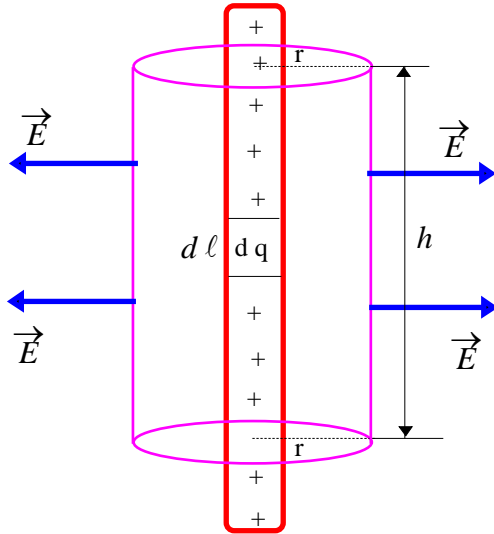


## Distribuzione lineare di carica, ossia campo elettrico generato da un filo rettilineo di lunghezza infinita ed avente densità elettrica

$$\text{lineare } \lambda = \frac{Q}{\ell}$$



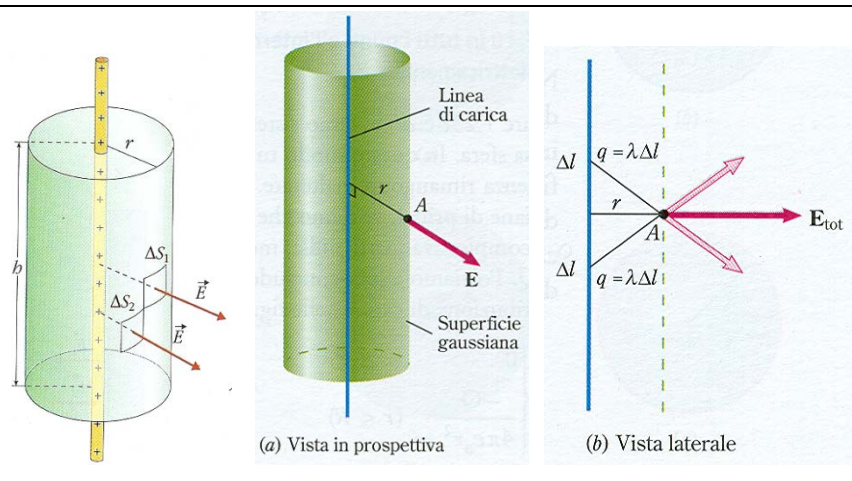
Consideriamo un filo rettilineo indefinito con densità lineare di carica  $\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{\ell}$ . Per

ragioni di simmetria il campo elettrostatico  $\vec{E}$  dovuto ad una distribuzione lineare uniforme di carica elettrica può essere diretto solo radialmente. Quindi, per ragioni di simmetria,  $\vec{E}$  è ovunque normale al filo e dipende da  $\lambda$  e dalla distanza  $r$  dal filo. Come superficie gaussiana scegliamo un cilindro di raggio  $r$  ed altezza  $h$  delimitato da due basi perpendicolari al filo.

$E$  è costante su tutta la superficie laterale ed il flusso di  $\vec{E}$  attraverso tale superficie vale  $E \cdot S = E \cdot 2\pi r h$  essendo  $2\pi r h$  l'area della superficie laterale. Attraverso la superficie di base il flusso è nullo essendo  $\vec{E}$  parallelo a queste superfici in ogni punto. La carica interna alla superficie gaussiana è  $Q = \lambda h$ . Applicando il teorema di Gauss abbiamo:  $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = Q$ ,  $\epsilon_0 \oint E \cdot dS = Q$

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot S = Q, E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0 S} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0 \cdot 2\pi r h} \quad E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Un filo molto lungo porta una densità uniforme lineare di carica  $\lambda$ . La superficie gaussiana più conveniente è un cilindro con l'asse coincidente col filo carico. Si noti in (b) che i componenti del campo elettrico paralleli al filo carico, dovuti a coppie di punti simmetrici sul filo, si annullano. Per questo motivo il campo è diretto radialmente fuori dal filo.

