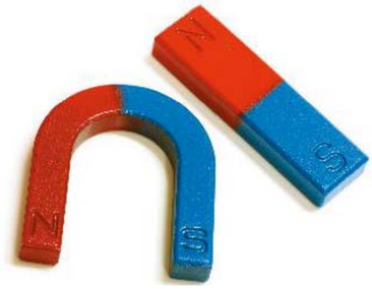
Unità didattica N° 27: Il campo magnetico

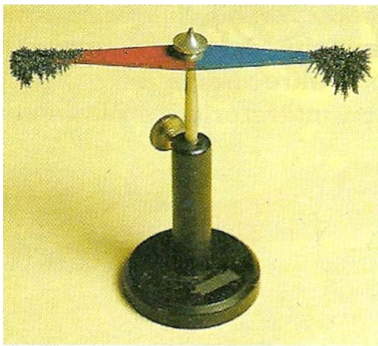
I magneti e le loro interazioni

- Già ai tempi del filosofo greco Talete di Mileto (VI secolo A.C.) era noto che un minerale di ferro la magnetite ($F_eO \cdot F_eO_3$ minerale composto da ossido di ferro e ossido ferroso, detto anche sesquiossido di ferro) gode della proprietà di attirare la limatura di ferro specialmente lungo talune zone della sua superficie. Si indica brevemente questa proprietà dicendo che tale minerale è magnetizzato e rappresenta una calamita **o un** magnete naturale**.** Si possono costruire magneti permanenti artificiali. Per esempio, una sbarretta di acciaio su cui viene ripetutamente strofinata, sempre nello stesso verso, una zona di maggiore attrazione di un pezzo di magnetite, diventa a sua volta un magnete. L'attrazione della limatura di ferro è limitata ai due estremi della sbarretta (poli magnetici); i due poli sono separati da una zona neutra ove la limatura non è attratta. Le calamite artificiali cosi ottenute, se costruite con opportuni materiali ferromagnetici e conservate con qualche cura, sono permanenti, cioè conservano praticamente inalterate per anni le loro proprietà magnetiche. Tuttavia il metodo di gran lunga più comodo per magnetizzare regolarmente una sbarretta di acciaio consiste nel disporla lungo l'asse di un solenoide in cui si invia una intensa corrente elettrica continua.
- Per un lungo periodo di tempo l'elettricità ed il magnetismo sono stati considerati come enti fisici distinti ed indipendenti, dotati di talune analogie e di forti differenze. Con l'estendersi delle indagini e la scoperta delle interazioni tra magneti e correnti elettriche, e più in generale tra magneti e cariche elettriche in movimento rispetto ad essi si è stabilita una relazione che riconduce i fenomeni magnetici ad azioni tra correnti elettriche. Ad Ampère (1820) spetta il grande merito di avere proposto una interpretazione dei fenomeni magnetici che riduce la magnetizzazione dei corpi ad effetti dovuti alla circolazione, all'interno del corpo magnetizzato, di correnti elettriche su scala molecolare e atomica.
- Le calamite possono avere forme diverse. Le più comuni sono: a) calamita a barra parallelepipeda b) calamita a barra cilindrica c) calamita a ferro di cavallo o ad **U** d) calamita a forma di ago detta più comunemente ago magnetico. Si tratta di una laminetta d'acciaio sottilissima avente la forma di losanga molto stretta ed allungata capace di ruotare attorno ad un perno verticale passante per il suo baricentro.

Una calamita possiede la proprietà di attirare la limatura di ferro.

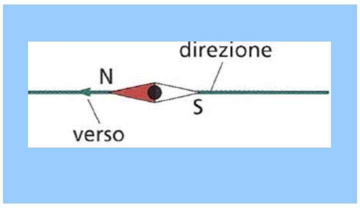
Un magnete a barra e un magnete a ferro di cavallo, un ago magnetico. I poli si trovano alle due estremità.

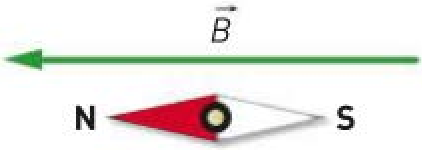




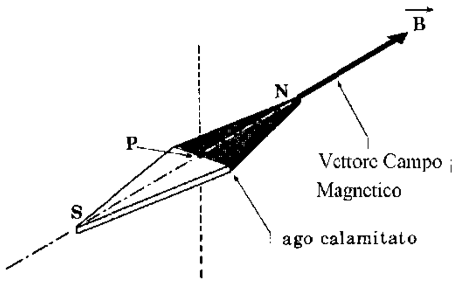
- L' ago magnetico è costituito da una laminetta d'acciaio sottilissima avente la forma di losanga molto stretta ed allungata capace di ruotare attorno ad un perno verticale passante per il suo baricentro. Un ago magnetico si orienta sempre disponendosi in modo che un suo estremo si volga verso il nord geografico e l'altro estremo verso il sud geografico. Il primo estremo dicesi polo nord o polo positivo e viene indicato con uno dei due seguenti simboli **N** P_N, il secondo estremo dicesi polo sud o polo negativo e viene indicato con uno dei due seguenti simboli **S**, P_S. Ogni calamita genera nello spazio circostante un campo magnetico descritto dal vettore $\vec{B}$.

La direzione del campo magnetico $\vec{B}$ è data dalla retta che unisce i poli Nord e Sud del magnete di prova, il verso è quello che va dal polo Sud al polo Nord del magnete di prova.

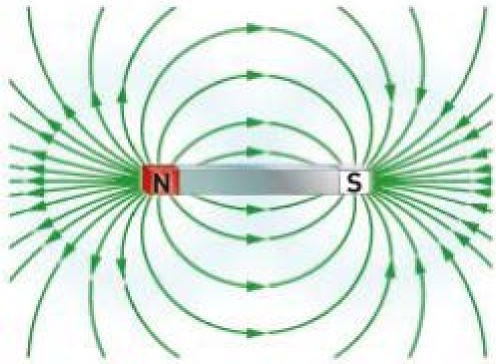




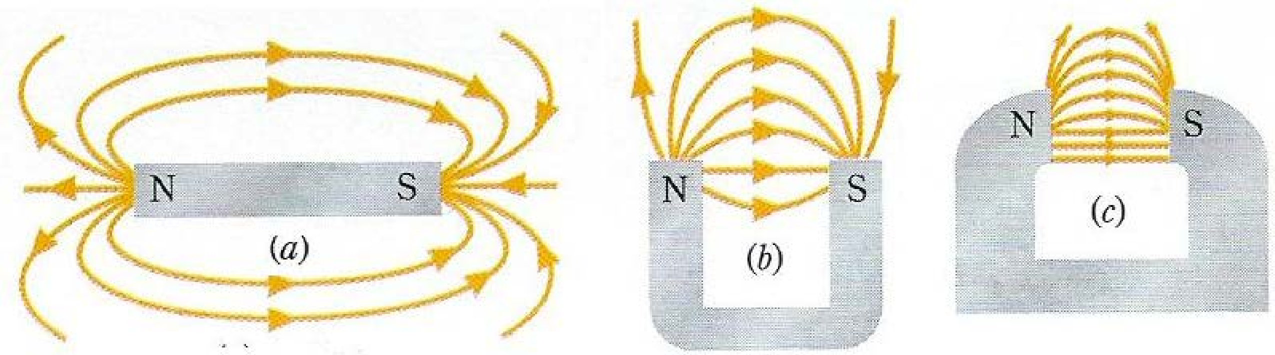
- Una calamita o un circuito percorso da corrente generano nello spazio circostante un campo magnetico $\vec{B}$ la cui direzione ed il cui verso sono individuati dalle linee di campo. Linea di campo è una linea chiusa la cui tangente ci dà la direzione del campo $\vec{B}$ ed il cui verso ci dà il verso del campo $\vec{B}$.

	Assumiamo come direzione e verso di un campo magnetico $\vec{B}$ in un punto **P** dello spazio la direzione ed il verso della retta orientata che va dal **polo sud** al **polo nord** di un aghetto magnetico in equilibrio e col baricentro coincidente con **P**.

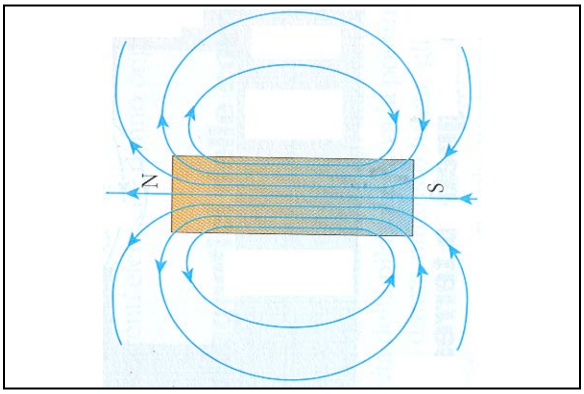
Le linee del campo magnetico nella regione esterna al magnete a barra vanno dal polo nord **N** al polo sud **S**, e nella regione interna alla barra magnetizzata vanno dal polo sud **S** al polo nord **N**.



Le linee del campo magnetico per tre magneti di geometria differente. Le linee del campo magnetico all'esterno di un campo magnetico escono dal suo polo nord ed entrano nel suo polo sud.



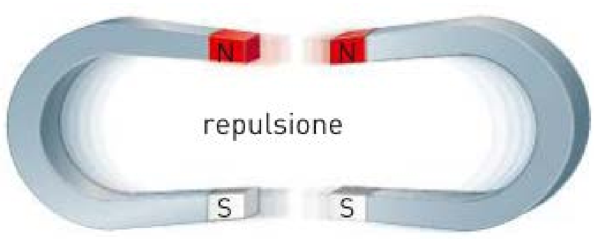
La rappresentazione mediante linee di campo indica non solo la direzione ed il verso del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$, ma permette anche di stimare la sua intensità: le linee del campo magnetico sono più fitte laddove il campo è più intenso.



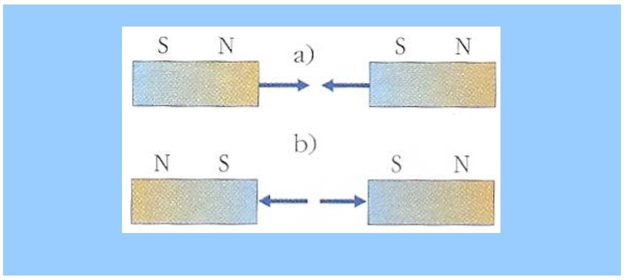
Linee di campo per un magnete a sbarra

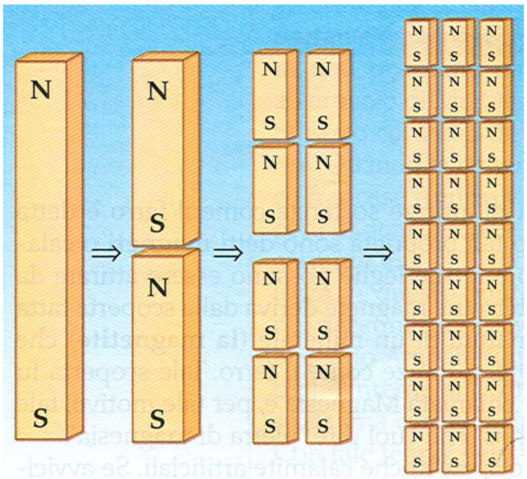
Nel punto A la direzione del campo magnetico coincide con l'asse dell'ago magnetico di prova (in posizione di equilibrio), il verso del campo magnetico è per convenzione quello che va dal polo **Sud** al polo **Nord** dell'ago magnetico di prova .

- Poli magnetici dello stesso nome si respingono, poli magnetici di nome diverso si attirano.



Poli magnetici di nome di verso (a) interagiscono con forze attrattive, mentre poli magnetici dello stesso nome (b) interagiscono con forze repulsive.





L'esperienza della calamita spezzata (ogni calamita divisa in due parti genera altre due calamite) ci dice che è impossibile realizzare poli magnetici separati. Non è possibile suddividere un magnete in modo da ottenere un polo nord isolato o un polo sud isolato. Suddividendo la calamita A si ottengono prima due calamite ridotte A' e A'', ma sempre con i due poli N ed S. Infine suddividendo ulteriormente A' e A'' si ottengono quattro calamite elementari , ma ognuna delle quali con i rispettivi due poli

Ogni calamita è costituita da un numero notevole di calamite elementari orientate secondo la direzione $S-N$, una di seguito all'altra e disposte su diverse file parallele ed in più strati.

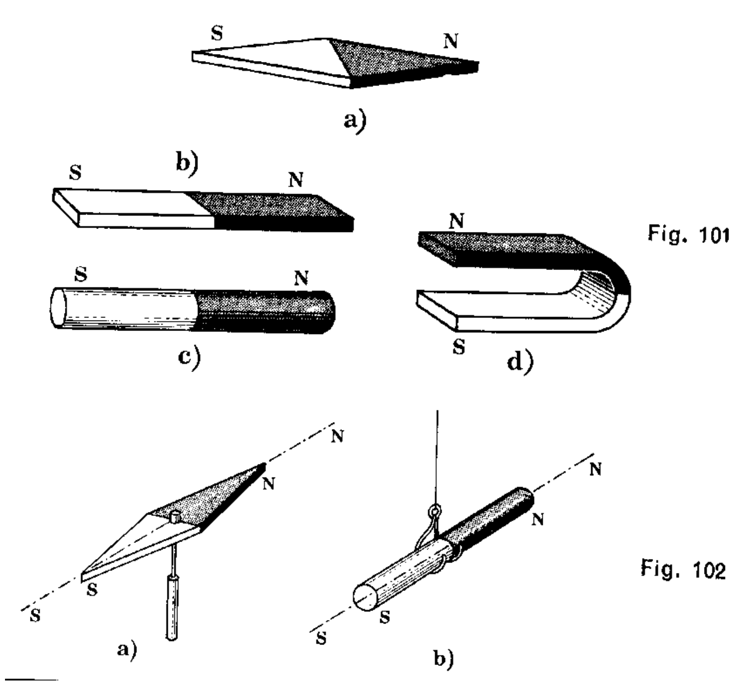
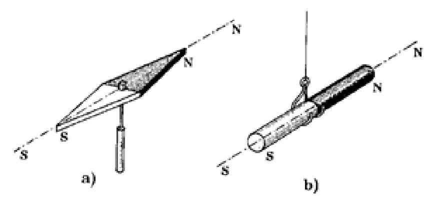


Fig. 101: vari tipi di calamite artificiali permanenti: a) a forma di ago b) a **barra** c) a forma cilindrica d) a forma di **U**

Fig. 102: Disposizione analoga di due calamite secondo l'asse **N-S**

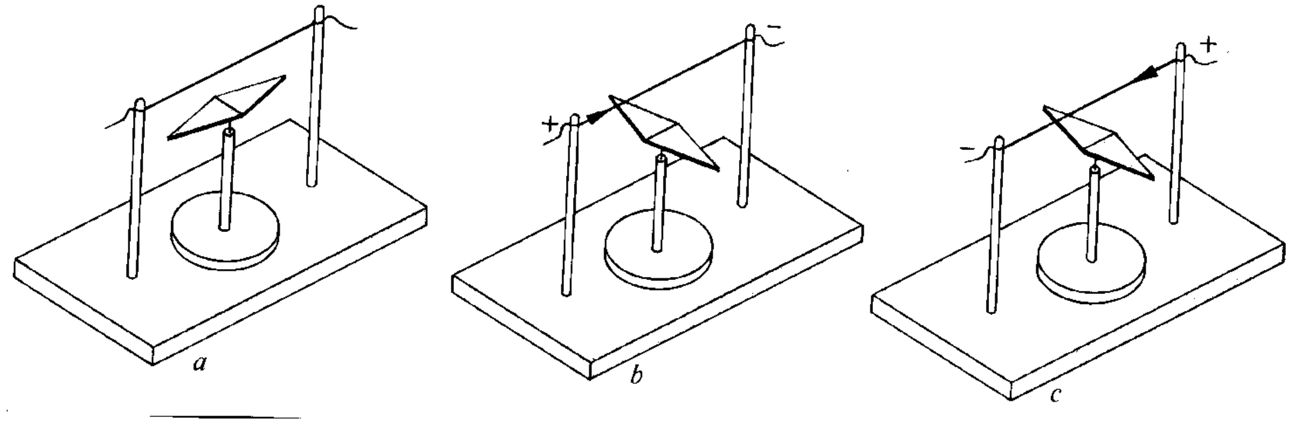
a) ad ago **b) a forma cilindrica**

b) 

Le interazioni tra magneti e correnti e tra correnti e correnti

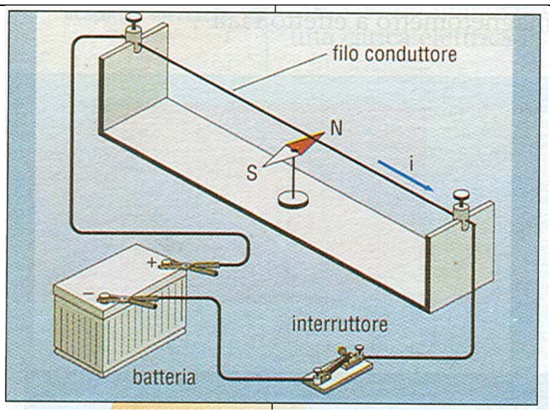
● Un ago magnetico mobile, posto nelle vicinanze e parallelamente ad un filo conduttore percorso da corrente, devia dalla sua posizione di equilibrio e si dispone ortogonalmente al filo (Esperienza di Oersted 1820)

Questa esperienza dimostra che un filo conduttore percorso da corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico.



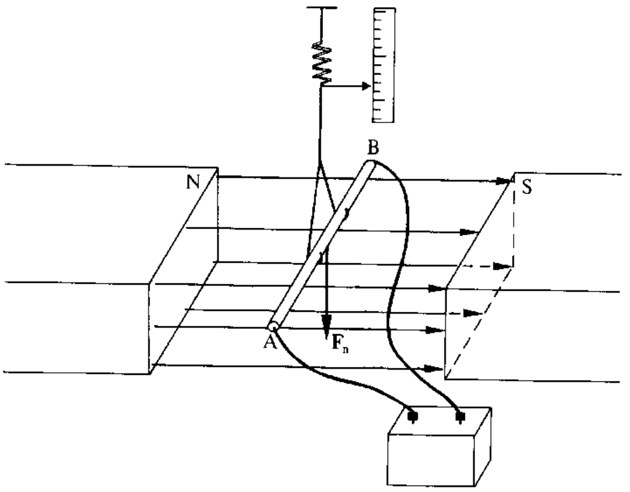
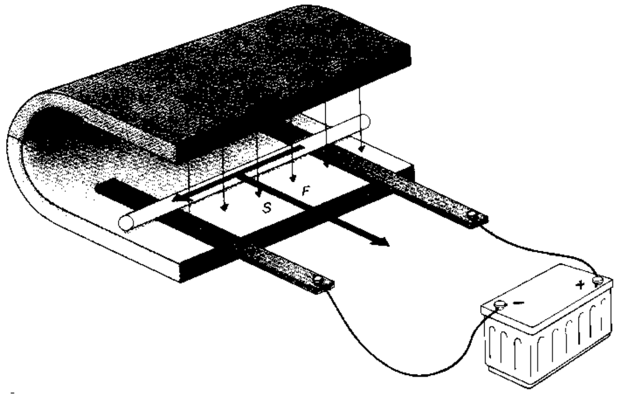
Schema dell'**esperimento do Oersted**: **a)** nel conduttore non passa corrente **b)** nel conduttore passa corrente in un certo verso c) la corrente viene invertita

L'esperimento del fisico danese Christian Oersted: a circuito aperto, l'ago sente solo l'influenza del campo magnetico terrestre e si posiziona in direzione $S-N$. Quando passa corrente nel circuito, si genera un campo magnetico che fa ruotare l'ago magnetico di $90°$ e lo dispone perpendicolare al filo.

