{j} = 2h\cos(\vec{i}, \vec{h}) \cdot \vec{i} + 2h\sin(\vec{i}, \vec{h}) \cdot \vec{j} =$$

$$= 2\cos\beta\cos\alpha \cdot \vec{i} + 2\cos\beta\sin\alpha \cdot \vec{j}$$

$$[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \cdot \vec{i} + [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \cdot \vec{j} =$$

$$= 2\cos\beta\cos\alpha \cdot \vec{i} + 2\cos\beta\sin\alpha \cdot \vec{j}$$

$$\mathbf{\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}} \qquad (32.1)$$

$$\mathbf{\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}} \qquad (32.2)$$

Dalla identità vettoriale $\vec{u} - \vec{e} = \vec{g}$ deduciamo:

$$\vec{g} = g\cos(90° + \alpha)\,\vec{i} + g\sin(90° + \alpha)\,\vec{j} = -2\sin\beta\sin\alpha \cdot \vec{i} +$$

$$+ 2\sin\beta\cos\alpha \cdot \vec{j} = \cos(\alpha + \beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{j} -$$

$$- \cos(\alpha - \beta) \cdot \vec{i} - \sin(\alpha - \beta) \cdot \vec{j} =$$

$$= [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \cdot \vec{i} + [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cdot \vec{j}$$

$$\mathbf{\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}} \qquad (32.3)$$

Le identità goniometriche (32.1), (32.2), (32.3) sono dette formule di Werner e servono a tramutare prodotti in somme algebriche.

33. Prodotto vettoriale (o esterno) di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

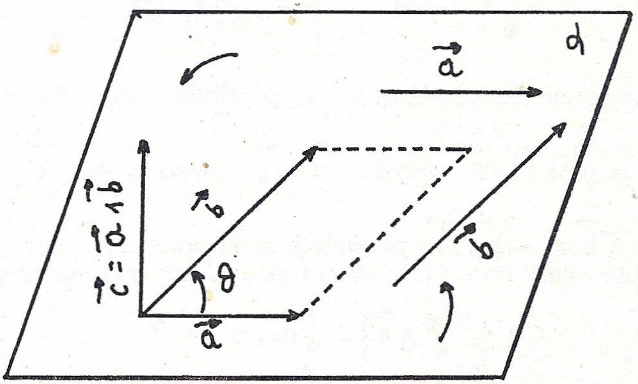
Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due qualsiasi vettori liberi complanari e sia θ l'angolo convesso da essi formato, cioè:

$$\theta = (\vec{a}, \vec{b})$$

Definiamo **prodotto vettoriale** (o prodotto esterno) dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ un terzo vettore $\vec{c}$ univocamente e completamente determinato dalle seguenti condizioni:

1) **modulo**: $c = ab\sin\theta$ = area del parallelogrammo individuato dai due vettori applicati in uno stesso punto O (arbitrariamente scelto sul piano α individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$)

fig. (33.1)



2) **direzione**: la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano α, cioè $\vec{c} \perp \alpha$

3) **verso**: se poniamo un ipotetico osservatore sul piano α coi piedi in O in modo che per esso risulti essere antioraria la rotazione che conduce il vettore $\vec{a}$ sul vettore $\vec{b}$ attraverso l'angolo convesso θ, allora il verso di $\vec{c}$ coincide con quello che va dai piedi al capo dell'osservatore.

Il prodotto vettoriale si indica col simbolo

$$\vec{a} \wedge \vec{b}$$

e si legge « **a** vettore **b** » o « **a** esterno **b** » o « **a** vettoriale **b** ».