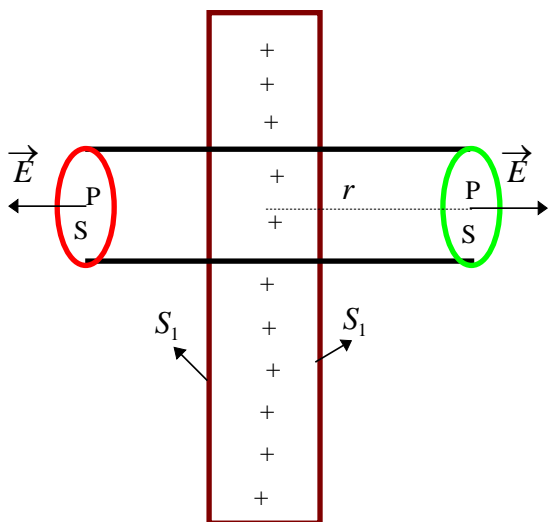


$E$  = modulo del campo elettrico in un punto  $P$  distante  $r$  dal filo. Se la carica  $q$  è **positiva**,  $\vec{E}$  è diretto radialmente verso l'esterno, se la carica è negativa allora  $\vec{E}$  è diretto radialmente verso l'interno.

## Distribuzione piana di carica, ossia campo elettrico generato da una lamina sottile avente densità elettrica superficiale $\sigma = \frac{Q}{S}$

**Determinare il campo elettrico in prossimità di una lastra metallica molto grande e sottile sapendo che la sua densità di carica superficiale  $\sigma$  è costante.** Questo significa che la carica  $q$  è distribuita **uniformemente** sulla superficie della lastra. Voglio calcolare il campo  $\vec{E}$  in un generico punto  $P$  distante  $r$  dalla lastra. Come **superficie gaussiana** scegliamo un **cilindro** avente le basi parallele alla lastra e ognuna di esse ha area  $S$ . Per motivi di simmetria le linee del campo elettrico generato da una lastra sottile elettrizzata positivamente sono perpendicolari alla lastra ed orientate verso l'esterno. Poiché  $\vec{E}$  non attraversa la superficie laterale del cilindro, il contributo di questa superficie al flusso è **nullo**. Il teorema di Gauss ci dà:

$$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \oint \vec{E} \times dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad E \cdot S + E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad 2E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad E = \frac{q}{2\epsilon_0 S} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



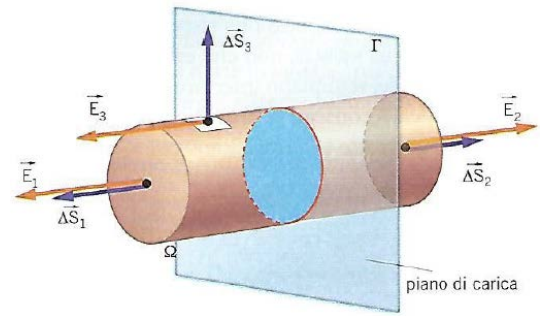
Si osservi che  $\vec{E}$  ha lo stesso modulo in tutti i punti, da ogni parte del piano. **Il campo elettrico di una lastra piana sottile con densità superficiale di carica costante è un campo uniforme avente modulo  $E$  proporzionale alla densità superficiale di carica  $\sigma$ .**

**N.B.** Lastra sottile significa che  $\sigma = \frac{q}{S_1}$ , lastra con spessore non trascurabile significa che  $\sigma = \frac{q}{2S_1}$ ,

cioè si tratta di una lastra con densità di carica superficiale su entrambe le facce.