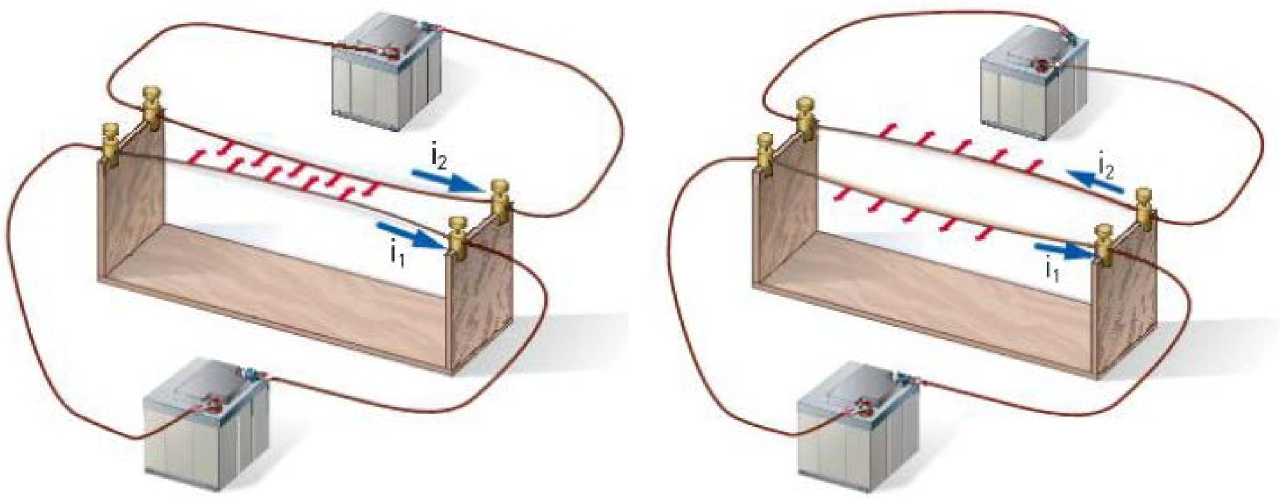


● Un tratto mobile percorso da corrente immerso in un campo magnetico creato da una calamita è soggetto ad una *forza* che tende a spostarlo perpendicolarmente alle linee di campo.

(Esperienza di Faraday **1821**) Questa esperienza dimostra che un campo magnetico agisce mediante forze sulle cariche in movimento.

 Azione elettrodinamica su un filo percorso da corrente immerso in un campo magnetico	 La forza agente su un conduttore rettilineo percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico in direzione perpendicolare alle linee di campo

• Tra **due fili conduttori paralleli percorsi da corrente** si esercita una forza attrattiva o repulsiva a seconda che le correnti sono concordi o discordi.



Due fili paralleli (a) percorsi da corrente elettrica nello stesso verso si attraggono.

Due fili paralleli (b) percorsi da corrente elettrica in versi opposti si respingono.

L'intensità della forza di attrazione è direttamente proporzionale alle correnti i_1 e i_2 nei fili ed inversamente proporzionale alla distanza d tra essi. Questo esperimento permette di definire in modo operativo l'ampere come unità di misura della corrente elettrica.

Questa esperienza dimostra che le correnti elettriche interagiscono tramite campi magnetici. Il primo conduttore genera nello spazio circostante un campo magnetico che esercita delle forze sul secondo conduttore. Il secondo conduttore, a sua volta, genera nello spazio circostante un campo magnetico che esercita sul primo conduttore delle forze.

Tutte queste esperienze mostrano che le correnti elettriche producono campi magnetici e risentono dell'azione di campi magnetici, cioè mettono in evidenza l'intima connessione che intercorre tra fenomeni elettrici e fenomeni magnetici.

● Le forze che si esercitano tra correnti e correnti sono dette forze elettrodinamiche, quelle che si esercitano fra correnti e magneti sono dette forze elettromagnetiche, quelle che si esercitano fra magneti e magneti forze magnetiche.

● Un campo magnetico è uniforme quando il vettore che lo rappresenta è lo stesso in ogni punto del campo. Le **linee di un campo magnetico uniforme sono rette parallele ed equiverse**.

● Un ago magnetico immerso in un campo magnetico uniforme è soggetto ad una coppia di forze il cui momento meccanico diventa nullo quando l'ago magnetico si dispone lungo la stessa direzione e lo stesso verso del campo magnetico.

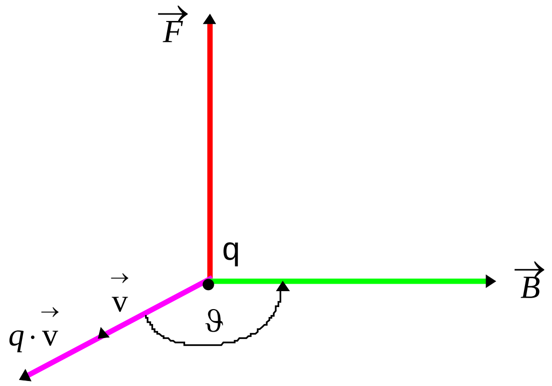
Campo magnetico e vettore $\vec{\mathbf{B}}$

Da quanto detto precedentemente possiamo affermare che lo spazio attorno ad un magnete o ad un conduttore percorso da corrente è sede di un campo magnetico così come abbiamo detto che lo spazio nelle vicinanze di un conduttore elettrizzato è sede di un campo elettrico.

In ogni caso per campo magnetico dobbiamo intendere la perturbazione fisica che si genera in una regione dello spazio quando poniamo in tale regione una calamita o un reoforo percorso da corrente. La perturbazione consiste nella creazione di forze magnetiche che si manifestano quando collochiamo nella regione sede del campo magnetico un ago magnetico o una spira percorsa da corrente.

Un campo magnetico viene descritto dal vettore $\vec{\mathbf{B}}$ detto vettore campo magnetico (una volta era chiamato induzione magnetica) completamente individuato dalla relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}\,\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$

dove $\vec{F}$ è la forza che agisce sulla carica **q** avente velocità vettoriale $\vec{v}$ posta in un punto del campo magnetico $\vec{B}$. $\vec{F}$ è perpendicolare ai vettori $q\,\vec{v}$ e $\vec{B}$, ha modulo $F = qvB\sin\vartheta$, ha verso che si ottiene applicando la regola della mano destra.



<< Il verso di $\vec{F}$ coincide col verso del pollice della mano destra se le altre dita si avvolgono nel verso della rotazione antioraria dell'angolo convesso ϑ >> .

- Le forze di tipo magnetico sono originate ed agiscono su cariche elettriche in movimento. Esse dipendono, oltre che dalla carica, anche dalla velocità vettoriale con cui si muovono le cariche.

Una buona descrizione dei fenomeni magnetici è quella di associare alle cariche elettriche in movimento (o i fili percorsi da corrente) la creazione di un campo magnetico e di fare discendere da esso le forze (magnetiche) agenti sulle cariche elettriche in movimento (o i fili percorsi da corrente elettrica).

- Il vettore fondamentale $\vec{B}$ del campo magnetico è chiamato induzione magnetica anche se intensità del campo magnetico sarebbe stato il nome più adatto; ma questo nome è stato usurpato per ragioni storiche da un altro vettore, il vettore $\vec{H}$ collegato al vettore $\vec{B}$ dalla relazione $\vec{B} = \mu \vec{H}$

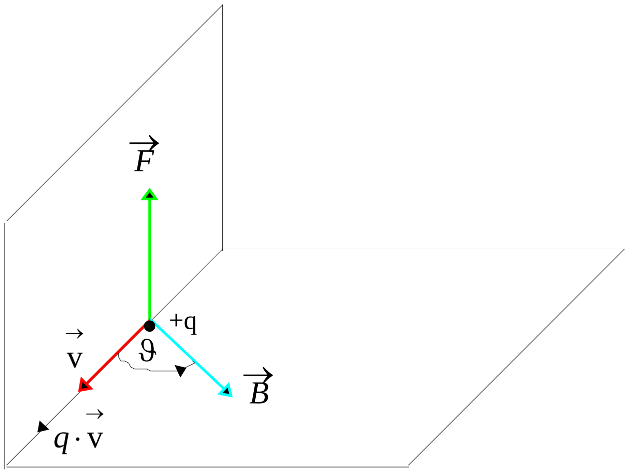
In questa fase non ci occuperemo delle cause che determinano il campo magnetico, ma ci preoccuperemo di stabilire: 1) se in un dato punto esiste un campo magnetico

2) l'azione che questo campo magnetico esercita sulle cariche elettriche che si muovono in esso.

Come per il campo elettrico useremo una carica elettrica puntiforme **q** (positiva o negativa) per esplorare il campo magnetico $\vec{B}$ e, per il momento non ci interessa sapere se a creare $\vec{B}$ sia stato un magnete o un filo percorso da corrente. Inoltre supporremo che non sia presente nessun campo elettrico e questo significa che, se trascuriamo la gravità, nessuna forza agirà sulla carica di prova se essa è posta in quiete nel punto in esame. Diremo che in un punto esiste un campo magnetico se in quel punto agisce una forza $\vec{F}$ su una carica in moto.

L'esperienza dimostra che, se la carica **q** si muove con una velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$, la forza magnetica $\vec{F}$ che agisce sulla carica **q**, ci viene data dalla seguente formula: $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}\,\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$

la quale definisce in modulo, direzione e verso il vettore $\vec{\mathbf{B}}$.



Osservazione

$$F = q\,v\,B\sin\vartheta \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{q\,v\sin\vartheta}}$$

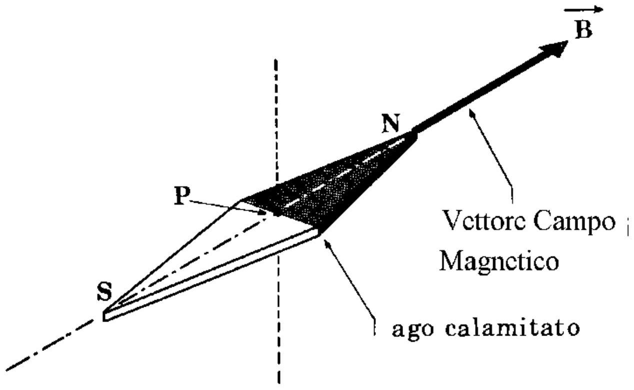
La forza magnetica $\vec{\mathbf{F}}$, che è sempre una forza trasversale in quanto risulta perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{\mathbf{B}}$, è nulla quando $\vec{v} = \vec{o}$ oppure quando $\vec{v} \,//\, \vec{B}$; è massima se $\vec{v} \perp \vec{B}$. nel primo caso abbiamo $sin\vartheta = 0$, nel secondo caso abbiamo $sin\vartheta = 1$.

Questa definizione di $\vec{\mathbf{B}}$ è più complessa rispetto ad altre ma in compenso è simile nello spirito alla definizione dell'intensità del campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$. Poiché $\vec{\mathbf{F}}$ risulta sempre perpendicolare alla velocità $\vec{v}$ posseduta dalla carica **q**, risulta pure perpendicolare allo spostamento $d\vec{s} = \vec{v}\cdot dt$ per cui, (per campi magnetici stazionari) $\vec{\mathbf{F}}$ non compie lavoro.

Quindi un campo magnetico stazionario non può cambiare l'energia cinetica di una particella elettrica in moto; può soltanto mutare la direzione del vettore $\vec{v}$ (ma non il suo modulo).

Se poi la carica elettrica **q** si muove in una regione dello spazio nella quale sono presenti un campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ ed un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ essa è soggetta ad una forza elettrostatica $\vec{F_e}$ e ad una forza magnetica $\vec{F_m} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ e quindi ad una forza elettromagnetica $\vec{F_{em}}$, detta forza di Lorentz, data da: $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{em}} = \mathbf{q}\cdot\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{q}\,\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{q}\cdot\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right)$

Qualche autore chiama forza di Lorentz soltanto la forza magnetica $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$.



Assumiamo come direzione e verso di un campo magnetico $\vec{B}$ in un punto **P** dello spazio la direzione ed il verso della retta orientata che va dal **polo sud** al **polo nord** di un aghetto magnetico in equilibrio e col baricentro coincidente con **P**.

Seconda legge di Laplace

Quando un conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$, gli elettroni di conduzione presenti all'interno del conduttore sono soggetti a forze magnetiche e quindi l'intero conduttore è soggetto a forze magnetiche. Consideriamo un conduttore filiforme e rettilineo lungo ℓ e percorso dalla corrente **i** immerso in un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$. Si verifica sperimentalmente e si dimostra teoricamente che il conduttore è soggetto ad una forza complessiva $\vec{F}$ completamente definita dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{i}\,\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ dove $\vec{\ell}$ rappresenta un vettore di modulo ℓ, diretto come il conduttore ed orientato nel verso convenzionale della corrente elettrica **i**.

Caratteristiche della forza: • **intensità**: $F = i\,\ell\,B\sin\vartheta$

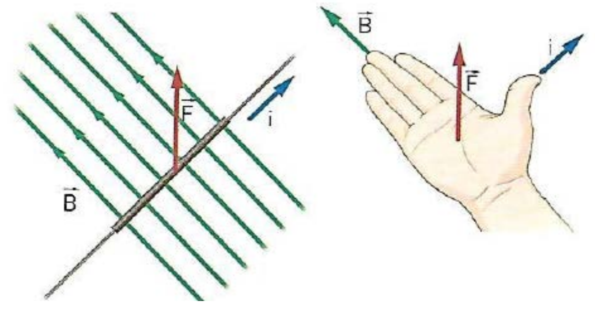
- direzione: perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{\mathbf{B}}$ ed $\vec{\ell}$
- verso: si determina applicando la regola della mano destra.

$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{i}\,\vec{\ell} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ può essere utilizzata come equazione di partenza per definire il vettore campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$. In questo caso si dimostra che una carica **q** avente velocità $\vec{v}$ immersa in un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ è soggetta ad una forza $\vec{F}$ data dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}\,\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$

La relazione $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{i}\,\vec{\ell} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ esprime la seconda legge di Laplace in un caso particolare, precisamente quando il vettore campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ è uniforme ed ℓ è un tratto di circuito rettilineo.

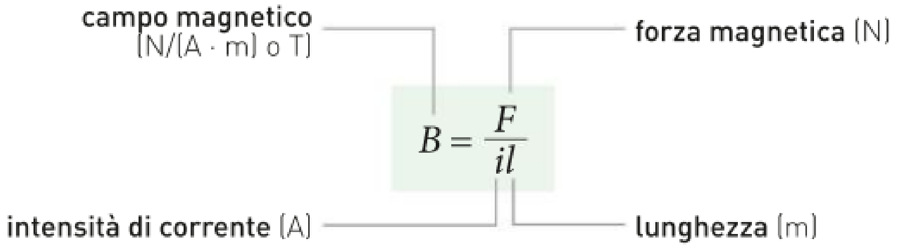
Quale forza agisce su un circuito avente forma arbitraria, attraversato dalla corrente i , immerso in un campo magnetico qualsiasi $\vec{\mathbf{B}}$?

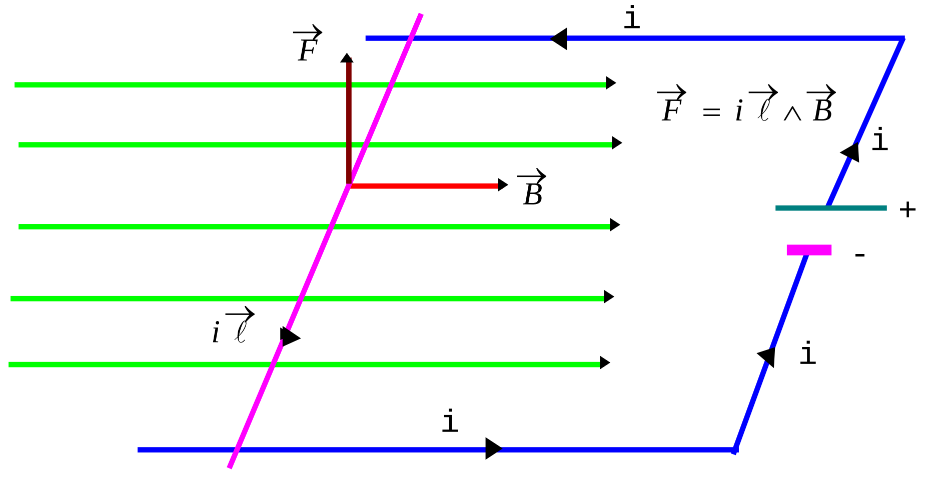
Si decompone il circuito in tanti tratti infinitesimi $d\ell$, in modo da poterli considerare rettilinei e tale che $\vec{\mathbf{B}}$ sia costante in ciascuno di essi.

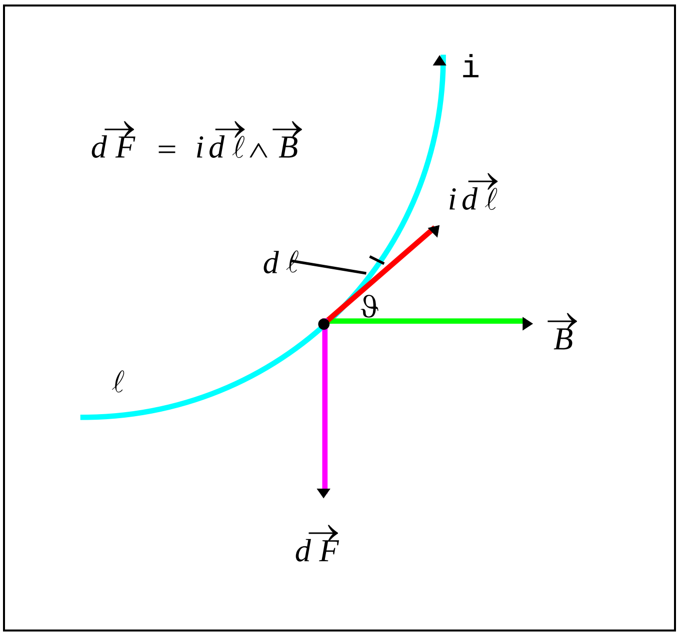
Il verso della forma magnetica $\vec{\mathbf{F}}_m$ che si esercita su un filo rettilineo percorso dalla corrente **i** è dato dalla regola della mano destra ponendo: • il pollice della mano destra nel verso della corrente • le altre dita nel verso delle linee del campo magnetico • il verso della forza è quello che esce dal palmo della mano.	