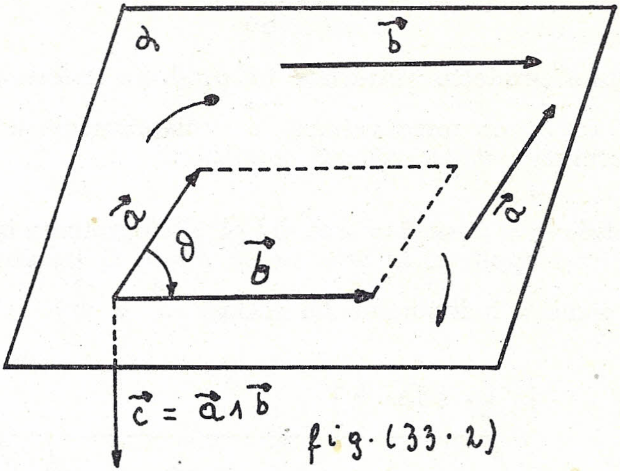


fig. (33 · 2)

Le proprietà fondamentali del prodotto vettoriale sono:

1. $\vec{c} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{a} \,||\, \vec{b}$ oppure $\vec{a} = \vec{o}$ oppure $\vec{b} = \vec{o}$

2. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ **proprietà alternante**, cioè per il prodotto vettoriale non è valida la proprietà commutativa.

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \frac{1}{2} ab \sin\theta$$

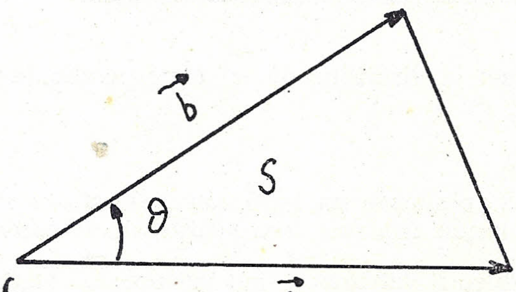


fig. (33 · 3)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Proprietà distributiva} \\ \text{rispetto alla somma}\end{array}\right.$

$\vec{c} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{c} \wedge \vec{b}$

4. $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c}) \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ cioè per il prodotto vettoriale non è valida la proprietà associativa

5. $m(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (m\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m\vec{b})$ con $m \in R$

34. Momento di un vettore $(P, \vec{a})$ rispetto ad un punto (momento polare).

Dato il vettore applicato $(P, \vec{a})$ ed un punto O non appartenente alla sua retta d'azione (sostegno), chiamiamo **momento** (polare) di $(P, \vec{a})$ rispetto al punto (Polo) O, il vettore libero $\vec{M}$ definito dal seguente prodotto vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{a} \wedge (O - P) \tag{34.1}$$

Se d è la distanza (detta anche braccio) del polo O, rispetto alla retta d'azione del vettore $\vec{a}$, risulta pure:

$$M = |\vec{M}| = a \cdot d \tag{34.2}$$

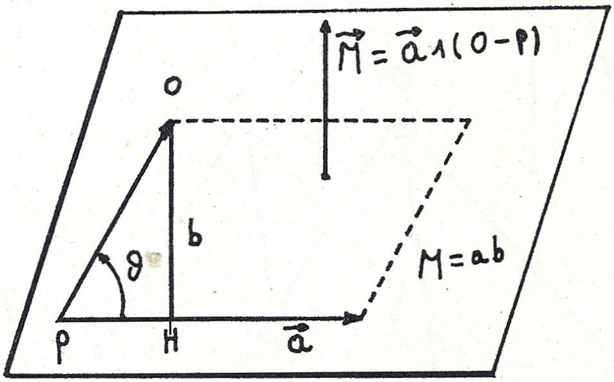


fig. (34.1)

È da rilevare che il momento $\vec{M}$ di un vettore $(\vec{P}, \vec{a})$ non varia comunque si sposti l'origine P del vettore $\vec{a}$ lungo la sua retta d'azione. Infatti con tale spostamento non cambia né il modulo, né la direzione, né il verso di $\vec{M}$.

Fra i momenti di vettori applicati è particolarmente importante il momento di una forza rispetto ad un punto.