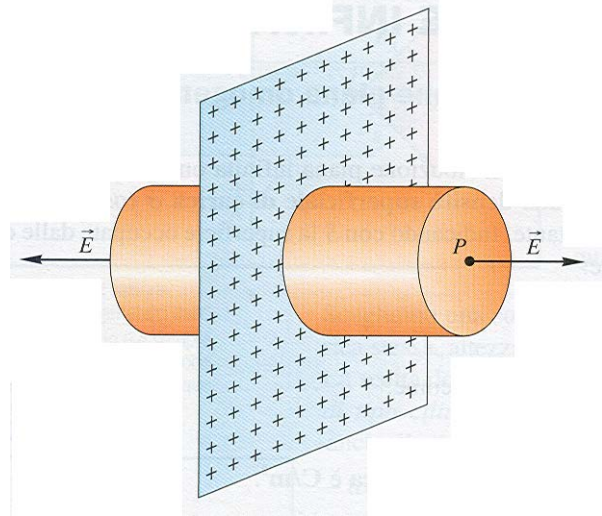
## Unità Didattica N° 21 : Campo elettrostatico

Applicando il teorema di Gauss alla superficie cilindrica  $\Omega$ , che ha l'asse perpendicolare al piano carico  $\Gamma$  e le basi equidistanti da esso, si calcola il modulo del campo elettrico  $\vec{E}$  generato dalla lamina sottile.  $\vec{E}_3 \perp \vec{\Delta S}_3$  Prendo  $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S_3 = \Delta S$



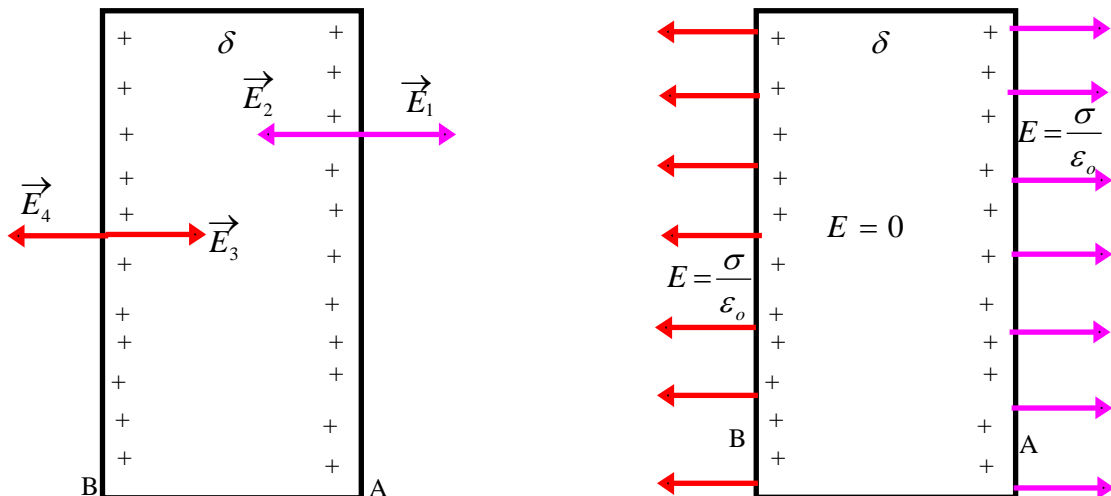
$$\Phi_s(\vec{E}) = \vec{E}_1 \times \vec{\Delta S}_1 + \vec{E}_2 \times \vec{\Delta S}_2 + \vec{E}_3 \times \vec{\Delta S}_3 = E \cdot \Delta S + E \cdot \Delta S + 0 = 2 \cdot E \cdot \Delta S = \frac{\Delta Q}{\epsilon} \quad E = \frac{\Delta Q}{2 \cdot \Delta S \cdot \epsilon} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

Le linee del campo elettrico generato da una distribuzione piana di carica elettrica sono equidistanti fra loro e perpendicolari al piano. Fissata una superficie gaussiana cilindrica, con le basi di area  $S$  parallele al piano elettrizzato, il flusso uscente da ciascuna delle due basi è  $E \cdot S$ , dove  $E$  è il modulo del campo elettrico uniforme, mentre il flusso attraverso la superficie laterale è nullo in il campo elettrico  $\vec{E}$  è perpendicolare al vettore  $\vec{n}$  di ciascuna base.