La forza $d\vec{F}$ che agisce su ciascuno di essi vale:

$\mathbf{d\vec{F} = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B}}$ ed esprime la seconda legge di Laplace .







Seconda legge di Laplace

Sul tratto di circuito $d\,\ell$ agisce la forza

$d\vec{F}$ data da: $\vec{\mathbf{dF}} = \mathbf{i}\,\vec{\mathbf{dl}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$

La forza $\vec{F}$ che agirà sul tratto ℓ di circuito sarà data dalla somma vettoriale delle forze elementari che agiscono sui singoli elementi infinitesimi $d\,\ell$ del circuito. $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{i} \cdot \int_P^Q \vec{\mathbf{dl}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$

$\vec{F}$ è la forza che agisce sul tratto di filo di lunghezza finita e di estremi P e Q.

Unità di misura e dimensioni del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$

$$B = \frac{F}{q\,v\sin\vartheta} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{F}{q\,v} \qquad [\mathbf{B}] = \frac{[\mathbf{F}]}{[\mathbf{q\,v}]} = \frac{[\mathbf{M}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{T}^{-2}]}{[\mathbf{I}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{T}^{-1}]} = [\mathbf{M}\cdot\mathbf{T}^{-2}\cdot\mathbf{I}^{-1}]$$

$$\{\mathbf{B}\} = \mathbf{tesla} = \mathbf{T} = \frac{\{\mathbf{F}\}}{\{\mathbf{q}\}\cdot\{\mathbf{v}\}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}}$$

Il tesla (T) rappresenta l'intensità di un campo magnetico uniforme che esercita la forza di un newton su una carica di un coulomb quando la carica si muove con la velocità di un metro al secondo in direzione ortogonale al campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$.

$$B = \frac{F}{i\cdot\ell\cdot\sin\vartheta} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{F}{i\cdot\ell} \qquad [\mathbf{B}] = \frac{[\mathbf{F}]}{[\mathbf{i}\,\ell]} = \left[\mathbf{M}\cdot\mathbf{T}^{-2}\cdot\mathcal{J}^{-1}\right]$$

$$\{\mathbf{B}\} = \mathbf{tesla} = \mathbf{T} = \frac{\{\mathbf{F}\}}{\{\mathbf{i}\}\cdot\{\ell\}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{m}}$$

Il tesla (**T**) rappresenta l'intensità di un campo magnetico uniforme che esercita la forza di un *newton* su un filo conduttore, normale a $\vec{\mathbf{B}}$, lungo un metro e percorso dalla corrente di un ampere.

- Un campo magnetico può essere descritto e visualizzato disegnando le sue **linee di forza** (meglio linee di campo) le quali, se orientate, ci danno due informazioni: la direzione di $\vec{\mathbf{B}}$ (*retta tangente alla linea di campo*) ed il verso di $\vec{\mathbf{B}}$.

Un campo magnetico è più intenso dove le linee di campo sono più fitte, è meno intenso dove le linee di campo sono più rarefatte.

● Assumiamo come direzione e verso di un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ in un punto **P** dello spazio la direzione ed il verso della retta orientata che va dal polo sud al polo nord di un aghetto magnetico in equilibrio e col baricentro coincidente con **P**.

● Malgrado alcuni parallelismi, campo magnetico e campo elettrico sono diversi.

Mentre esistono separatamente cariche elettriche positive e negative non esistono i monopoli magnetici, cioè non è possibile separare il polo magnetico Sud dal polo magnetico Nord.

Di conseguenza, mentre un campo elettrico agisce su una carica elettrica con una forza, un campo magnetico agisce su un ago magnetico con una coppia di forze.

● Un campo magnetico è generato sempre da cariche elettriche in movimento ed esercita forze su qualsiasi carica elettrica in movimento. Nel caso di un magnete permanente le cariche in movimento coincidono con gli elettroni degli atomi. Una diretta conseguenza di tale differenza è che una linea di campo magnetico è sempre chiusa, mentre una linea di un qualsiasi campo elettrico è sempre aperta. Una linea del campo elettrico nasce da una carica positiva e termina su una carica negativa, oppure nasce da una carica positiva e termina all'infinito, oppure proviene dall'infinito e termina su una carica positiva.

● Le linee del campo magnetico

Abbiamo visto che un campo magnetico può essere rappresentato mediante linee orientate dette linee del campo magnetico. La tangente ad una linea magnetica in un punto dà la direzione del vettore $\vec{B}$ in quel punto. Ogni linea di campo è orientata nel verso di $\vec{B}$. La densità delle linee del campo magnetico in un dato punto è proporzionale all'intensità del campo magnetico in quel punto. Dove le linee del campo magnetico sono più fitte il campo magnetica è più intenso (convenzione di Faraday). Le linee di forza di un campo magnetico sono **linee chiuse** in quanto non esistono i monopoli magnetici. Le linee di forza di un campo elettrico, invece , sono **linee aperte**. Una diretta conseguenza di tale affermazione è che una linea di campo magnetico è sempre chiusa, mentre una linea del campo elettrico è sempre aperta in quanto una linea del campo elettrico:

1) o nasce da una carica positiva e termina su una carica negativa

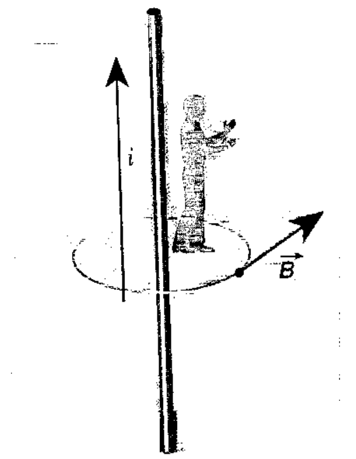
2) o nasce da una carica positive e termina all’infinito

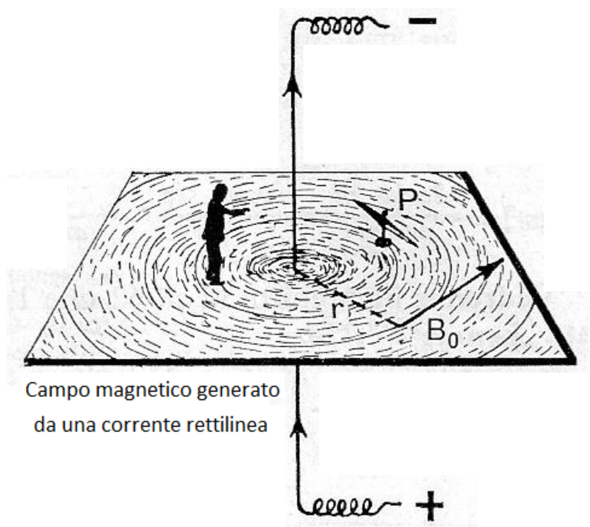
3) o proviene dall’infinito e termina su una carica negativa

Metodi pratici per la individuazione del verso delle linee del campo magnetico

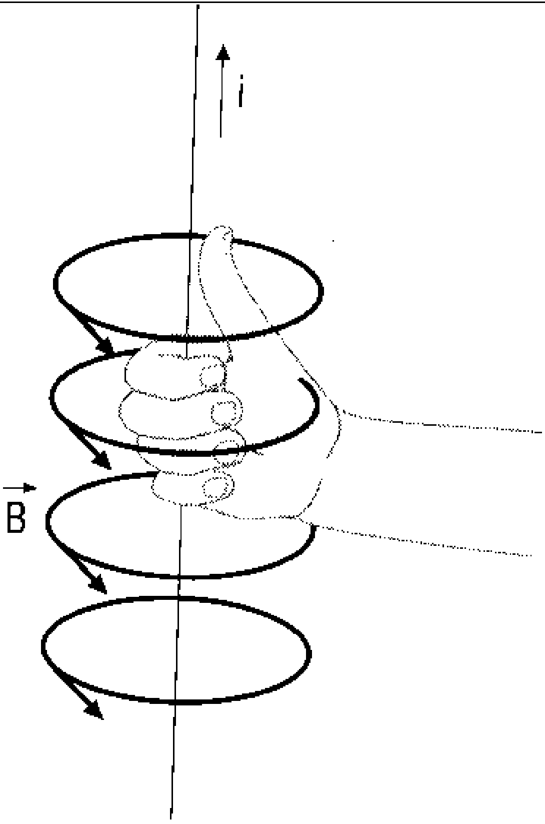
Un qualsiasi reoforo percorso da corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico le cui linee di campo hanno verso da ricavare da una delle seguenti regole fra loro equivalenti:

Regola dell'uomo di Ampére

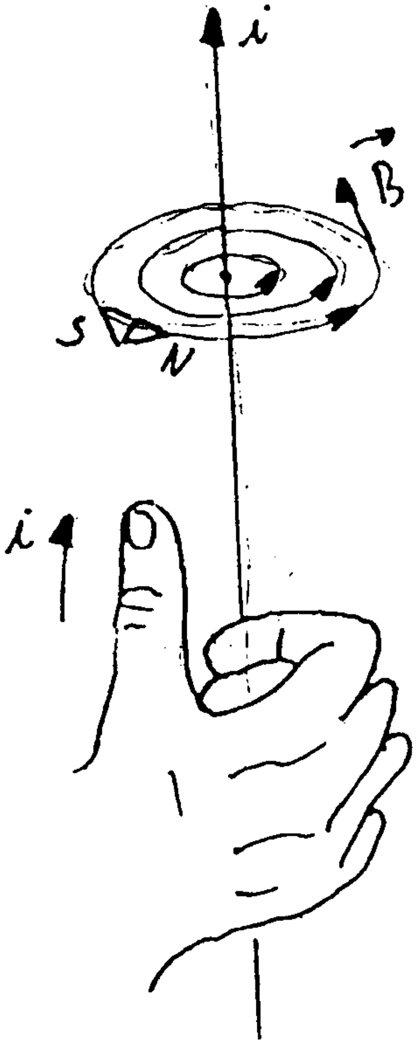
<table>
<tr>
<td>

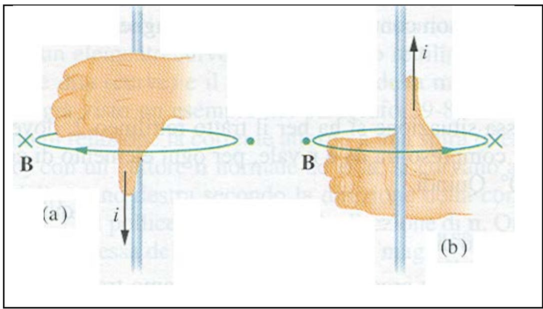
La regola della corrente personificata</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Un osservatore disposto parallelamente al filo rettilineo percorso da corrente in modo che la corrente i entri dai suoi piedi ed esca dal suo capo, attribuisce alle linee del campo magnetico un verso antiorario e, di conseguenza, attribuisce alle linee del campo magnetico un verso orario se è attraversato dalla corrente i dal capo ai piedi</td>
</tr>
</table>

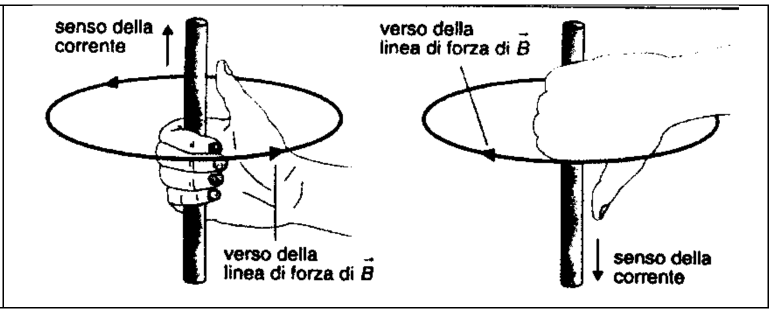
Regola della mano destra



Disposta la mano destra attorno al filo, con il pollice che punta nel senso della corrente, il senso di rotazione delle altre dita della mano individua il verso delle linee del campo magnetico. In altri termini, il verso delle linee del campo magnetico è sempre antiorario rispetto alla direzione ed al verso del pollice.



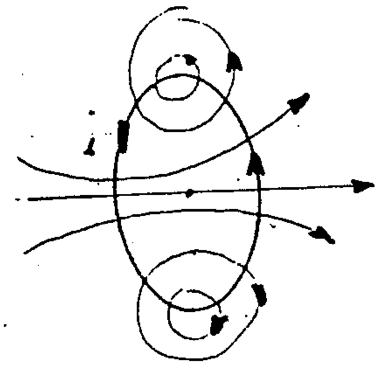


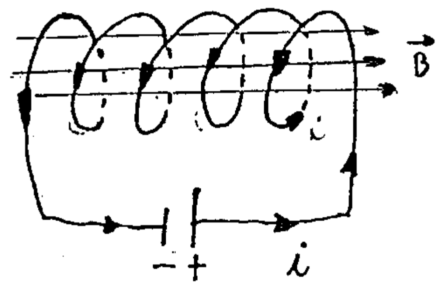


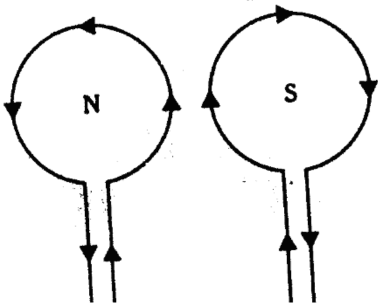
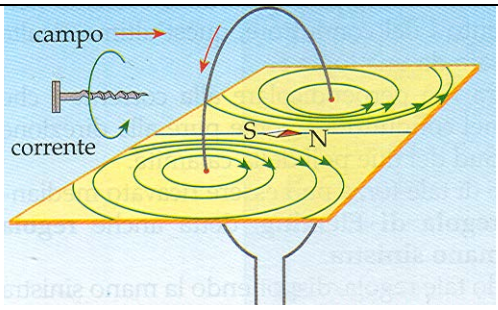
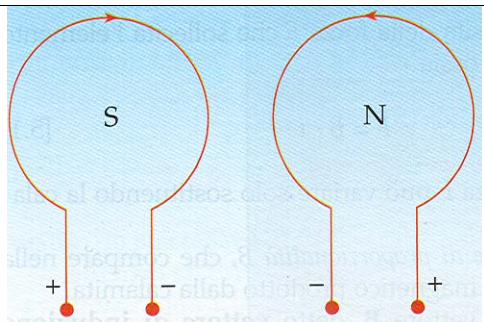
Se il pollice della mano destra è nel verso della corrente **i**, le dita piagate individuano il verso del campo magnetico. Se un filo rettilineo percorso da corrente è afferrato con la mano destra in modo tale che il suo pollice sia orientato secondo il verso convenzionale in cui fluisce la corrente **i**, allora le altre dita circondano il filo nello stesso verso delle linee del campo magnetico.

Regola dell'orologio

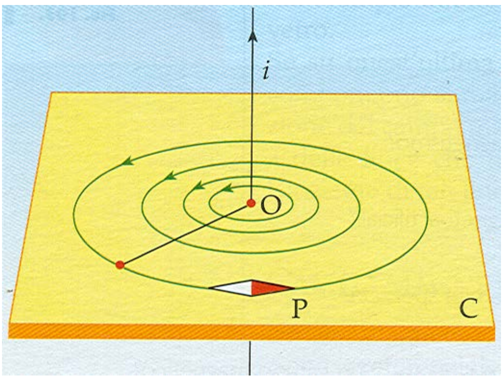
Un osservatore che guardi una spira o un solenoide percorsi dalla corrente **i**, e che veda circolare la corrente **i** in verso opposto alle lancette dell'orologio, vede uscire le linee del campo magnetico dall'interno della spira o del solenoide verso di sé.

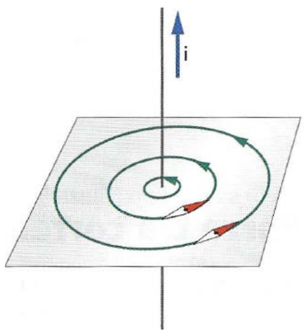


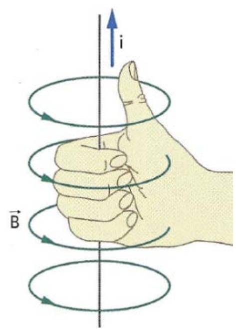


<table>
<tr>
<td></td>
<td>Un osservatore che guarda una spira percorsa da corrente vede la faccia NORD (la faccia SUD) se la corrente circola in verso antiorario (orario)</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Linee di un campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente

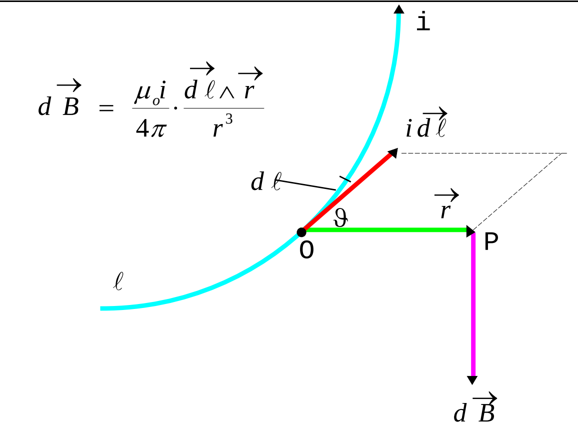






Prima legge di Laplace

Ci consente di calcolare il **campo magnetico** $\vec{B}$ generato da un conduttore metallico filiforme (**reoforo**) percorso dalla corrente **i**. Il vettore $\vec{B}$ in un generico punto dello spazio è da considerarsi come la somma vettoriale di infiniti contributi ciascuno derivante da un elemento di corrente facente parte del conduttore che crea il campo.



Sia ℓ un reoforo percorso dalla corrente i. Indichiamo con $d\ell$ un elemento infinitesimo del reoforo, con $i\,d\vec{\ell}$ un vettore avente come verso positivo quello della corrente i , come modulo $i\,d\ell$ e come direzione la retta tangente al reoforo nel punto O (origine dell'elemento infinitesimo del reoforo) , con $\vec{r}$ il vettore $P-O$. La **prima legge di Laplace** postula che un elemento $d\ell$ di conduttore percorso dalla corrente **i**, genera in un punto P alla distanza $\vec{r} = P-O$ un campo magnetico $\vec{B}$ individuato dalla seguente relazione vettoriale: $d\vec{B} = \frac{\mu_o i}{4\pi}\cdot\frac{d\vec{\ell}\wedge\vec{r}}{r^3}$ **[§]**

che, in termini scalari, diventa: $dB = \frac{\mu_o i}{4\pi}\cdot\frac{dl\cdot\sin\vartheta}{r^2}$

($i\,d\vec{\ell}$ è un vettore avente la direzione di $d\ell$, il verso della corrente convenzionale **i** ed il modulo $i\,d\ell$).