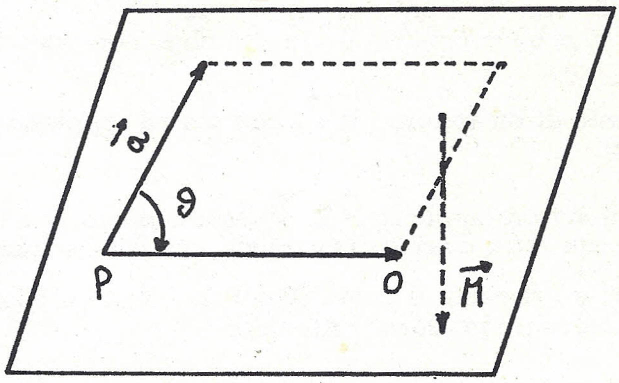
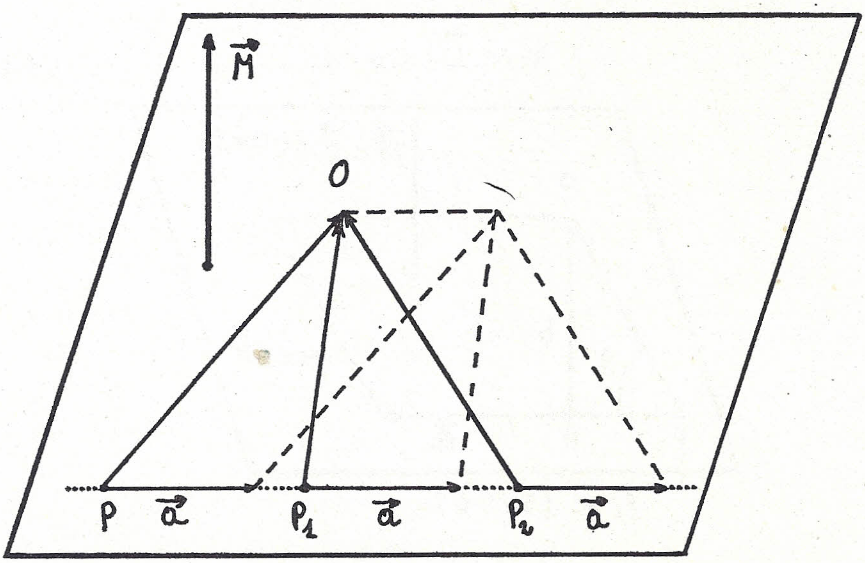


fig. (34·2)

fig. (34·3)



Esso viene definito alla stessa maniera di un qualsiasi vettore applicato.

$$\vec{M} = F \wedge (O - P) = \text{momento della forza } \vec{F} \text{ applicata in P, rispetto al punto O.} \qquad (34.3)$$

Supponiamo di avere più vettori applicati, ad es. $(P_1, \vec{a}_1)$, $(P_2, \vec{a}_2)$, $(P_3, \vec{a}_3)$, ... ed un punto O qualsiasi.

Definiamo **momento risultante** del sistema di vettori considerati rispetto al punto O, la somma dei momenti dei singoli vettori rispetto ad O, cioè:

$$\vec{M} = \vec{a}_1 \wedge (O - P_1) + \vec{a}_2 \wedge (O - P_2) + \vec{a}_3 \wedge (O - P_3) =$$

$$= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 \qquad (34.4)$$

$\vec{M}$ varia al variare del polo O.

35. Momento di un vettore rispetto ad una retta (momento assiale).

Sia $(P, \vec{a})$ un vettore applicato in P ed $\vec{r}$ una retta orientata di versore $\vec{e}$.

Definiamo **momento del vettore** $\vec{a}$ **rispetto alla retta orientata** $\vec{r}$, la componente secondo $\vec{r}$ del momento $\vec{M}$ del vettore $\vec{a}$ rispetto ad un punto O qualsiasi di r.

In simboli abbiamo:

$$M_r = \vec{M} \times \vec{e} = [\, \vec{a} \wedge (O - P) \,] \times \vec{e} = (S - O) \times \vec{e} \qquad (35.1)$$

M_r non varia al variare di O su r.

Se $(P, \vec{a})$ ed r sono complanari allora M_r è nullo e viceversa.

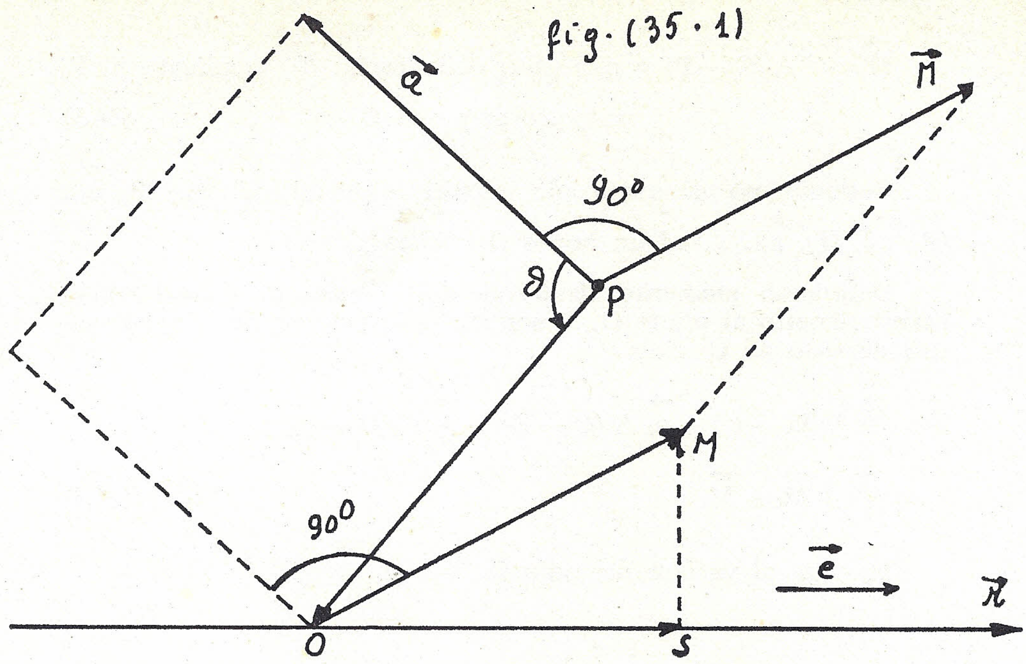


fig. (35 . 1)

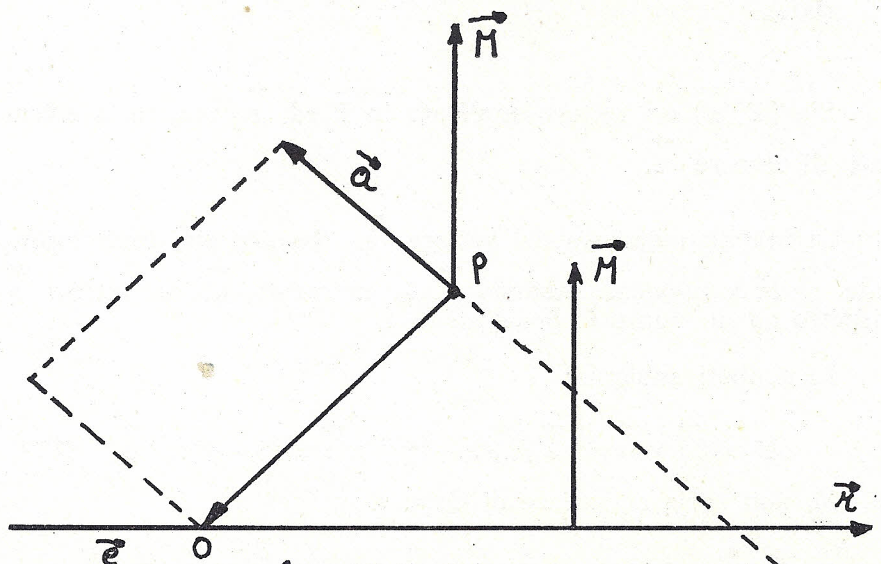


fig. (35 . 2)

36. Momento di una coppia di vettori.

Definiamo coppia di vettori l'insieme di due vettori complanari $(P_1, \vec{a})$, $(P_2, -\vec{a})$ applicati a punti diversi ed aventi la stessa direzione, lo stesso modulo e versi opposti.

Il piano individuato dai due vettori è detto piano della coppia, mentre la distanza b dei rispettivi sostegni è detta braccio della coppia.