Un reoforo ℓ crea, in un punto P, un campo magnetico $\vec{B}$ che è la somma vettoriale di tutti i campi magnetici elementari $d\vec{B}$ creati dagli elementi $d\ell$ di cui esso è costituito. Se nel punto P voglio calcolare il campo magnetico generato da un filo di lunghezza finita e di estremi P e Q basta applicare la seguente formula: $B = \frac{\mu_o i}{4\pi}\cdot\int_P^Q\frac{d\ell\cdot\sin\vartheta}{r^2}$

Se nel punto P voglio calcolare il campo magnetico generato da un circuito chiuso avente forma qualsiasi e percorso dalla corrente stazionaria **i**, dobbiamo applicare la seguente formula:

$$B = \frac{\mu_o i}{4\pi}\cdot\oint\frac{d\ell\cdot\sin\vartheta}{r^2}$$

Campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente: legge di BIOT-SAVART

Un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente **i** genera nello spazio circostante un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$. Le linee del campo magnetico sono circonferenze situate su piani perpendicolari al filo ed aventi i centri sul filo stesso. Il verso delle linee di campo si ottiene applicando la regola della mano destra, oppure collocando in un punto della linea di campo un piccolo aghetto magnetico mobile. Il verso della linea di campo coincide col verso $S \to N$ dell'aghetto magnetico nella sua posizione di equilibrio. Una linea del campo magnetico orientata ci fornisce, punto per punto, la direzione ed il verso di $\vec{\mathbf{B}}$. Il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ prodotto da un filo rettilineo infinito percorso dalla corrente **i** è un vettore che:

1) giace sul piano α passante per il punto **P** e perpendicolare al filo

2) è tangente alla circonferenza che giace su α, passa per **P** ed ha come centro l'intersezione **O** di α col filo

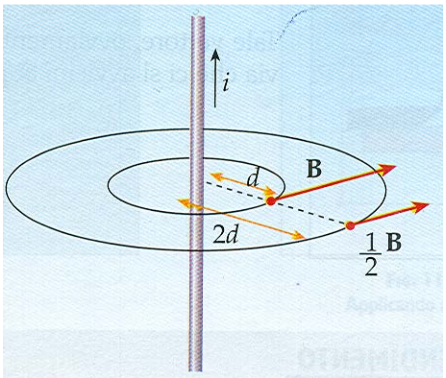
3) verso indicato in figura e ricavabile con la regola della mano destra.

4) modulo: $\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{r}}$

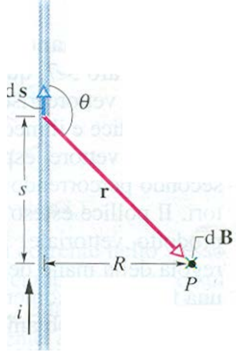
Quindi in un punto **P** distante r da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente **i** il campo magnetico vale: $\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{r}}$ **[1]** (Legge di Biot-Savart)

Legge di **Biot-Savart**

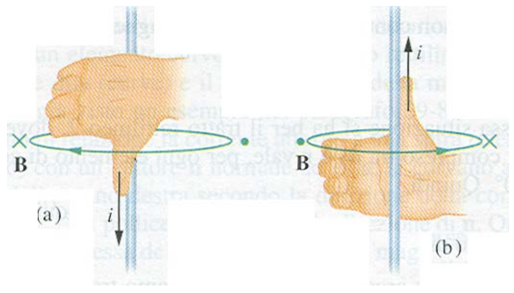
Linee del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente **i**.



Calcolo del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ dovuto a una corrente **i** passante in un lungo filo rettilineo, Il campo $d\vec{B}$ associato all'elemento di corrente $i \cdot ds$ ha direzione entrante nella pagina, come mostrato in figura.



La regola della mano destra dà il verso del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ dovuto al passaggio di una corrente in un filo. **(a)** La situazione della figura vista di lato. Il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ in ogni punto sulla sinistra del filo punta nella direzione entrante nella pagina **(x)**, nella direzione delle punte delle dita. **(b)** Se la corrente viene invertita, $\vec{B}$ in ogni punto sulla sinistra del filo ha verso uscente dalla pagina (**punto**).



Osservazione: Notare che il campo magnetico nel punto O generato da una delle due metà del filo rettilineo infinito vale la metà di quello generato dall'intero fili, cioè: $\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{r}}$

La **[1]** si dimostra calcolando il seguente integrale generalizzato:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = 2 \cdot \int_0^{+\infty} dB = 2 \cdot \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\vartheta}{r^2} d\ell = \frac{\mu_o i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\vartheta}{r^2} d\ell$$

Ho un filo rettilineo percorso dalla corrente **i** e voglio calcolare il modulo di $\vec{\mathbf{B}}$ in un generico punto **P** distante R dal filo. Per la prima legge di Laplace il contributo elementare di campo $\mathbf{dB} = \frac{\mu_o \mathbf{i}}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{d}\ell \cdot \sin\vartheta}{\mathbf{r}^2}$ nel punto **P**, dovuto all'elemento di corrente $i\, d\ell$, vale:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = 2 \cdot \int_0^{+\infty} dB = 2 \cdot \frac{\mu_o i}{4\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\vartheta}{r} d\ell = \frac{\mu_o i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\vartheta}{r^2} d\ell$$

$$R = r \cdot \sin(\pi - \vartheta) = r \cdot \sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \sin\vartheta = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{\ell^2 + \mathbf{R}^2}} \qquad r^2 = \ell^2 + R^2$$

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin\vartheta}{r^2} d\ell = \frac{\mu_o i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{R}{(R^2+\ell^2)\sqrt{R^2+\ell^2}} d\ell = \frac{\mu_o i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{R}{(R^2+\ell^2)^{\frac{3}{2}}} d\ell = \frac{\mu_o i}{2\pi R} \left[\frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}} \right]_0^{+\infty}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{R}} \qquad \lim_{\ell \to +\infty} \frac{\ell}{\sqrt{R^2+\ell^2}} = 1$$

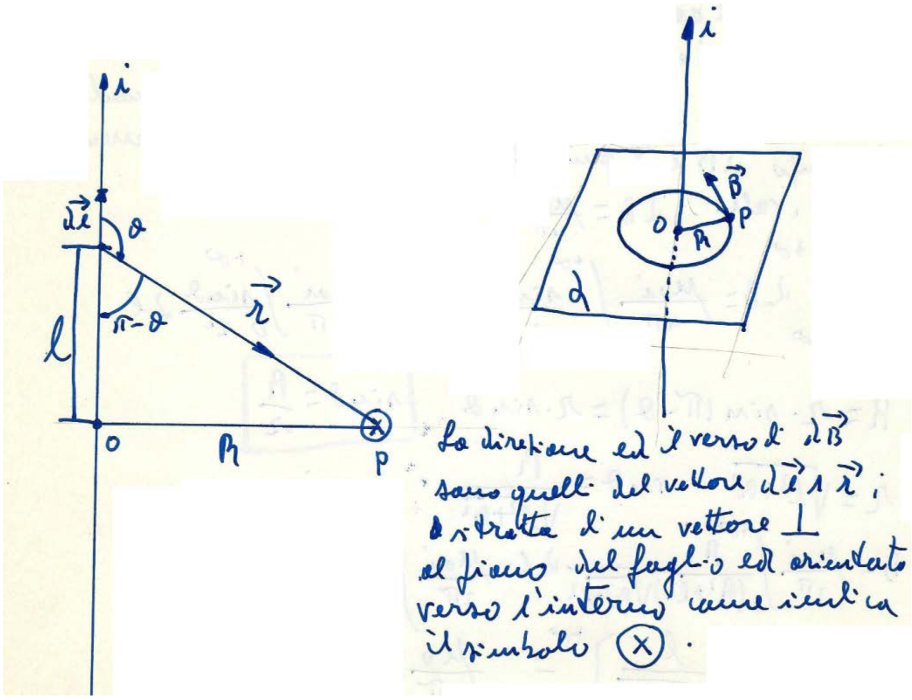
Posso calcolare l'integrale indefinito utilizzando la seguente sostituzione:

$$\ell = \mathbf{R} \cdot \mathbf{tg\,x} \quad \ell = 0 \;\Rightarrow\; tg\,x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0\;;\; \ell = +\infty \;\Rightarrow\; tg\,x = +\infty \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} \quad d\ell = \frac{R}{\cos^2 x} dx$$

$$\left(R^2+\ell^2\right)^{\frac{3}{2}}=\left(R^2\,tg^2x+R^2\right)^{\frac{3}{2}}=\left[R^2\left(tg^2x+1\right)\right]^{\frac{3}{2}}=\left[R^2\left(\frac{\sin^2+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\right]^{\frac{3}{2}}=\left[\frac{R^2}{\cos^2 x}\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{R^3}{\cos^3 x}\quad\Rightarrow$$

$$\left(R^2+\ell^2\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{R^3}{\cos^3 x}$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_o i}{2\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\cos^{\cancel{3}} x}{R^3}\cdot\frac{R}{\cancel{\cos^2 x}}d\,x=\frac{\mu_o i}{2\pi R}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d\,x=\frac{\mu_o i}{2\pi R}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{R}}$$



Questo risultato può essere ricavato in maniera più semplice applicando la legge di Ampere:

$$\oint_\ell \vec{B}\times d\,\vec{\ell}=\mu_o\,i$$

Dove ℓ è la linea del campo magnetico passante per il punto **P**; si tratta di una circonferenza concentrica col filo percorso dalla corrente **i** e passante per il punto **P**. $\vec{\mathbf{B}}$ e $d\,\vec{\ell}$ sono paralleli ed equiversi; $ang\left(\vec{B};d\,\vec{\ell}\right)=0$. $\oint_\ell \vec{B}\times d\,\vec{\ell}=\mu_o\,i \;\Rightarrow\; \oint_\ell B\cdot d\,\ell\cdot\cos 0=\mu_o\,i \;\Rightarrow\; B\oint_\ell d\,\ell=\mu_o\,i$

$$2\pi\,R\,B=\mu_o\,i\qquad \mathbf{B}=\frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{R}}$$

Campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente

Una spira circolare percorsa dalla corrente **i** genera nello spazio circostante un campo magnetico $\vec{B}_o$ che presenta queste caratteristiche:

1) Le linee del campo magnetico sono linee chiuse concatenate col filo circolare

Una sola linea di campo è **rettilinea** ed è quella coincidente con l'asse della spira; le altre invece sono curve, simmetriche rispetto all'asse stesso, che si addensano da una parte e dall'altra d ella spira sino ad assumere in vicinanza del filo una forma sensibilmente circolare

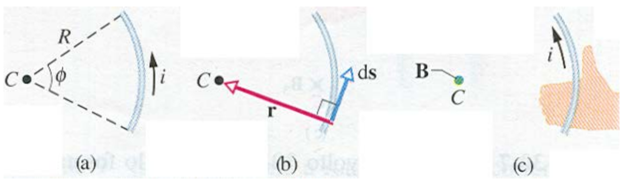
2) La **direzione del campo magnetico** $\vec{B_o}$ è in ogni punto tangente alle linee di campo e risulta in particolare perpendicolare al piano della spira. 3) Il **verso delle linee di campo** può essere individuato con la **regola dell'orologio**. Un osservatore che guarda la spira circolare percorsa dalla corrente **i**, se vede circolare la corrente in verso opposto alle lancette dell'orologio (**verso antiorario**) vede uscire le linee di campo dalla spira verso di sé 4) Nei punti **P** Dell'asse della spira a distanza **z** da questa il campo magnetico B_o vale: $\mathbf{B_o = \frac{\mu_o}{2} \cdot i \cdot \frac{r^2}{\sqrt{\left(r^2 + z^2\right)^3}}}$

In particolare, nel centro della spira di raggio r abbiamo: $\mathbf{B_o = \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{i}{r}}$

Linee del campo magnetico di una spira circolare percorsa dalla corrente i. Il campo magnetico è simile a quello di un magnete a sbarra. Per individuare il verso di $\vec{B_o}$ si può applicare la **regola della mano destra**. Se le dita della mano destra sono piegate nello stesso verso in cui fluisce la corrente i nella spira, il pollice fornisce il verso delle linee del campo magnetico che attraversano la spira. Il campo magnetico al centro di una spira ad arco di cerchio di ampiezza Φ e percorsa dalla corrente i vale: $B = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \int_0^{\Phi} d\,\Phi = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot [\Phi]_0^{\Phi} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \Phi$ $\quad \mathbf{B = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \Phi}$

con $\Phi = \frac{L}{r}$ e con: **L** = **arco di spira** percorsa dalla corrente **i**

(a) Un filo a forma di arco circolare con centro in **C** è percorso da una corrente **i**. **(b)** Per ogni elemento lungo l'arco, l'angolo tra ds ed r vale $90°$. **(c)** Determinazione del verso del campo magnetico in **C** dovuto alla corrente nel filo; il campo è uscente dalla pagina



Teorema della circuitazione di Ampere

Consideriamo una linea chiusa ℓ tracciata in un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ ed assumiamo su di essa, in maniera arbitraria , un **verso positivo**. Suddividiamo la linea ℓ in elementi $\Delta\ell$ piccoli a piacere (in teoria in elementi infinitesimi $d\ell$) Per ogni elemento $\Delta\ell$ $(d\ell)$ della linea chiusa si considerino poi:

1) il vettore $\overrightarrow{\Delta\ell}$ $(\overrightarrow{d\ell})$ avente per modulo $\Delta\ell$ $(d\ell)$ e per direzione e verso quelli della tangente alla curva nel punto considerato orientato secondo il verso positivo assunto sulla curva.

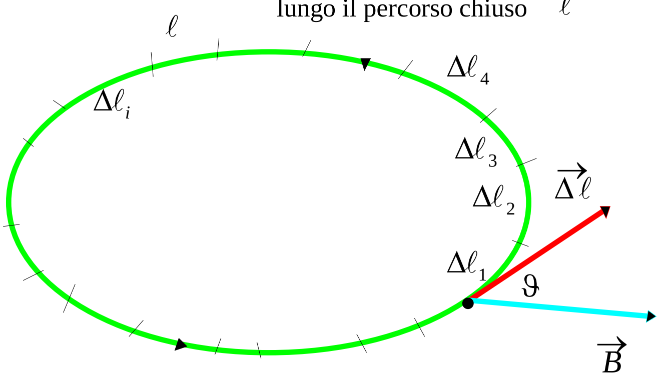
2) il prodotto scalare $\vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell} = B\cdot\Delta\ell\cdot\cos\vartheta$ $(\vec{B}\times\overrightarrow{d\ell} = B\cdot d\ell\cdot\cos\vartheta)$, ove $\vec{B}$ è il vettore campo magnetico nel punto in cui si considera $\overrightarrow{\Delta\ell}$ $(\overrightarrow{d\ell})$ e ϑ l'angolo formato dalle direzioni orientate di $\vec{B}$ e $\overrightarrow{\Delta\ell}$ $(\overrightarrow{d\ell})$.

La somma delle quantità $\vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell}$ $(\vec{B}\times\overrightarrow{d\ell})$ estesa a tutti gli elementi della curva chiusa ℓ prende il nome di **circuitazione del vettore $\vec{\mathbf{B}}$** lungo la linea chiusa ℓ nel verso prestabilito, cioè:

$$\mathbf{C_l(\vec{B}) = \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_1} + \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_2} + \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_3} + \cdots + \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_n} = \sum_{i=1}^{n}\vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_i}}$$

In termini differenziali abbiamo: $\mathbf{C_l(\vec{B}) = \oint \vec{B}\times\overrightarrow{d\ell} = \oint B\cdot\cos\vartheta\cdot d\ell}$

$$C_\ell(B) = \sum_{i=1}^{n} B\times\overrightarrow{\Delta\ell_i}$$ Circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo il percorso chiuso ℓ



La definizione di **circuitazione del vettore $\vec{\mathbf{B}}$**, precedentemente introdotta, è valida per un campo vettoriale $\vec{v}$ qualsiasi. Se risulta $\mathbf{C_\ell(\vec{v}) = 0}$, qualunque sia la linea chiusa ℓ, allora $\vec{v}$ dicesi **campo conservativo**. Il campo gravitazionale $\vec{g}$ e quello elettrostatico $\vec{E}$ sono conservativi in quanto risulta $C_\ell(\vec{g}) = 0$, $C_\ell(\vec{E}) = 0$. Il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ non è un campo conservativo in quanto, in generale, risulta: $C_\ell(\vec{B}) \neq 0$.

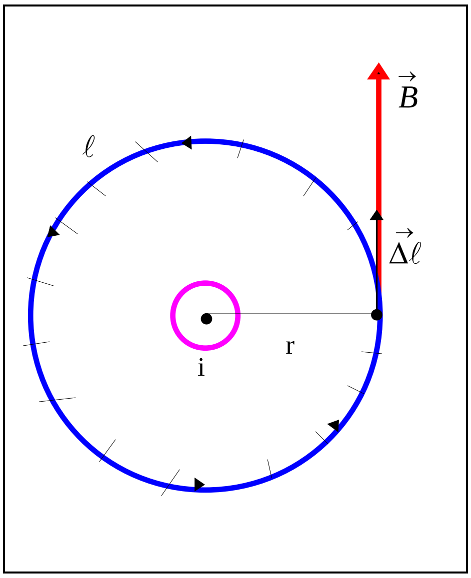
Dimostriamo adesso il **teorema della circuitazione di Ampere** per un campo magnetico prodotto da un filo infinito percorso dalla corrente $\mathbf{i}$. Il risultato ottenuto è estendibile ad un qualsiasi altro campo magnetico. Sia $\vec{\mathbf{B}}$ il campo magnetico creato da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente **i** e sia ℓ una circonferenza di raggio **r** concentrica col filo rettilineo, ad esso perpendicolare e con verso positivo (ad esempio quello antiorario) fissato ad arbitrio. La corrente **i** sarà considerata positiva (o negativa) secondo che alla corrente convenzionale del filo (quella dei protoni per intenderci) personificata (che va dai piedi al capo dell'osservatore) appaia (non appaia) antiorario il verso di percorrenza della linea chiusa secondo il verso positivo prefissato.

$$\mathbf{C_l(\vec{B}) = \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_1} + \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_2} + \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_3} + \cdots + \vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell_n} = B\cdot\Delta\ell_1 + B\cdot\Delta\ell_2 + B\cdot\Delta\ell_3 \cdots + B\cdot\Delta\ell_n}$$

$$\mathbf{C_l(\vec{B}) = B\cdot\left(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 \cdots + \Delta\ell_n\right) = 2\pi r B}$$

Ma per la legge di Biot-Savart abbiamo: $B = \dfrac{\mu_o}{2\pi}\cdot\dfrac{i}{r}$ per cui possiamo scrivere:

$$\mathbf{C_\ell(\vec{B})} = \frac{\mu_o}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{i}{\cancel{r}}\cdot\cancel{2\pi}\,\cancel{r} = \boldsymbol{\mu_o\, i} \qquad \mathbf{[§]}$$



Il punto centrale indica una corrente **i** nel filo, diretta dalla pagina del foglio verso l'esterno. L'angolo fra $\vec{B}$ e $\overrightarrow{\Delta\ell}$ è zero, sicché $\vec{B}\times\overrightarrow{\Delta\ell} = B\cdot\Delta\ell$

In questo caso la linea chiusa ℓ coincide con una linea del campo magnetico $\vec{B}$.