Il momento $\vec{M}$ della coppia è uguale alla somma vettoriale dei momenti dei due vettori rispetto ad un qualsiasi punto O del piano della coppia, cioè:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{a} \wedge (O - P_1) + [-\vec{a} \wedge (O - P_2)] =$$

$$= \vec{a} \wedge [(O - P_1) - (O - P_2)]$$

$$\vec{M} = \vec{a} \wedge (P_2 - P_1) \tag{36.1}$$

$$M = a \cdot \overline{P_1P_2} \sin \theta = a \cdot b \tag{36.2}$$

Il momento $\vec{M}$ è un vettore libero che non dipende dalla scelta del punto O.

Possiamo concludere affermando che il momento di una coppia di vettori è un vettore avente:

1. modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per il braccio della coppia

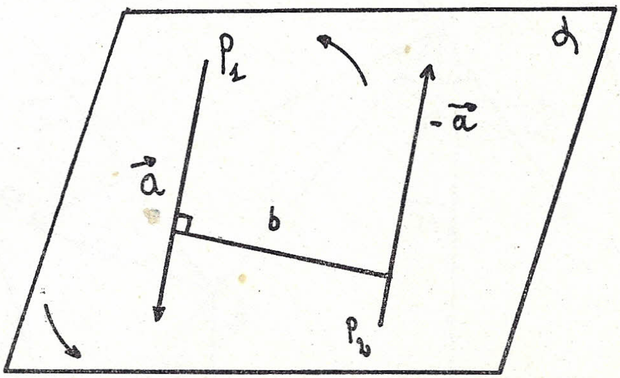


Fig. (36·1)

2. direzione perpendicolare al piano della coppia

3. come verso quello che va dai piedi al capo di un osservatore che posto sul piano della coppia, nota una rotazione antioraria.

In particolare possiamo scegliere come punto O uno dei due punti di applicazione dei vettori che formano la coppia e definire il momento della coppia come momento di uno dei due vettori rispetto al punto di applicazione dell'altro.

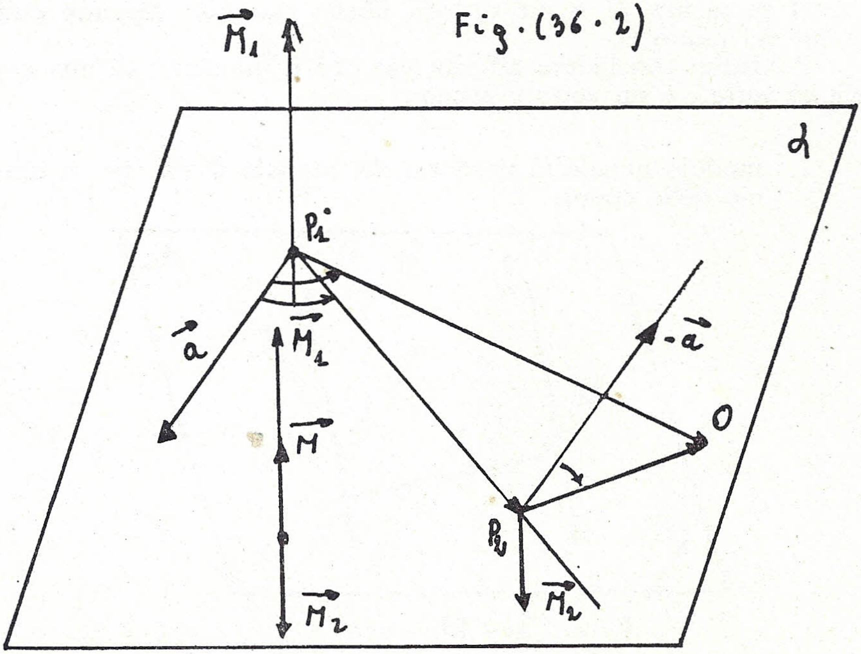
Infatti:

momento di $(P_1, \vec{a})$ rispetto a $P_2 = \vec{a} \wedge (P_2 - P_1) = \vec{M}$

momento di $(P_2, -\vec{a})$ rispetto a $P_1 = -\vec{a} \wedge (P_1 - P_2) =$

$= \vec{a} \wedge (P_2 - P_1) = \vec{M}$

Fig. (36 · 2)



Se i vettori $(P_1, \vec{a})$ e $(P_2, -\vec{a})$ sono direttamente opposti il momento $\vec{M}$ è nullo e la coppia dicesi nulla.

Nel caso in cui i due vettori sono due forze abbiamo una coppia di forze la quale, se applicata ad un corpo rigido, gli imprime una rotazione.

37. Proprietà dei sistemi di vettori.

Dicesi **risultante** di un sistema di n vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ il vettore $\vec{R}$ definito da:

$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n \tag{37.1}$$

Due sistemi di vettori applicati si dicono equivalenti quando hanno:

1. lo stesso risultante $\vec{R}$
2. lo stesso momento risultante $\vec{M}$ rispetto ad un qualsiasi punto O.

Un sistema di vettori applicati si dice in equilibrio (o equivalente a zero) quando sono nulli il risultante $\vec{R}$ ed il momento risultante $\vec{M}$ rispetto ad un generico punto.

In generale un qualsiasi sistema di n vettori applicati è equivalente ad un sistema più semplice formato da un solo vettore e da una coppia, non escludendo che il vettore, o la coppia o entrambi possano essere nulli.

38. Area del triangolo orientato espressa mediante le coordinate dei tre vertici.

Sia $P_1P_2P_3$ un triangolo. Sappiamo dalla geometria euclidea che la sua area è sempre espressa da un numero reale positivo rapporto tra la sua superficie e quella di un quadrato di lato unitario. In determinate questioni però è opportuno introdurre il concetto di superficie orientata la cui area viene espressa da un numero reale relativo.

Orientare una superficie significa fissare (in uno dei due modi possibili) un verso positivo di percorrenza del suo perimetro.

Noi assumeremo come verso positivo di percorrenza del perimetro di un triangolo quello determinato da un osservatore ideale che, percorrendo il perimetro, lasci il triangolo sempre alla sua sinistra. In questo caso si dice che la superficie del triangolo è orientata positivamente e quindi la sua area è espressa da un numero positivo. In caso contrario la superficie è orientata negativamente e la sua area è espressa da un numero negativo.

Inoltre converremo sempre di percorrere il perimetro nel verso determinato dalla successione dei tre vertici, cioè partendo dal primo vertice, passando per il secondo e poi per il terzo vertice, per ritornare al primo vertice. Pertanto i triangoli $P_1P_2P_3$ e $P_1P_3P_2$ hanno aree espresse da numeri opposti.

La regola precedentemente illustrata può essere sostituita dalla seguente: l'area A della superficie del triangolo orientato $P_1P_2P_3$ è positiva (negativa) a seconda che il terzo vertice P_3 sia situato alla sinistra (destra) di un osservatore ideale che si sposti dal primo (P_1) al secondo vertice (P_2).

Tenendo presente la fig. (38.1) abbiamo:

$$A(P_1P_2P_3) > 0, \qquad A(P_2P_3P_1) > 0, \qquad A(P_3P_2P_1) < 0.$$

Riferiamo il triangolo $P_1P_2P_3$ ad un sistema ortonormale di assi cartesiani xOy. Supponiamo che sia:

$$\begin{cases} \vec{a} = P_2 - P_1 = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_2)\cdot\vec{j} \\ \\ \vec{b} = P_3 - P_1 = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} = (x_3 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_3 - y_1)\cdot\vec{j} \\ \\ P_1 = (x_1, y_1), \quad P = (x_2, y_2), \quad P = (x_3, y_3) \end{cases} \tag{38.1}$$

Sapendo che:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = 0, \qquad |\vec{i} \wedge \vec{j}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$$

si ottiene:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = a_xb_x\vec{i} \wedge \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \wedge \vec{j} +$$

$$+ a_yb_x\vec{j} \wedge \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \wedge \vec{j} = a_xb_y\vec{i} \wedge \vec{j} - a_yb_x\vec{i} \wedge \vec{j} =$$

$$= (a_x b_y - a_y b_x)\, \vec{i} \wedge \vec{j}$$

e quindi:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |(a_x b_y - a_y b_x)| \cdot |\vec{i} \wedge \vec{j}| = |a_x b_y - a_y b_x| \qquad (38.2)$$

Ma dalla trigonometria sappiamo che

$$|A| = \frac{ab\sin\theta}{2} = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{2}$$

onde:

$$A = \tfrac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \tfrac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)] \qquad (38.3)$$

relazione che vale in valore e segno.