$\vec{B}$ è il campo magnetico generato dalla corrente **i** .

La [§] è valida in generale per qualsiasi configurazione del campo magnetico, per qualsiasi distribuzione di corrente e per qualsiasi linea chiusa.

Nel caso in cui la linea ℓ si avvolga N volte attorno al circuito percorso dalla corrente **i** abbiamo :

$$\mathbf{C_\ell(\vec{B}) = \boldsymbol{\mu_o} N i}$$

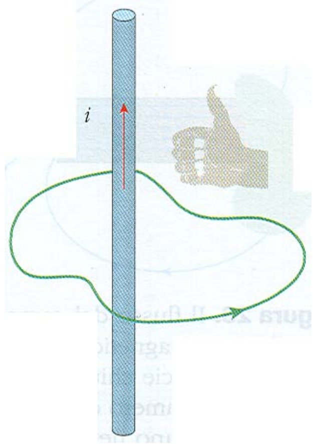
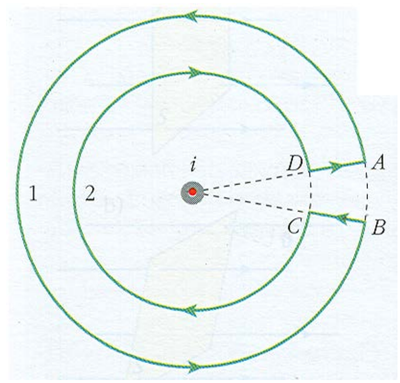
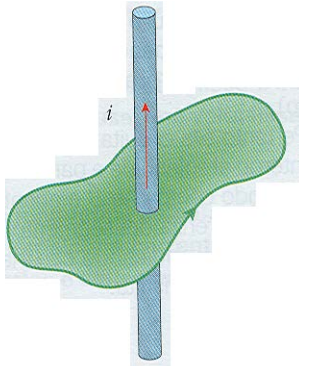
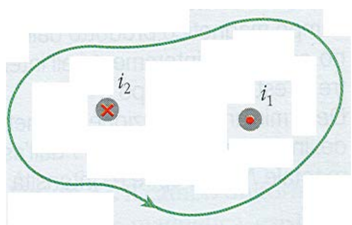
Se il campo magnetico $\vec{B}$ è generato da più circuiti percorsi rispettivamente dalle correnti di intensità $i_1, i_2, \cdots, i_n$ allora abbiamo : $\mathbf{C_\ell(\vec{B}) = \boldsymbol{\mu_o}\left(i_1 + i_2 + \cdots + i_n\right) = \sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{\mu_o}\, i_s = \boldsymbol{\mu_o}\, i}$

dove **i** rappresenta la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea chiusa ℓ.

Se la linea chiusa ℓ non è concatenata col circuito in cui passa la corrente **i**, allora abbiamo:

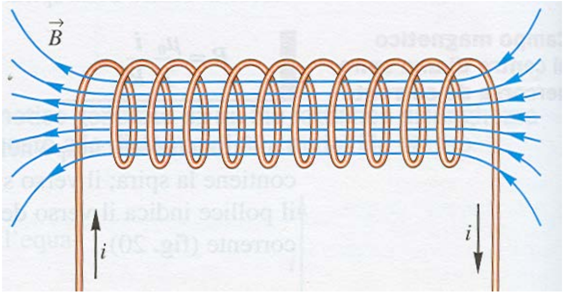
$$\mathbf{C_\ell(\vec{B}) = 0}$$

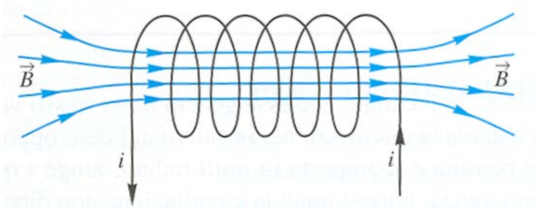
Il fatto che $C_\ell(\vec{B})$, in generale, è diversa da zero significa che il campo magnetico non è conservativo e quindi ad esso non è conveniente associare un potenziale magnetico in quanto questi verrebbe ad essere una funzione a più valori (cioè ad uno stesso punto di uno stesso campo magnetico verrebbero a corrispondere almeno due valori diversi del potenziale magnetico).

Stabilito il verso di percorrenza della linea chiusa su cui si calcola la circuitazione del campo magnetico, la corrente concatenata con la linea è assunta con segno positivo se circola nel verso indicato dal pollice della mano destra quando le altre dita sono avvolte nel verso della linea; in caso contrario è assunta con segno negativo		La circuitazione del campo magnetico lungo il percorso chiuso $ABCDA$, con il quale la corrente i che genera il campo non è concatenata, è nulla	
E' concatenata con una linea chiusa ogni corrente che attraversi una qualunque superficie, anche non piana, avente come contorno la linea considerata		Percorrendo la linea chiusa in senso antiorario, la corrente concatenata i_1, uscente dal foglio, è positiva; la corrente concatenata i_2, entrante, è negativa. La corrente totale concatenata con la linea è $\mathbf{i_c = i_1 - i_2}$	

Campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente

Si chiama solenoide un avvolgimento di filo conduttore a forma elicoidale di passo piccolissimo. (Passo di un solenoide è la distanza che intercorre tra due spire consecutive).





Linee del campo magnetico generato da un **solenoide**: il campo magnetico è **uniforme** all'interno del solenoide e **nullo** all'esterno.

Le spire sono quindi molto vicine e, in prima approssimazione, possiamo considerare il solenoide come formato da un sistema di N spire uguali e coassiali.

Ciascuna spira può essere considerata piana. Le spire sono percorse dalla corrente **i**, sono affiancate in modo da costituire una superficie cilindrica le cui generatrici sono rette tra loro parallele e perpendicolari al piano di ciascuna spira.
Se, per esempio, le spire sono circolari, il solenoide ha la forma di un cilindro circolare ed il suo asse, normale al piano di ciascuna spira, è l'asse del solenoide. Sia $n = \frac{N}{\ell}$ il numero di spire riferite alla lunghezza ℓ del solenoide (numero di spire per unità di lunghezza)

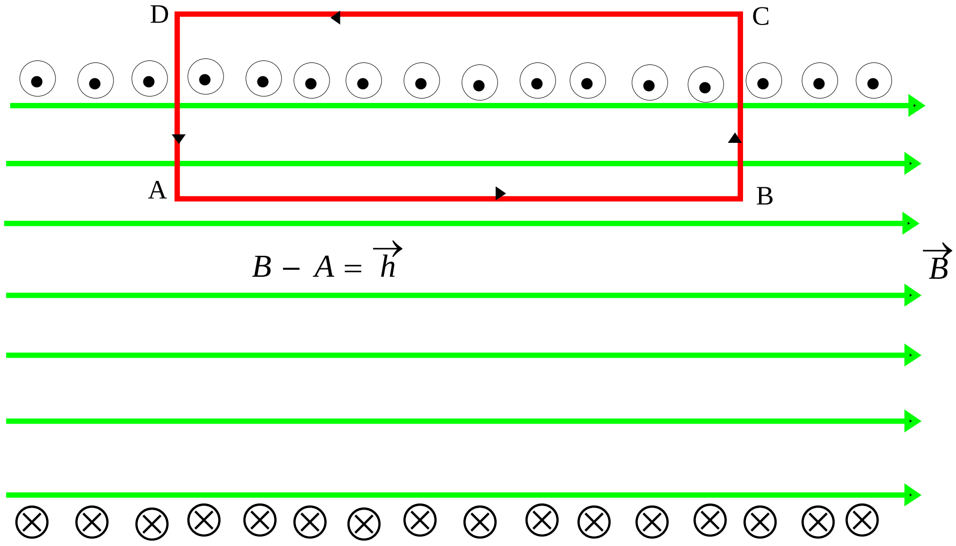
In un solenoide infinito (nella pratica si considera tale un solenoide che abbia lunghezza ℓ grande rispetto al raggio r di ciascuna spira: $\ell \rangle\rangle r$) il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ è (debole) nullo all'esterno mentre all'interno è un vettore:

- avente come verso quello che si ricava applicando la regola dell'orologio o la regola della mano destra • come direzione l'asse del solenoide • come modulo:

$$\mathbf{B} = \mu_o \frac{\mathbf{N}}{\ell}\mathbf{i} = \mu_o \mathbf{n}\,\mathbf{i} \qquad [*§]$$

Il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ di un solenoide è direttamente proporzionale al numero totale N delle spire ed all'intensità i della corrente che vi circola ed inversamente proporzionale alla lunghezza ℓ del solenoide. Il campo magnetico **B** di un solenoide è direttamente proporzionale all'intensità i della corrente che vi circola ed al numero n delle spire per unità di lunghezza.
Mediante il solenoide possiamo creare un campo magnetico uniforme di valore noto, cosi come con un condensatore a facce piane e parallele possiamo creare campi elettrici uniformi.
Per dimostrare la formula [*§] basta calcolare la circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo il percorso rettangolare $ABCD$ avente come dimensioni $AB = h$, $BC = k$.
Se teniamo presente che: 1) lungo il tratto CD è $\vec{B} = \vec{o}$ 2) lungo i tratti AD e BC il campo $\vec{\mathbf{B}}$ è perpendicolare al percorso 3) lungo il tratto AB il vettore $\vec{\mathbf{B}}$ è **parallelo** al percorso , possiamo scrivere : $C_{ABCD}(\vec{B}) = C_{AB}(\vec{B}) + C_{BC}(\vec{B}) + C_{CD}(\vec{B}) + C_{DA}(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{h} = B \cdot h$

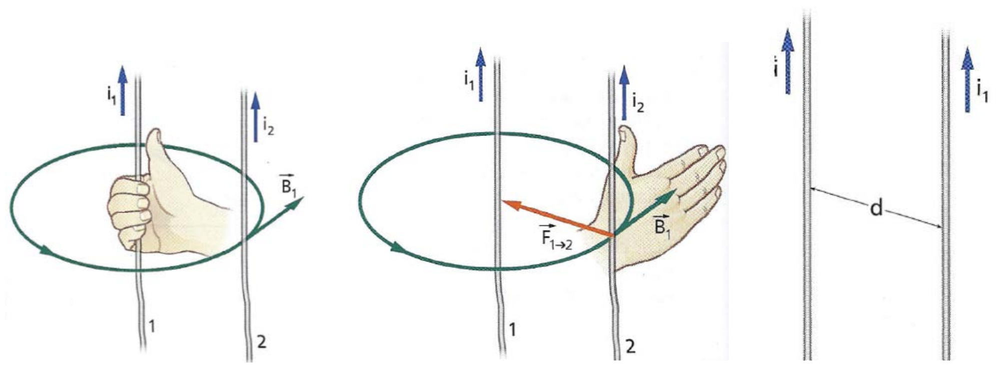
Per $h = \ell$ abbiamo : $\mathbf{C_{ABCD}(\vec{B}) = B \cdot \ell}$ Applicando il teorema della circuitazione di Ampere abbiamo : $C_{ABCD}(\vec{B}) = \mu_o N i$ e quindi : $B \cdot \ell = \mu_o N i$ $\mathbf{B} = \mu_o \frac{\mathbf{N}}{\ell}\mathbf{i} = \mu_o \mathbf{n}\,\mathbf{i}$

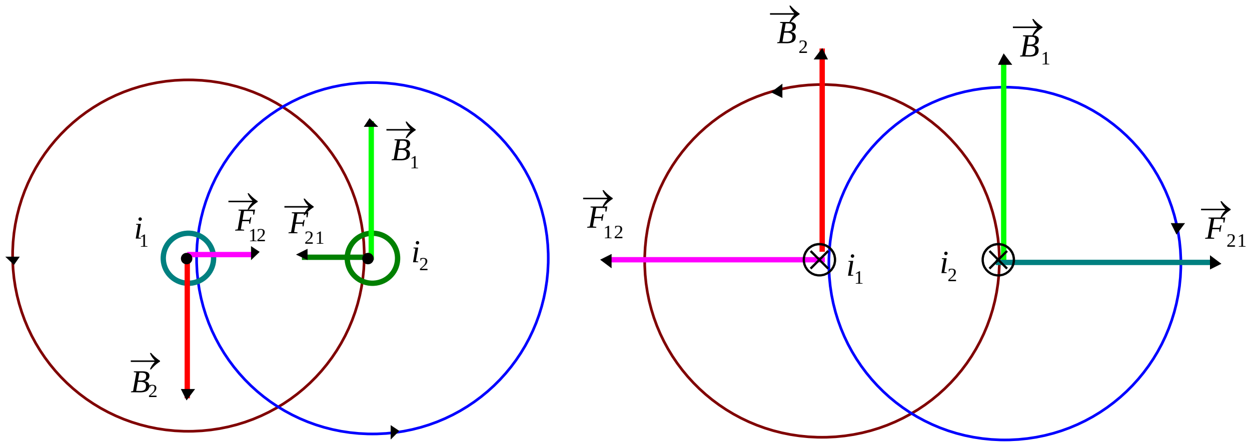


- Un solenoide percorso dalla corrente **i** genera al suo un campo magnetico uniforme
- calcolo del campo magnetico ottenuto all'interno di un solenoide mediante il teorema della circuitazione di Ampere

Interazione elettrodinamica fra due circuiti rettilinei percorsi da corrente: definizione di ampere

Due fili rettilinei e paralleli percorsi da corrente interagiscono fra loro esercitando l'uno sull'altro forze uguali ed opposte. Tali forze sono attrattive (**repulsive**) se le due correnti hanno lo stesso verso (verso opposto). Le forze che si esercitano tra i due fili sono di tipo magnetico.





Nel caso di due fili indefiniti (in pratica molto lunghi rispetto alla loro distanza d) percorsi da correnti elettriche rispettivamente d'intensità $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$, **la corrente di ciascun filo agisce, su un tratto lungo ℓ dell'altro filo, con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle intensità delle due correnti, inversamente proporzionale alla distanza d tra i due fili e dipende dalla natura del mezzo in cui si trovano**.

Nel vuoto abbiamo: $$\mathbf{F} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \mathbf{i_1 i_2} \cdot \frac{\ell}{\mathbf{d}} \qquad [A]$$

L'interazione tra fili rettilinei indefiniti percorsi da corrente viene utilizzata per definire l'unità di misura della corrente elettrica nel Sistema Internazionale (S.I.).

Assegnato alla permeabilità magnetica nel vuoto μ_o il valore arbitrario $4\pi \cdot 10^{-7}$ e ponendo nella [A] $i_1 = i_2 = 1\,ampere = 1A$, $\ell = 1m$, $d = 1m$ abbiamo: $F = 2 \cdot 10^{-7}\ N$ e quindi è pienamente giustificata la seguente definizione di ampere.

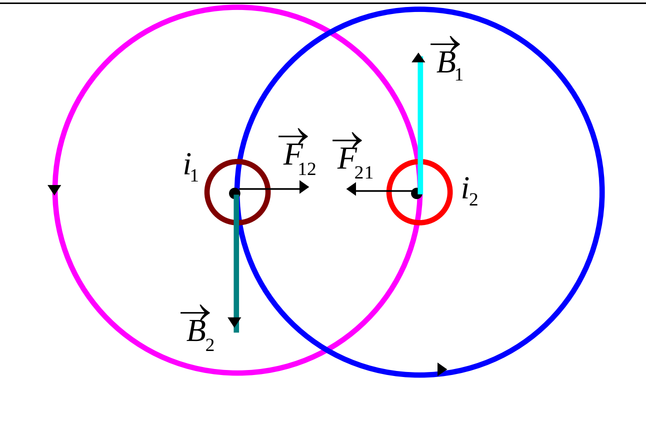
L'ampere è l'intensità di una corrente costante che, passando in due conduttori paralleli, rettilinei, indefiniti, di sezione trascurabile, posti a distanza di un metro nel vuoto, determina una forza uguale a $2 \cdot 10^{-7}$ *newton* su ogni metro di filo.

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{newton}{(ampere)^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{W_b}{A \cdot m} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{henry}{metro}$$

$$[\mu_o] = \left[\frac{F}{i^2}\right] = \left[F \cdot i^{-2}\right] = \left[L \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}\right]$$

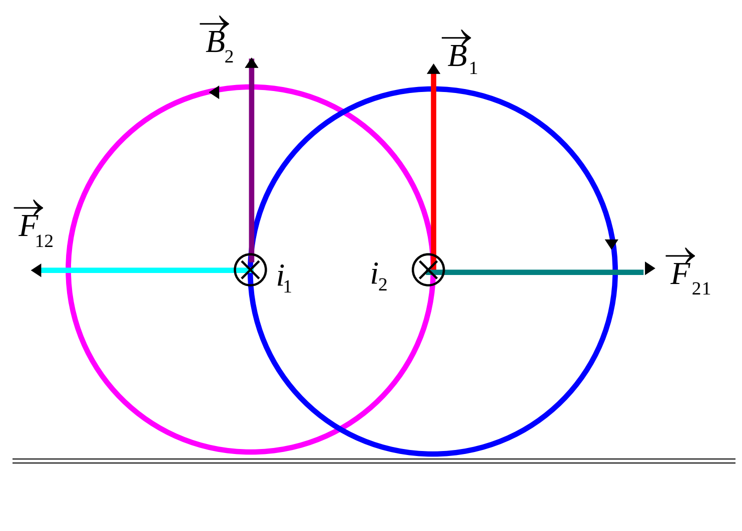
Convenzione americana:

il simbolo ● indica che il filo percorso dalla corrente **i** è ortogonale al piano del foglio ed il verso della corrente i è uscente, cioè va dal foglio al volto dell'osservatore



Convenzione americana:

il simbolo ⊗ indica che il filo percorso dalla corrente i è ortogonale al piano del foglio ed il verso della corrente i è entrante , cioè va dal volto dell'osservatore al piano del foglio



Il vettore eccitazione magnetica $\vec{H}$

Certe formule dell'elettromagnetismo assumono una forma più semplice se, accanto al vettore campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$, introduciamo un altro vettore $\vec{\mathbf{H}}$ detto vettore eccitazione magnetica definito nel vuoto, in maniera formale, dalla relazione: $\vec{\mathbf{B}}_o = \mu_o \vec{\mathbf{H}}_o$

Questo nuovo vettore $\vec{\mathbf{H}}_o$ non è necessario per descrivere le proprietà del campo magnetico nel vuoto , il quale è adeguatamente rappresentato dal solo vettore $\vec{\mathbf{B}}_o$.