La (38.3) scritta sotto forma di determinante diventa:

$$A(P_1P_2P_3) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (38.4)$$

relazione che vale in valore e segno.

Qualora non interessi l'orientamento della superficie del triangolo allora basta considerare i valori assoluti delle formule (38.3) e (38.4).

Perveniamo ai medesimi risultati se operiamo come segue.

Introducendo il vettore $P_4 - P_1 = \vec{d}$ in modo che sia:

$$d = b; \qquad \vec{d} \perp \vec{b}$$

possiamo scrivere:

$$|A| = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{d}| = \tfrac{1}{2}ad\,|\cos(90° \pm \theta)| = \tfrac{1}{2}ab\sin\theta \qquad (38.5)$$

$$\vec{d} \perp \vec{b} \Rightarrow d_x = kb_y, \qquad d_y = -kb_x$$

dovendo essere

$$\vec{d} \times \vec{b} = 0$$

e quindi:

$$d_x b_x + d_y b_y = 0 \qquad \frac{d_x}{b_y} = -\frac{d_y}{b_x} = k$$

$$d = b \Rightarrow k^2 (a_x^2 + a_y^2) = a_x^2 + a_y^2 \qquad \text{cioè} \qquad k = \pm 1$$

Sostituendo nella (38.5) otteniamo:

$$|A| = \tfrac{1}{2} | a_x d_x + a_y d_y | = \tfrac{1}{2} | k a_x b_y - k a_y b_x | =$$

$$= \frac{|k|}{2} | a_x b_y - a_y b_x | = \tfrac{1}{2} | a_x b_y - a_y b_x |$$

da cui si deduce facilmente la (38.3).

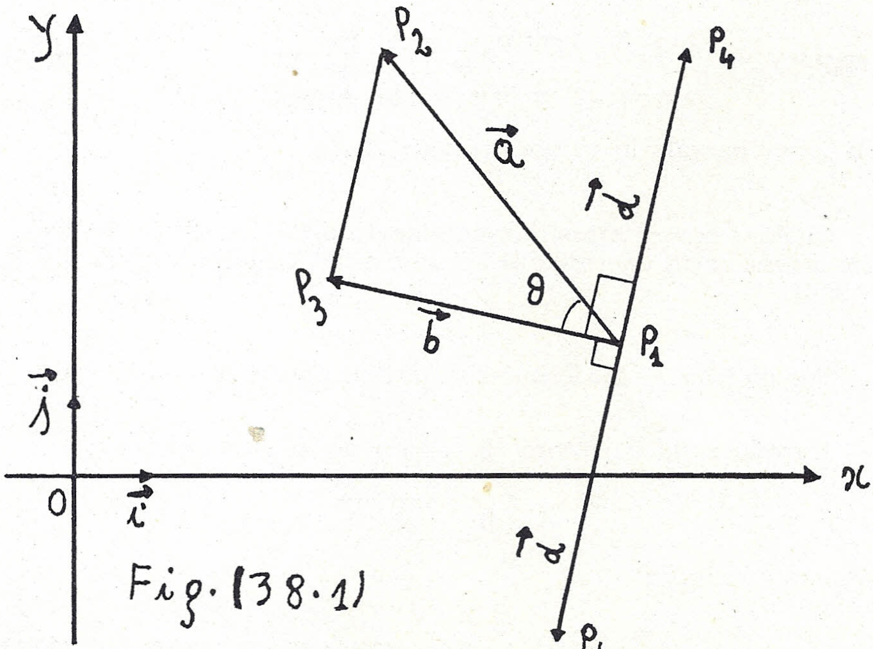


Fig. (38.1)

39. Una identità vettoriale ed il teorema dei seni.

Dato il triangolo ABC consideriamo i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ così definiti:

$$\vec{a} = B - C, \qquad \vec{b} = C - A, \qquad \vec{c} = B - A$$

Vogliamo verificare l'identità vettoriale

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{b} \tag{39.1}$$

e dedurre da essa il teorema dei seni.