Dal punto di vista didattico è però utile definire tale vettore già nel vuoto perché, come vedremo in seguito, per rappresentare le proprietà magnetiche nella materia è necessario introdurre due vettori: il vettore campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ ed il vettore eccitazione magnetica $\vec{\mathbf{H}}$ i quali godono nella materia delle stesse proprietà di cui godono rispettivamente i vettori $\vec{\mathbf{B}}_o$ ed $\vec{\mathbf{H}}_o$ nel vuoto.

Nella materia $\vec{\mathbf{B}}$ ed $\vec{\mathbf{H}}$ sono legati dalla seguente relazione: $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$

con $\mu = \mu_o \mu_r$.

Le formule precedentemente ricavate , espresse mediante $\vec{\mathbf{H}}$, assumono la seguente forma:

$H_o = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$ legge di Biot e Savart $d\vec{H}_o = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$ prima legge di Laplace

$C_\ell\left(\vec{H}_o\right) = \Sigma i$ teorema della circuitazione di Ampere

$H_o = ni$ modulo del vettore eccitazione magnetica all'interno del solenoide

Nel S.I. l'unità di misura del vettore eccitazione magnetica è l'ampere spira al metro ($\frac{Asp}{m}$) definita come il modulo del vettore H_o all'interno di un solenoide vuoto quando questi ha una spira per ogni metro di lunghezza ed è attraversato dalla corrente di un ampere.

OSSERVAZIONE

Fino a poco tempo fa impropriamente si diceva:

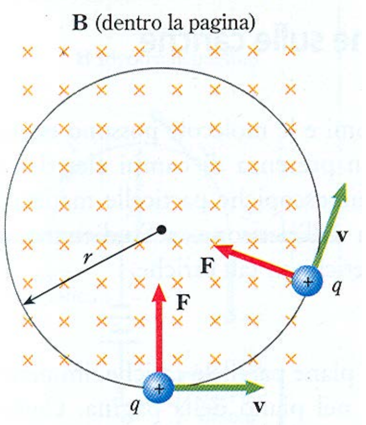
$\vec{\mathbf{B}}$ = vettore induzione magnetica $\vec{\mathbf{H}}$ = intensità del campo magnetico

$\vec{\mathbf{B}}_o = \mu_o \vec{\mathbf{H}}_o$ relazione valida nel vuoto $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$ relazione valida in un mezzo avente permeabilità magnetica relativa μ_r

Oggi invece diciamo: $\vec{\mathbf{B}}$ = vettore campo magnetico

$\vec{\mathbf{H}}$ = vettore eccitazione magnetica

Moto di una carica puntiforme q in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$



Vogliamo dimostrare che una carica puntiforme **q** quando entra in un campo magnetico uniforme con velocità $\vec{v}$ perpendicolare al vettore campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ viene deviata lungo una traiettoria circolare di raggio $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{m\,v}}{\mathbf{q\,B}}$ dove **m** rappresenta la massa della carica **q** .

Questo significa che la carica puntiforme **q** si muove su un piano perpendicolare a $\vec{\mathbf{B}}$ ed il suo moto è circolare uniforme, in quanto l'effetto della **forza magnetica** che agisce su di essa è quello di cambiare la direzione della velocità vettoriale $\vec{v}$ senza cambiarne il modulo **v**. Noi sappiamo che una carica **q** in moto in un campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ subisce l'azione della forza magnetica $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Essendo $\vec{f}$ perpendicolare alla velocità $\vec{v}$ e quindi allo spostamento $\vec{s}$ della carica **q** (dalla meccanica sappiamo che la velocità vettoriale $\vec{v}$ e lo spostamento $\vec{s}$ hanno sempre la stessa direzione e lo stesso verso) la forza magnetica non può compiere lavoro e non può variare l'energia cinetica della carica **q**. L'effetto della forza magnetica $\vec{f}$ è quello di cambiare la direzione della velocità vettoriale $\vec{v}$ senza cambiarne il modulo. Questo significa che una carica puntiforme **q** in moto sotto l'azione di una forza magnetica non può descrivere una traiettoria rettilinea ma una traiettoria curvilinea e se il campo magnetico è uniforme il moto è circolare uniforme in quanto l'accelerazione scalare (cioè tangenziale) è nulla, la **velocità scalare è costante** e l'accelerazione centripeta è diversa da zero e costante. Consideriamo, dunque, il moto di una carica puntiforme **q** immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ (cioè avente lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso in tutti i punti dello spazio sede del campo magnetico).

Supponiamo che la velocità $\vec{v}$ della carica puntiforme **q**, quando questa penetra nella regione sede del campo magnetico, sia perpendicolare a $\vec{\mathbf{B}}$.

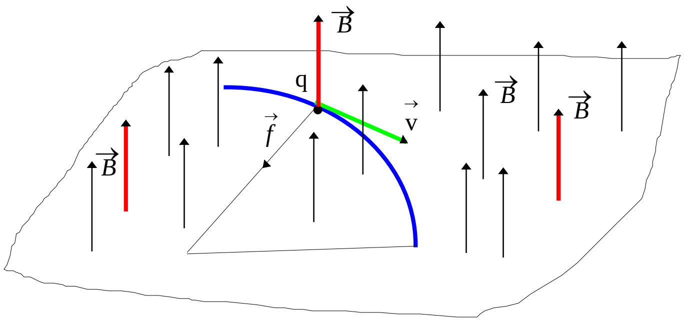
In questo caso la carica **q** avente massa **m** si muove di moto circolare uniforme in quanto soggetta da una forza centripeta che è la forza magnetica: $\mathbf{f = q \cdot v \cdot B \cdot \sin 90° = q \cdot v \cdot B}$

La forza magnetica **f** fornisce la forza centripeta necessaria per il moto circolare .

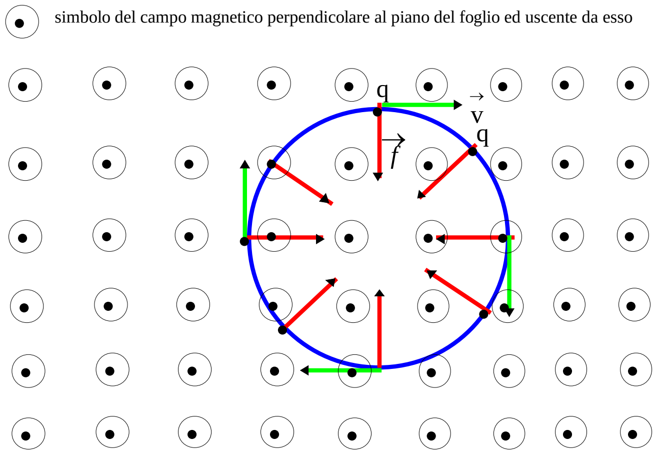
Per determinare la traiettoria di una carica **q** che si muove in un campo magnetico uniforme ortogonale alla sua velocità iniziale basta imporre che la forza magnetica sia uguale al prodotto della massa **m** della carica **q** per la sua accelerazione centripeta , cioè basta applicare la legge fondamentale della dinamica: $\mathbf{f = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r}}$. Ma : $f = q \cdot v \cdot B$ per cui possiamo scrivere:

$$q v B = \frac{m v^2}{r} \qquad\qquad \mathbf{r = \frac{m v}{q B}}$$

Una carica **q** in moto perpendicolarmente ad un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme descrive una traiettoria circolare con velocità vettoriale $\vec{v}$ avente modulo costante.



Traiettoria di una carica (positiva) **q** che si muove parallelamente al piano della pagina in un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare a tale piano ed uscente da esso. La forza $\vec{f}$ a cui la carica è sottoposta è costante e diretta perpendicolarmente alla velocità $\vec{v}$. Il moto risultante è circolare uniforme.



Se la carica **q** è l'elettrone la formula precedente diventa: $r = \frac{m}{e} \cdot \frac{v}{B}$

$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$ = velocità angolare della carica **q** $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2m\pi}{qB}$ = **periodo** del moto circolare uniforme $f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2m\pi}$ = **frequenza** del moto circolare uniforme

Il periodo **T** di rivoluzione, a parità di massa **m** e di carica **q**, è **indipendente dalla velocità della particella**. Fra le particelle uguali, quelle aventi grandi velocità , si muoveranno su circonferenze di grande raggio , ma tutte indistintamente impiegheranno lo stesso tempo **T** a descrivere una intera circonferenza nel campo magnetico.

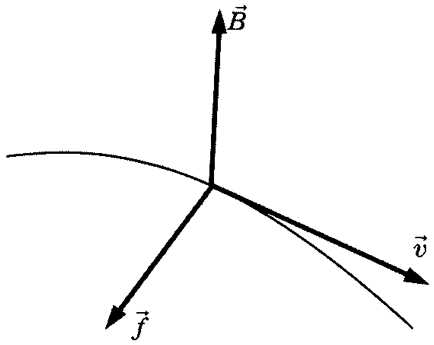


Fig. 3.8 **I vettori nella Forza di Lorentz**

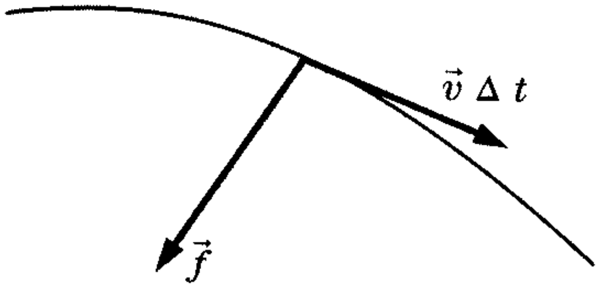


Fig. 3.9 Il lavoro della forza di Lorentz è **nullo**

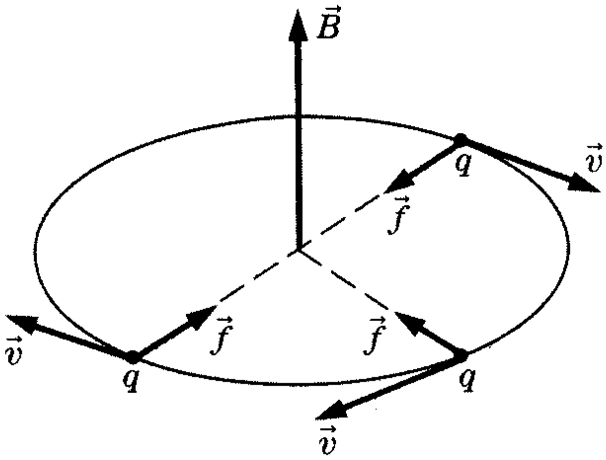


Fig. 3.10 Carica in un campo costante

La traiettoria di una carica q in un campo magnetico $\vec{B}$ costante è confinata in un piano ortogonale a $\vec{B}$ se la velocità inizialmente è ortogonale a $\vec{B}$

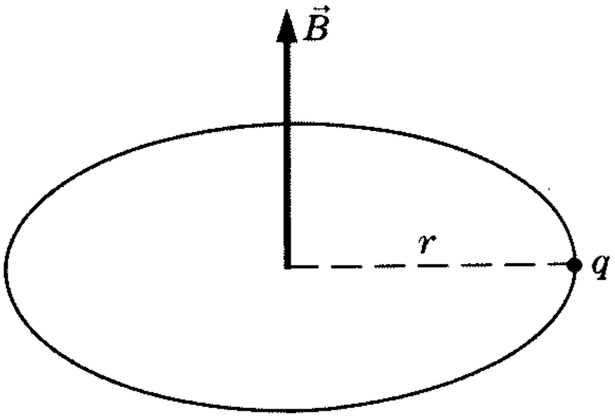
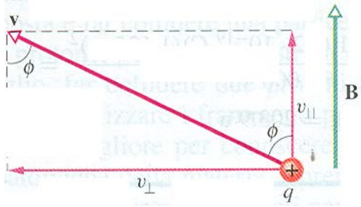


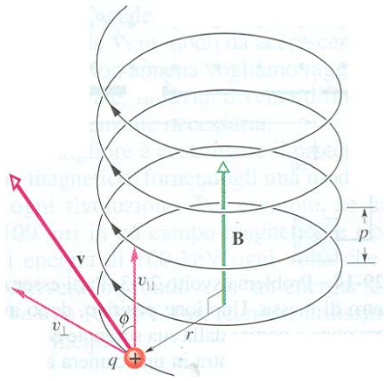
Fig. 3.11 Forza di Lorentz

La traiettoria in un campo magnetico costante è una circonferenza di raggio $r = \dfrac{m\,v}{q\,B}$

Adesso vogliamo trovare la traiettoria descritta dalla carica elettrica q quando entra nel campo magnetico uniforme $\vec{B}$ con una velocità $\vec{v}$ formante un angolo ϑ col vettore $\vec{B}$. In questo caso possiamo immaginare di decomporre la velocità vettoriale $\vec{v}$ in due componenti; una, $\vec{v}_{//}$, parallela al vettore $\vec{B}$; l'altra, $\vec{v}_{\perp}$ perpendicolare al vettore $\vec{B}$.



Una particella si muove in un **campo magnetico uniforme** e la sua velocità forma un angolo Φ con la direzione del campo



La carica q segue un percorso ad elica di raggio **r** e passo **p**

Al moto circolare uniforme prodotto dal componente $\vec{v}_{\perp}$ si sovrappone il moto rettilineo uniforme generato dal componente $\vec{v}_{//}$. Il moto risultante è un moto elicoidale. Il moto della carica q risulta dalla composizione di un moto circolare uniforme (perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$) e di un moto rettilineo uniforme (parallelo al campo magnetico $\vec{B}$). Risulta:

$\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{m\,v_{\perp}}}{\mathbf{qB}} = \dfrac{\mathbf{m\,v\cdot \sin\vartheta}}{\mathbf{qB}}$ = **raggio della circonferenza**

$\mathbf{T} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\,m\,\pi}{q\,B}$ = **periodo del moto circolare uniforme**

$\mathbf{x(t) = v_{//}\cdot t = v\cdot \cos\vartheta \cdot t}$ = **legge oraria del moto rettilineo uniforme**

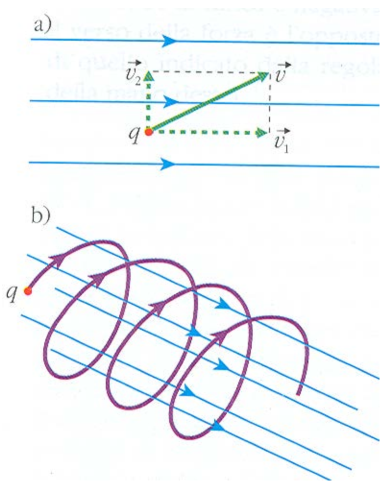
Il componente parallelo $\vec{v}_{//}$ determina il passo p dell'elica, cioè la distanza tra due spire adiacenti. Quindi il passo dell'elica può essere determinato calcolando la distanza coperta dopo un tempo uguale al periodo T, tempo in cui la carica riprende la sua posizione iniziale sulla circonferenza.

p = **passo dell'elica** = spazio percorso nella direzione del campo magnetico durante un giro completo.

$$\mathbf{x(T) = p = v_{//}\cdot T = v\cdot \cos\vartheta \times T = \frac{v_{//}}{v} = \frac{v\cdot\cos\vartheta}{v}}$$

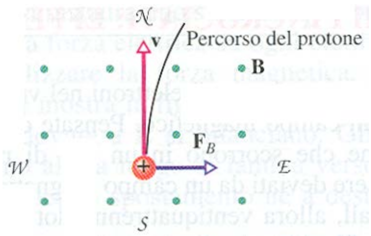
Una particella carica che penetra in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ con una velocità $\vec{v}$ avente, rispettivamente, componenti $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ nella direzione del campo e nel piano perpendicolare al campo (a) descrive una traiettoria elicoidale (b) avente raggio $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{m\,v_{\perp}}}{\mathbf{qB}} = \dfrac{\mathbf{m\,v\cdot\sin\vartheta}}{\mathbf{qB}}$

e passo $\mathbf{p = v_{//}\cdot T = v\cdot\cos\vartheta\cdot T = \dfrac{v_{//}}{v} = \dfrac{v\cdot\cos\vartheta}{v}}$



H.R.W. Pagina 636 N° 29.1 Problema Risolto

Un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ di intensità $B = 1,2\,mT = 1,2 \cdot 10^{-3}\,T$, è diretto verso l'alto in una camera di un laboratorio. Un protone con energia cinetica $K = 5,3\,MeV$ entra nella camera, muovendosi orizzontalmente da Sud a Nord.



Quale forza di deflessione agisce sul protone appena entra nella camera? Quanto vale l'accelerazione del protone? Si tratta di una accelerazione tangenziale o di una accelerazione centripeta? Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza magnetica in un secondo?

$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\,kg \quad q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C \quad 1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}\,J \quad K = 5,3\,MeV = 5,3 \cdot 10^{6}\,eV$

Per calcolare la velocità del protone basta applicare la seguente formula: $K = \frac{1}{2} m\,\mathrm{v}^2$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (5,3) \cdot 10^{6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-14}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{\frac{16,96}{1,67} \cdot 10^{14}} = 10^{7}\sqrt{10,16} = 3,2 \cdot 10^{7}\,\frac{m}{s} \qquad \mathrm{v} = 3,2 \cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

Sul protone agisce la forza di Lorentz dovuta alla presenza del campo magnetico $\vec{B}$

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{B} \;\Rightarrow\; F_m = q \cdot \mathrm{v} \cdot B = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,2 \cdot 10^{7} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \qquad F_m = 6,1 \cdot 10^{-15}\,N$$

Questa può sembrare una forza assai modesta, ma agisce su una particella di massa piccola, producendo una grande accelerazione centripeta: $\mathbf{a_c = \frac{F_m}{m_p} = \frac{6,1 \times 10^{-15}}{1,67 \times 10^{-27}} = 3,7 \times 10^{12}\,\frac{m}{s^2}}$

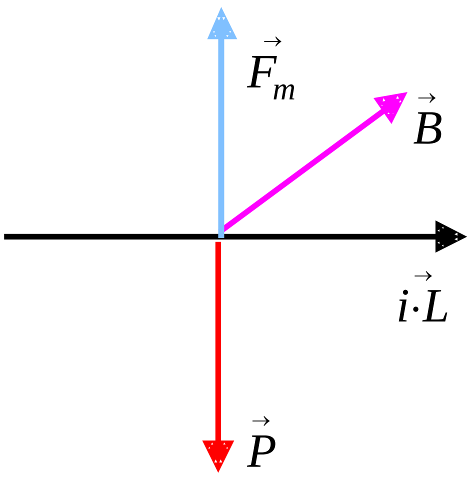
Si tratta di una accelerazione centripeta in quanto la forza magnetica è perpendicolare alla velocità vettoriale del protone.