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = (B - C) \wedge (B - A)$$

$$\begin{aligned}
\vec{c} \wedge \vec{b} &= (B - A) \wedge (C - A) = \\
&= [(C - A) + (B - C)] \wedge [(B - A) + (C - B)] = \\
&= (C - A) \wedge (B - A) + (C - A) \wedge (C - B) + \\
&+ (B - C) \wedge (B - A) + (B - C) \wedge (C - B) = \\
&= (C - A) \wedge (C - A) + (B - C) \wedge (B - A) + \\
&- (C - B) \wedge (C - B) = (B - C) \wedge (B - A)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{b} \tag{39.2}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (B - C) \wedge (C - A)$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{c} &= (B - C) \wedge (B - A) = \\
&= [(B - A) + (A - C)] \wedge [(B - C) + (C - A)] = \\
&= (B - A) \wedge (B - C) + (B - A) \wedge (C - A) + \\
&+ (A - C) \wedge (B - C) + (A - C) \wedge (C - A) = \\
&= (B - A) \wedge (B - A) + (B - C) \wedge (C - A) = \\
&= (B - C) \wedge (C - A)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} \tag{39.3}$$

Confrontando la (39.2) con la (39.3) otteniamo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{b}$$

L'identità vettoriale (37.1) è così provata.

Dalla (37.1) deduciamo che:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{c} \wedge \vec{b}| \tag{39.4}$$

in quanto il modulo di ciascun prodotto vettoriale rappresenta il doppio dell'area del triangolo ABC.

Tenendo presente la definizione di prodotto vettoriale possiamo scrivere la (37.4) nella seguente maniera:

$$\mathrm{ab}\sin\gamma = \mathrm{ac}\sin\beta = \mathrm{bc}\sin\alpha \tag{39.5}$$

e dividendo i tre etermini per abc otteniamo:

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

cioè:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{39.6}$$

Le (39.6) esprimono appunto il teorema dei seni.

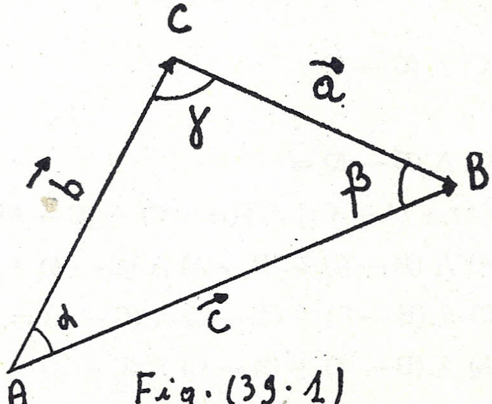


Fig. (39.1)

BIBLIOGRAFIA

1. FLACCAVENTO-ITTA, *Calcolo vettoriale*, Giorgio Editore, Torino, 1965.
2. AA.VV., *Matematica moderna nelle scuole secondarie superiori*, Patron, Bologna, 1966.
3. *Archimede*, Le Monnier, Firenze, 1971.
4. *Enciclopedia delle matematiche*, Hoepli, Milano, 1964.
5. MORETTI, *Analisi matematica*, Vol. II, Hoepli, Milano, 1965.
6. CAMPEDELLI, *La geometria dei parallelogrammi*, Le Monnier, Firenze, 1970.
7. ZWIRNER, *Istituzioni di matematiche*, Vol. II, Cedam, Padova, 1971.
8. PICCININI-SCOGNAMIGLIO, *Trigonometria piana col metodo vettoriale*, Palumbo, Palermo, 1972.
9. PIAZZA-TOCCAFONDO, *Insiemi, funzioni, vettori*, Bulgarini, Firenze, 1973.
10. NISINI, *Insieme E, insieme C, geometria analitica, topologia, analisi*, Trevisini, Milano.
11. EINAUDI-FAVA, *Geometria analitica*, Levrotto Bella, Torino, 1958.
12. COMBES-BARGUES, *Mathèmatiques*, Tomes 2, Vuibert, Paris, 1974.
13. VERT-FEU, *Mathèmatique Bac 74 serie C et E*, Librairie Hachette, Paris, 1974.

INDICE GENERALE