La direzione della forza magnetica è perpendicolare al piano individuato dalla velocità vettoriale del protone e dal vettore $\vec{B}$. Il verso della forza magnetica si deduce applicando la regola della mano destra; essa è orientata da **ovest** verso **est**. Se la carica della particella che attraversa il campo magnetico fosse negativa, la forza magnetica avrebbe verso opposto, cioè da est verso ovest.

La forza magnetica, essendo perpendicolare alla velocità vettoriale e quindi anche allo spostamento, non compie lavoro.

H.R.W. Pagina 645 N° 29.5 Problema Risolto

Un filo rettilineo orizzontale è percorso da una corrente $i = 28\,A$. Qual è l'intensità e la direzione del campo magnetico $\vec{B}$ necessaria a "fare galleggiare" il filo, cioè a bilanciare il suo peso? La densità lineare del rame è $46,6\frac{g_r}{m}$.



$\lambda = \frac{m}{L} = 46,6\frac{g_r}{m} = 46,6\cdot 10^{-3}\frac{kg}{m}$

La figura mostra un segmento di filo lungo L attraversato dalla corrente **i** orientata da sinistra ver4so destra. Il filo percorso dalla corrente i "galleggia" se la forza magnetica $\vec{F}_m = i\vec{L} \wedge \vec{B}$ deve essere uguale ed opposta al peso $\vec{P} = m\cdot\vec{g}$ del filo.

$$F_m = P \quad \Rightarrow \quad i\,L\,B = m\,g \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m}{L}\frac{g}{i} = \frac{\lambda\,g}{i} = \frac{46,6\cdot 10^{-3}\cdot 9,8}{28} = \frac{456,68}{28}\cdot 10^{-3}$$

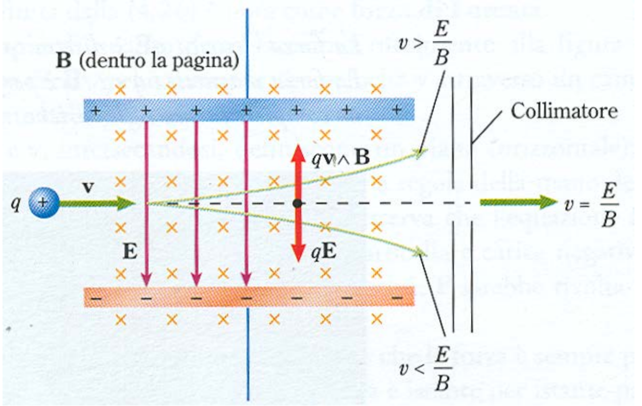
$$B = 16,31\cdot 10^{-3}\,T = 1,631\cdot 10^{-2}\,T$$

Questo valore è circa 160 volte l'intensità del campo magnetico terrestre.

Selettore di velocità

La figura mostra una coppia di armature piane parallele cariche, immerse in un campo magnetico uniforme entrante nel piano della pagina. Tra le armature piane si crea un campo elettrico uniforme, diretto dall'armatura positiva a quella negativa. Per via delle direzioni del campo magnetico e del campo elettrico, questo dispositivo viene a volte detto selettore a campi incrociati. Supponiamo che l'apparecchiatura si trovi in una camera a vuoto, in modo da poter trascurare l'attrito dell'aria. Immagina che una particella carica $+q$ entri nella regione dei campi incrociati con una velocità v parallela alle armature, come mostrato in figura. La forza elettrica di modulo $q\cdot E$ è diretta verso il basso e la forza magnetica di modulo $q\,\text{v}\,\text{B}$ è diretta verso l'alto. Se la carica è negativa, ciascuna delle due forze inverte il proprio orientamento. In generale la particella, attraversando la regione interessata dai campi, verrà deviata verso l'alto o verso il basso, a seconda di quale forza è maggiore. Solo nel caso in cui le forze si equilibrino, la carica attraverserà la regione senza essere deviata. Questa condizione richiede: $qE = q\text{v}B$ ovvero $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}$

Le particelle che possiedono esattamente questa velocità potranno passare attraverso delle piccole aperture allineate con l'asse centrale del dispositivo; le particelle con qualsiasi altro valore della velocità saranno invece arrestate. Il selettore permette quindi, regolando i valori di E e B, di selezionare da un fascio di particelle con varia velocità quelle aventi la medesima velocità.

Selettore di velocità Campo elettrico e campo magnetico incrociati. Se una carica positiva si muove verso destra, essa è soggetta ad una forza elettrica diretta verso il basso e ad una forza magnetica diretta verso l'alto. Queste forze si fanno equilibrio se la velocità della carica è legata alle intensità dei due campi dalla relazione $\text{v} \cdot \text{B} = \text{E}$. Il selettore di velocità lascia passare senza deiarle solo le carica che hanno velocità $\text{v} = \frac{\text{E}}{\text{B}}$.	

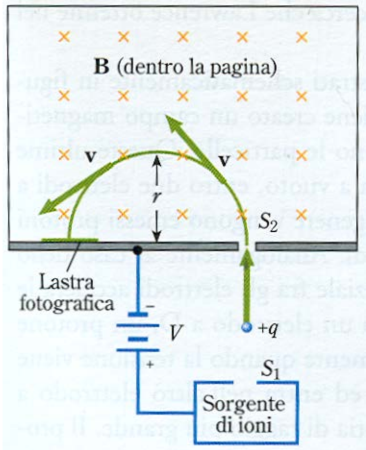
Spettrometro o spettrografo di massa

Lo spettografo di massa, realizzato da **Francis William Aston** nel 1919 e poi perfezionato da altri fisici, fu progettato per misurare le masse degli **isotopi**, o meglio il rapporto $\frac{q}{m}$ (**carica specifica**) tra la massa e la carica dell'isotopo considerato. Operando con gas chimicamente puri, si sono trovati diversi valori della carica specifica degli ioni, corrispondenti alla stessa carica elettrica ma a diversa massa. Si è concluso che esistono elementi identici, aventi lo stesso numero atomico, ma diversa massa atomica, chiamati **isotopi**. Ione è un atomo che ha perduto o acquistato uno o più elettroni. La figura mostra un disegno schematico di uno spettrografo di massa: gli ioni provenienti da una sorgente vengono accelerati da una differenza di potenziale ΔV ed entrano nel campo magnetico uniforme prodotto da un elettromagnete. Gli ioni entrano nel campo magnetico con una energia cinetica data da: $K = E_c = \frac{1}{2} m \text{v}^2 = q \cdot \Delta V$ Gli ioni percorrono una semicirconferenza di raggio r e vanno a colpire un rivelatore, ad esempio ina lastra fotografica, posto a distanza $2r$ da S_2. Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni:

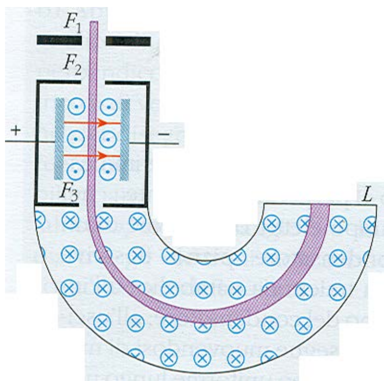
$$K = E_c = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 = q \cdot \Delta V \qquad r = \frac{m}{q} \cdot \frac{\mathrm{v}}{B} \quad \text{otteniamo:} \quad m = \frac{q B^2 r^2}{2 \Delta V} \quad \text{ed anche:} \quad \frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2 \Delta V}$$

$$r = \frac{m}{q} \cdot \frac{\mathrm{v}}{B} \Rightarrow \mathrm{v}^2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2} \quad \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 = q \cdot \Delta V \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot \frac{r^2 q^{\cancel{2}} B^2}{m^{\cancel{2}}} = \cancel{q} \cdot \Delta V \Rightarrow m = \frac{q B^2 r^2}{2 \Delta V}$$

Dato che, q, ΔV e B sono noti, un'accurata misura del raggio r permette di determinare la massa degli isotopi. Si migliora la precisione introducendo un selettore di velocità degli ioni che entrano e ne determina e ne determina la velocità.

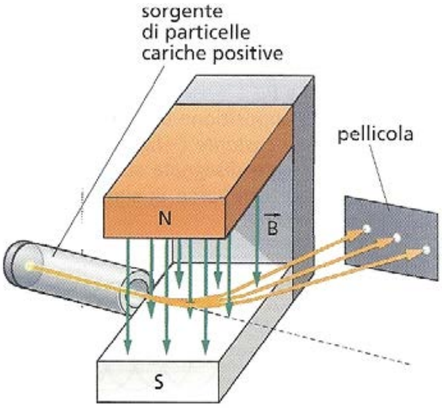
Parti essenziali di uno **spettrometro di massa**. Uno ione positivo $+q$, dopo avere subito una accelerazione a partire da una sorgente S_1, grazie alla differenza di potenziale ΔV, entra in una camera a campo magnetico uniforme $\vec{B}$. Percorre una traiettoria semicircolare e colpisce una lastra fotografica ad una distanza $2r$ dall'ingresso.	

La figura rappresenta schematicamente la sezione di un moderno spettrografo di massa. In esso gli ioni, provenienti da un'opportuna sorgente, vengono collimati in uno stretto fascio da due fenditure F_1 ed F_2 e immessi in una regione in cui sono presenti un campo elettrico uniforme e un campo magnetico, anch'esso uniforme, perpendicolari fra loro e alla direzione del fascio. In tali condizioni la forza esercitata dal campo elettrico sugli ioni, che supponiamo positivi, ha la stessa direzione e lo stesso verso del campo, mentre la forza esercitata dal campo magnetico ha verso opposto. Se E e B sono i moduli del campo elettrico e del campo magnetico, su uno ione di carica $+q$ e velocità v agiscono una forza elettrica di intensità q E e una forza magnetica di intensità q v B.



Pertanto gli ioni la cui velocità v soddisfa la relazione: $qE = q\mathrm{v}B$ ovvero $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}$ non subiscono alcuna deflessione e possono passare attraverso la fenditura F_3, mentre gli altri vengono intercettati da uno schermo.

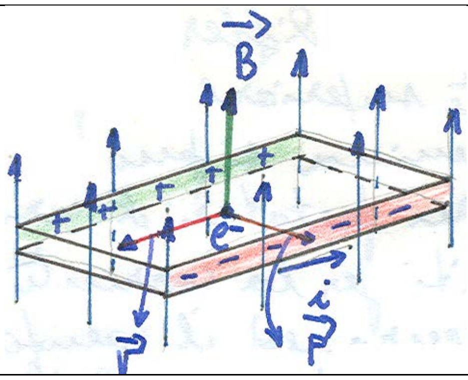
A parità di v, q e B, i raggi descritti dalla formula $r = \frac{mv}{qB}$ sono direttamente proporzionali alla massa m della particella. Se facciamo entrare un fascio, composto da particella che hanno la stessa velocità e la stessa carica, ma masse diverse, in direzione perpendicolare ad un campo magnetico, la forza di Lorentz suddivide il fascio in diverse componenti che descrivono traiettorie circolari con raggi diversi, uno per ogni valore della massa presente nel fascio.



Uno strumento di questo tipo si chiama spettrometro di massa.

Campi incrociati: effetto Hall

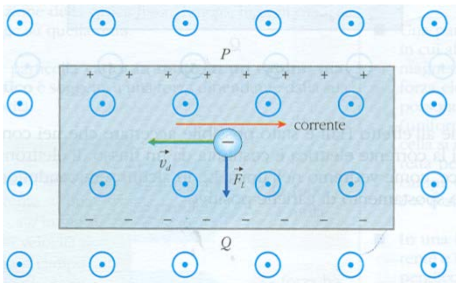
Si tratta di un fenomeno che si manifesta quando si fa agire un campo magnetico $\vec{B}$ su un conduttore percorso dalla corrente **i**. L'effetto Hall ci permette di stabilire se i portatori di carica in un conduttore trasportano una carica positiva o negativa. Nel 1879 il ventiquattrenne fisico americano Edwin Hall ideò un metodo sperimentale in base al quale dimostrò che nei conduttori metallici si muovono le cariche negative. Se poniamo una lastra metallica attraversata dalla correnti in un campo magnetico $\vec{B}$, la forza magnetica tenderà a deviare i portatori di carica trasversalmente rispetto alla direzione della corrente determinando un aumento della densità delle cariche elettriche su un lato rispetto all'altro. Questa variazione di densità genera una differenza di potenziale tra i due lati dal valore della quale è possibile risalire al segno dei portatori di carica.

Effetto Hall Gli elettroni di conduzione (e^-) che viaggiano lungo un conduttore disposto perpendicolarmente alle linee del campo magnetico $\vec{B}$ risultano deviati lateralmente rispetto alla direzione del moto.	

Nella figura è rappresentata una lamina conduttrice percorsa da una corrente continua diretta da sinistra verso destra. Se la lamina è posta in un campo magnetico a essa ortogonale si trova sperimentalmente una differenza di potenziale fra il bordo superiore P e il bordo inferiore Q. L'esperimento, ideato dal fisico americano Edwin H. Hall nel 1879 al fine di determinare il segno della carica dei portatori di elettricità in un conduttore, si interpreta in base alla forza di Lorentz agente sulle cariche mobili. Se la corrente è dovuta al movimento di elettroni, cioè di cariche negative, la forza magnetica, nello schema in figura, è diretta verso il basso.

Gli elettroni, mentre si muovono nella direzione della corrente e in verso opposto a essa, si spostano anche trasversalmente accumulandosi sul bordo inferiore Q. Conseguentemente sul bordo superiore P viene a crearsi un eccesso di carica positiva. Così, fra Pe Q si stabilisce una differenza di potenziale, con P a potenziale maggiore rispetto a Q. La differenza di potenziale fra la parte superiore e la parte inferiore della lamina è nota come **f.e.m. di Hall**. Per il calcolo di questa forza elettromotrice osserviamo che l'accumulo di elettroni di conduzione sul bordo Q genera un campo elettrico diretto da P a Q. Indicando con E il modulo del campo e con **d** l'altezza della lamina, la **f.e.m. di Hall V** può essere espressa mediante la relazione:

$E=\frac{\Delta V}{d}$ ove **d** è la **larghezza** della lamina percorsa dalla corrente i

Lamina percorsa da corrente verso destra e immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ per perpendicolare al piano del disegno in verso uscente. I portatori di elettricità, se dotati di carica elettrica e^- negativa, si muovono con velocità di deriva v_d verso sinistra; per effetto della forza di Lorentz $\vec{F}=-e\cdot\vec{v}_d\wedge\vec{B}$ si accumulano verso il basso, generando una differenza di potenziale fra i bordi P e Q della lamina (**f.e.m. di Hall**), con il polo positivo in P.	

Il campo elettrico, la cui intensità aumenta man mano che gli elettroni si addensano sul bordo inferiore, esercita su di essi una forza orientata verso l'alto, cioè in verso opposto rispetto alla forza di Lorentz. Quando la forza elettrica arriva a bilanciare la forza di Lorentz, sugli elettroni non agisce più alcuna forza netta nella direzione trasversale. Pertanto si raggiunge una situazione di equilibrio, nella quale il processo di accumulo si arresta e il modulo E del campo elettrico assume un valore stabile. All'equilibrio abbiamo: $\mathbf{F_{e\ell}=e\cdot E=F_m=e\cdot v_d\cdot B}$ dove v_d è la velocità di deriva degli elettroni di conduzione che si ricava applicando la seguente formula: $\mathbf{v_d=\frac{i}{neS}}$

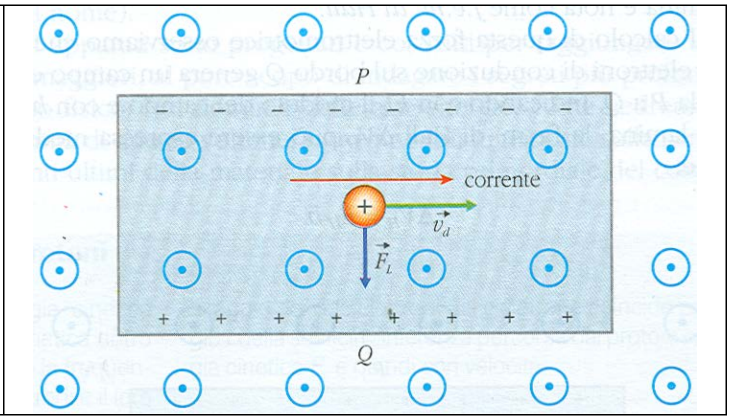
n = densità numerica dei portatori di carica = $\frac{\text{numero di portatoridi carica}}{\text{volume}}$

$$E=v_d\cdot B \quad\wedge\quad E=\frac{\Delta V}{d} \quad\Rightarrow\quad B=\frac{E}{v_d}=\frac{\Delta V}{d}\cdot\frac{neS}{i} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{B=\frac{\Delta V\cdot neS}{di}}$$

$\mathbf{\Delta V=E\cdot d=\frac{Bdi}{neS}}$ = **f.e.m. di Hall**

L'effetto Hall ci permette di stabilire se le cariche mobili che trasportano la corrente elettrica sono positive oppure negative. Infatti, lasciando invariato il verso della corrente e quello del campo magnetico, se i portatori di carica sono positivi, anziché negativi, per effetto della forza magnetica il bordo P si carica negativamente e il bordo Q positivamente. Il segno della f.e.m. di Hall è pertanto invertito rispetto al caso precedente.

Se nella lamina la corrente è trasportata da cariche mobili positive, la **f.e.m.** di Hall è invertita. con il polo positivo in Q e quello negativo in P.



Grazie all'effetto Hall è stato possibile accertare che nei conduttori metallici la corrente elettrica è costituita da un flusso di elettroni.

Esperienza di Thomson per determinare il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica e la massa dell'elettrone

Lo scienziato inglese Joseph John Thomson (**1856-1940**) determinò nel **1947** la carica specifica dei raggi catodici, cioè il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica e e la massa m dei raggi catodici. I raggi catodici sono elettroni liberi espulsi ortogonalmente dalla superficie di un catodo (si tratta di un filo conduttore metallico portato ad un potenziale negativo).
Per il suo esperimento Thomson si servì di un tubo a raggi catodici. Esso è costituito da un tubo vuoto il cui anodo N_1 è forato, in modo da permettere ad un sottile fascio di elettroni, emessi dal catodo D ed accelerati da un campo elettrico $\vec{E}_1$ orientato da N_1 verso D,di attraversare le fenditure N_1 ed N_2 e percorrere una regione priva di campo elettrico per proseguire poi all'interno di un campo elettrostatico $\vec{E}$ creato all'interno di un condensatore piano. Quando $\vec{E}$ è nullo il fascio di elettroni colpisce lo schermo fluorescente S nel punto A che si manifesta come un punto luminoso. Quando $\vec{E} \neq \vec{o}$ l'azione del campo elettrico $\vec{E}$ è quella di incurvare le traiettorie degli elettroni facendo deviare il punto luminoso dal centro dello schermo alla posizione C. Quindi i raggi catodici, che sono elettroni, attraversano due strette fenditure N_1 ed N_2, passano tra le armature R_1 ed R_2 di un condensatore piano all'interno del quale c'è un campo elettrostatico uniforme $\vec{E}$, e produce una piccola macchia luminosa C sullo schermo fluorescente S dove è praticata una scala graduata T. Siano m, e, v rispettivamente la massa, la carica e la velocità d'ingresso degli elettroni nel campo $\vec{E}$. Se la direzione del pennello di elettroni è perpendicolare ad $\vec{E}$ e se il campo $\vec{E}$ esistente tra le armature del condensatore piano è diretto verso il basso, ogni elettrone, quando si trova in $\vec{E}$, è sottoposto ad una forza verticale diretta verso l'alto.
Ogni elettrone si comporta come un grave lanciato orizzontalmente nel campo gravitazionale terrestre. Ogni elettrone descriverà un arco di parabola all'interno del campo elettrico, fuori da questo una traiettoria rettilinea e colpirà lo schermo S nel punto C.

Sia $\mathbf{d = AC}$ la deviazione rettilinea subita dal punto luminoso sullo schermo. Il moto dell'elettrone si ottiene componendo i moti di due punti $\mathbf{P_x}$ e $\mathbf{P_y}$.

Il primo si muove sull'asse delle $\mathbf{x}$ con velocità vettoriale $\vec{\mathbf{v}}$ costante e legge oraria $\mathbf{x = v\,t}$, il secondo si muove sull'asse $\mathbf{y}$ con accelerazione vettoriale $\vec{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$ costante e legge oraria $\mathbf{y = \frac{1}{2}a_y t^2}$; questo significa che $\mathbf{P_x}$ si muove di moto rettilineo uniforme e $\mathbf{P_y}$ di moto rettilineo uniformemente accelerato. Le equazioni parametriche della traiettoria descritta da ogni elettrone sono:

$$\begin{cases} \mathbf{x = \ v\,t} \\ \mathbf{y = \frac{1}{2} a_y t^2} \end{cases}$$

Su ogni elettrone agisce la forza elettrica $F = m \cdot a_y = e \cdot E \quad \mathbf{a_y = \frac{e}{m} \cdot E}$

Le precedenti equazioni diventano: $\begin{cases} x = \mathrm{v} \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot E \cdot t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{v}} \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{\mathrm{v}^2} \cdot x^2 \end{cases} \quad \mathbf{y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{v^2} \cdot x^2}$ è

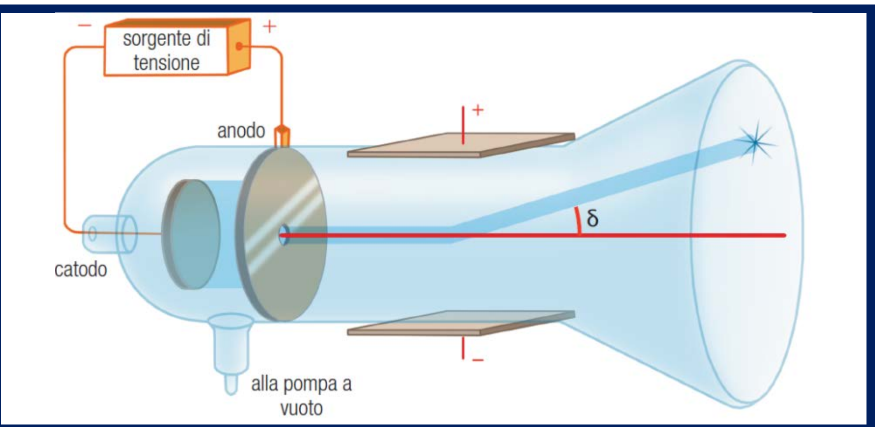
l'equazione della traiettoria (parabola) di ciascun elettrone $\mathbf{\frac{e}{m} = \frac{2y}{E\,x^2} \cdot v^2}$

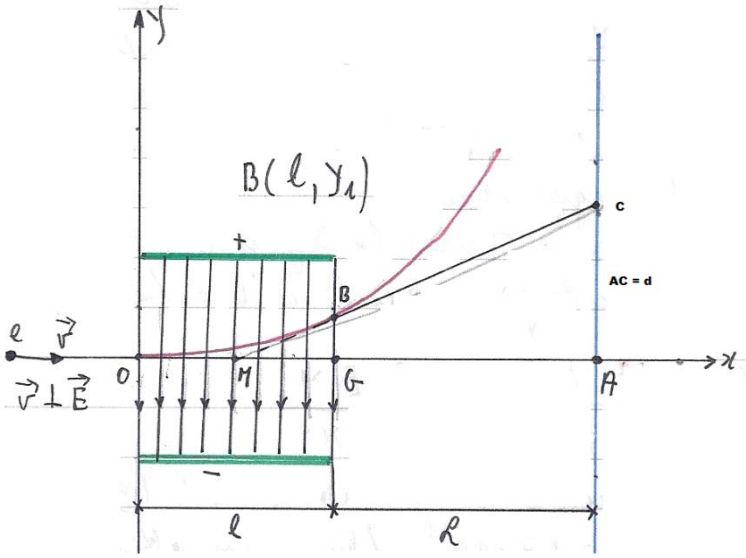
Si dimostra facilmente che la tangente alla parabola $\mathbf{y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{v^2} \cdot x^2}$ nel punto $\mathbf{B\left(\ell; \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \ell^2\right)}$

passa per il punto medio $\mathbf{M\left(\frac{1}{2}\ell; 0\right)}$.

Si dimostra anche che risulta: $\mathbf{\frac{e}{m} = \frac{2y}{E\,x^2} \cdot v^2 = \frac{v^2}{\left(\ell L + \frac{1}{2}\ell^2\right)} \cdot \frac{d}{E}} \qquad \mathbf{AC = y = d}$

Deflessione dei raggi catodici provocata da un campo elettrico costante esterno nel tubo catodico.





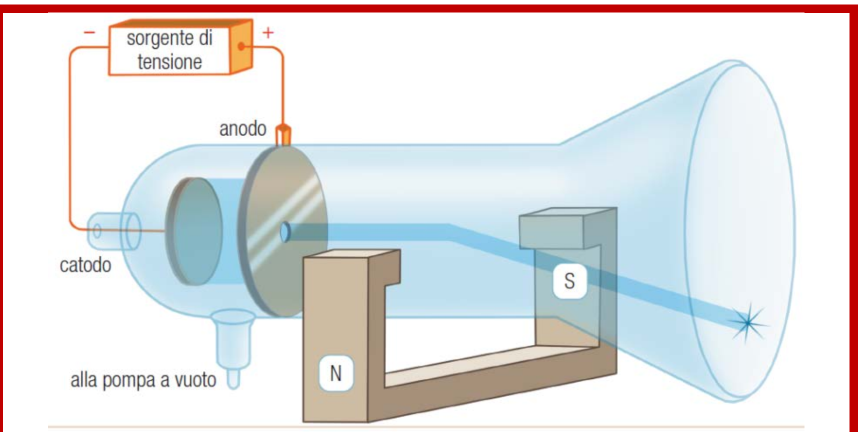
Adesso supponiamo di eliminare il campo elettrico ed applichiamo al tubo a raggi catodici un campo magnetico costante $\vec{B}$. Un elettrone che si muove alla velocità $\vec{v}$ perpendicolarmente ad un campo magnetico $\vec{B}$ è soggetto alla forza di Lorentz $\vec{F}_m = e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ avente modulo $F_m = e\,v\,B \sin 90° = e\,v\,B = m \cdot a_z$. Quindi: $a_z = \frac{e\,v\,B}{m}$

Le equazioni parametriche della traiettoria descritta da ogni elettrone sono:

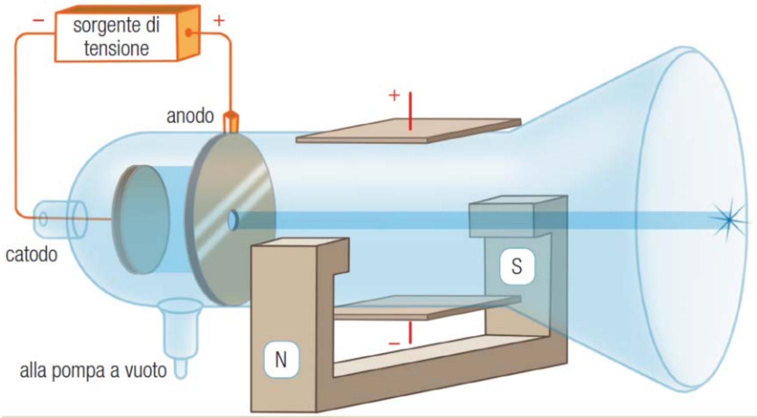
$$\begin{cases} x = v\,t \\ z = \frac{1}{2} a_z t^2 \end{cases}$$

Le precedenti equazioni diventano: $\begin{cases} t = \frac{x}{v} \\ z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\,v\,B}{m} \cdot \frac{x^2}{v^2} \end{cases}$ $\begin{cases} t = \frac{x}{v} \\ z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\,B}{m\,v} \cdot x^2 \end{cases}$

$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{eB}{m\,v} \cdot x^2$ è l'equazione della traiettoria di ciascun elettrone $\frac{e}{m} = \frac{2z}{B\,x^2} \cdot v$

Deflessione subita da un elettrone sottoposto ad un campo magnetico costante.	

Tranne la velocità $\mathbf{v}$, tutte le grandezze che figurano nel secondo membro delle relazioni $\frac{e}{m} = \frac{2y}{Ex^2} \cdot v^2$ $\frac{e}{m} = \frac{2z}{Bx^2} \cdot v$ sono facilmente misurabili. La determinazione della velocità era la difficoltà maggiore che si presentò a Thomson nei suoi esperimenti diretti a misurare il rapporto $\frac{e}{m}$. Si tratta infatti di velocità elevate, dell'ordine di $100\,000 \frac{km}{s}$. L'ostacolo fu superato sottoponendo il pennello di elettroni ad un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme, agente nella stessa regione dove agiva il campo elettrico uniforme $\vec{E}$. La forza magnetica agente du una particella carica in moto in un campo magnetico uniforme può essere equilibrata da una forza elettrostatica se si scelgono in maniera opportuna i moduli e le orientazioni del campo magnetico e del campo elettrico. Poiché la forza elettrica ha la stessa direzione ma verso opposto ad $\vec{E}$ ($\vec{F} = e\vec{E}$) e la forza magnetica è perpendicolare al campo magnetico, il campo elettrico ed il campo magnetico debbono essere fra loro perpendicolari perché le due forze si facciano equilibrio. Questo significa che dobbiamo realizzare il campo elettrico e quello magnetico in modo che risulti $\vec{F}_e \| \vec{F}_m$. Due campi mutuamente perpendicolari si dicono campi incrociati. Campi siffatti si possono realizzare interponendo il condensatore piano tra le espansioni polari di una calamita a ferro di cavallo.



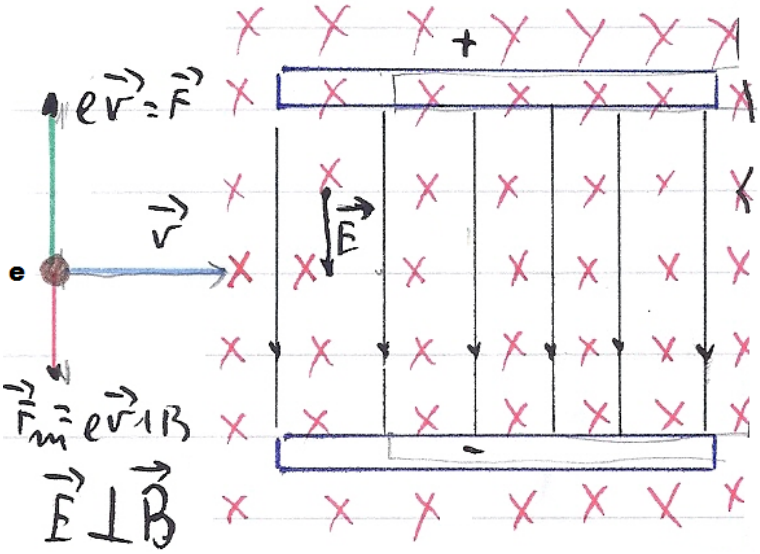
La forza elettrica $\vec{F} = e\vec{E}$ è orientata verso l'alto, la forza magnetica $\vec{F}_m = e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ verso il basso. (per una carica positiva si verificherebbe tutto il contrario)

$$\vec{v} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \quad F_m = evB\sin 90° = evB \qquad F = eE$$

Le due forze $\vec{F}$ ed $\vec{F}_m$ si equilibreranno se: $eE = evB$ cioè se: $v = \frac{E}{B}$ [1]

Per assegnati valori del campo elettrico e del campo magnetico, le forze si equilibreranno solo per quelle particelle la cui velocità è data dalla relazione [1] .

Qualsiasi particella, qualunque sia la sua massa o la sua carica, attraverserà quello spazio senza essere deviata se la sua velocità è data dalla relazione [1] .



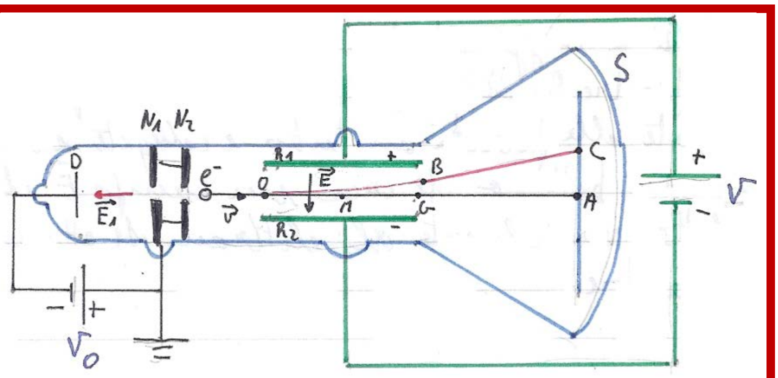
Una particella con velocità maggiore sarà deviata nel verso della forza magnetica. Il moto delle particelle cariche in campi magnetici non uniformi è piuttosto complicato.

Il procedimento utilizzato da Thomson consisteva: (1) nell'osservare la posizione del fascio di elettroni non deflesso con $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nulli (2) nell'applicare un campo elettrico $\vec{E}$ misurando sullo schermo la deflessione così provocata (3) nell'applicare un campo magnetico $\vec{B}$ aggiustandone il valore in modo da riportare a zero la deflessione del fascio.

Le formule precedenti diventano: $\frac{e}{m} = \frac{d}{\left(\ell L + \frac{1}{2}\ell^2\right)} \cdot \frac{E}{B^2} = \frac{2y}{x^2} \cdot \frac{E}{B^2}$

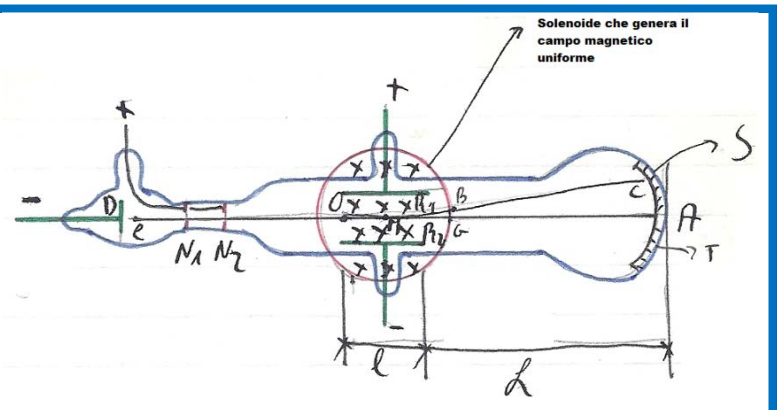
Il valore ottenuto da Thomson nel **1896** risultò: $\frac{e}{m} = 1,7 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$ in ottimo accordo col valore ottenuto da più recenti misure $\frac{e}{m} = 1,75890 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$.

Tubo a raggi catodici utilizzato da Thomson nel **1896** per determinare il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica elettrica e la massa dell'elettrone. E' costituito da un tubo di vetro a vuoto molto spinto contenente due elettrodi **D** ed **N** ($N_1 + N_2$) metallici ai quali, mediante



una batteria si applica una d.d.p. V_o. L'elettrodo **N** a potenziale più elevato (positivo) viene chiamato Anodo, quello (**D**) a potenziale minore (negativo) Catodo. Gli elettroni emessi dal catodo **D**, accelerati dal campo $\vec{E}_1$, passano attraverso i fori di N_1 ed N_2 formando un sottile fascio di elettroni che colpisce il punto **A** della superficie **S** costituita da uno schermo fluorescente di solfuro di zinco. I tubi a raggi catodici comprendono anche due piastre $\mathbf{R_1}$ ed $\mathbf{R_2}$ deflettrici metalliche parallele, saldate alle pareti del tubo e collegate ad una seconda batteria che crea un campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ che deflette verticalmente gli elettroni che attraversano le piastre.

Esperimento di Thomson per misurare $\dfrac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}$. Raggi catodici (elettroni) emessi dal catodo **D** e collimanti dalle fenditure $\mathbf{R_1}$ ed $\mathbf{R_2}$ arrivano sullo schermo **S** dopo essere passati attraverso una regione dove sono applicati un campo elettrico uniforme ed un campo magnetico uniforme e fra loro perpendicolari.



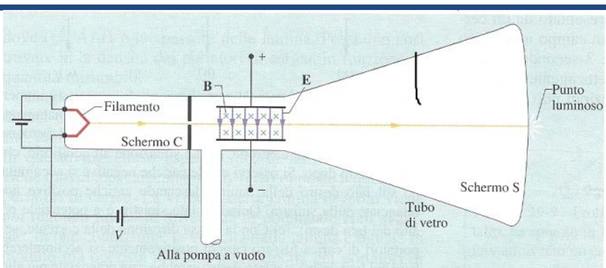
Sintesi finale

Procedimento di Thomson per determinare $\dfrac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}$

(01) Porre $\mathbf{E = 0}$ e $\mathbf{B = 0}$ ed osservare la posizione non deflessa del fascio di elettroni

(02) Senza eliminare $\vec{\mathbf{E}}$, applicare un campo magnetico uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ e regolare il suo valore finché la deflessione del fascio ritorna a zero. Quando i campi $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ sono regolati in modo che le rispettive forze di deflessione si bilanciano abbiamo: $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}$ e quindi: $\dfrac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}} = \dfrac{\mathbf{d}}{\left(\ell\mathbf{L} + \dfrac{1}{2}\ell^2\right)} \cdot \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}^2} = \dfrac{\mathbf{2y}}{\mathbf{x}^2} \cdot \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}^2}$ dove le grandezze del secondo membro sono tutte facilmente misurabili.

Il campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ è prodotto collegando una batteria ai piatti del condensatore piano. Il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ è prodotto per mezzo di bobine percorse da corrente (non mostrate). Il campo magnetico entra nel piano della figura, come suggeriscono le crocette.



Una versione moderna dell’apparato di Thomson per la determinazione del rapporto tra carica e massa per l’elettrone.