### Lamina conduttrice carica di spessore non trascurabile

Considero una lamina metallica di spessore  $\delta$  non trascurabile caricata, ad esempio positivamente, con densità di carica superficiale  $\sigma$  su entrambe le facce A e B. Voglio calcolare il campo elettrico  $\vec{E}$  sia all'interno che all'esterno della lastra. Le cariche che producono il campo  $\vec{E}$  possono essere pensate come dovute alle cariche distribuite su due lamine sottili A e B di spessore trascurabile.



Risulta: 
$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

In un punto interno alla lastra risulta:  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}_4 = \vec{0}$ .

**Il campo elettrico interno alla lastra è nullo**

In un punto esterno alla lastra risulta:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 \Rightarrow E = E_1 + E_3 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{alla destra della lastra})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_2 + \vec{E}_4 \Rightarrow E = E_2 + E_4 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{alla sinistra della lastra})$$

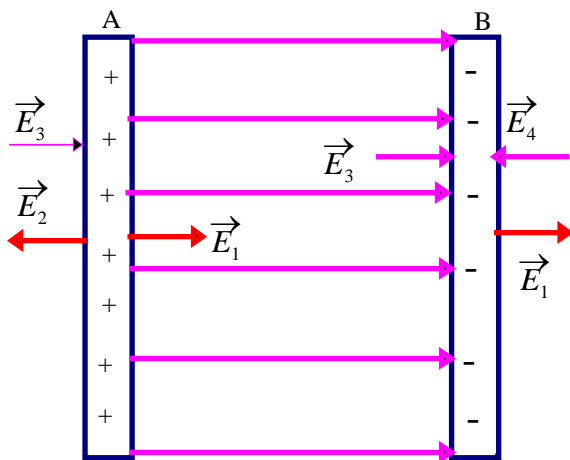
**Il campo elettrico all'esterno della lastra vale:**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Si abbiano due lastre sottili con densità di carica uguali e di segno opposto. calcolare il campo  $\vec{E}$  all'interno ed all'esterno delle due lastre (che costituiscono un condensatore piano).

La figura mostra due lastre sottili e parallele con cariche uguali ma opposte di segno. Il campo elettrico prodotto dalle due lastre è in ogni punto la somma vettoriale dei campi elettrici prodotti dalle singole lastre. Si può osservare che nello spazio esterno alle due lastre aventi cariche opposte vi sono campi elettrici uguali in modulo e di verso opposto per cui danno un campo elettrico risultante nullo. Nella regione compresa tra le due lastre i campi hanno lo stesso verso ed il campo risultante ha modulo doppio del campo prodotto da una singola lastra, cioè vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

La lastra A genera il campo  $\vec{E}_1$  oppure  $\vec{E}_2$ , la lastra B genera il campo  $\vec{E}_3$  oppure  $\vec{E}_4$ .

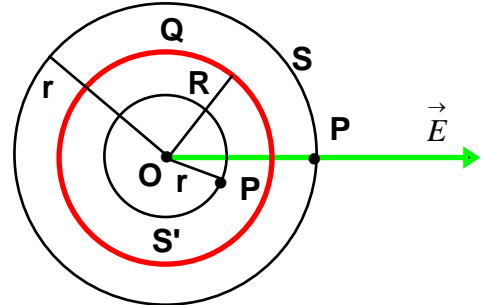
$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 \Rightarrow E_{\text{int}} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{\text{est}} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) + (\vec{E}_3 + \vec{E}_4) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad E_{\text{est}} = 0$$

## Unità Didattica N° 21 : Campo elettrostatico

Dunque le due lastre parallele recanti cariche uguali ma di segno opposto producono un campo uniforme contenuto nella regione di spazio da esse delimitate. **Le linee di campo sono tra loro parallele, perpendicolari alle piastre ed orientate dalla lastra positiva verso la lastra negativa.**

**Sia data una sfera conduttrice cava, cioè sia dato uno strato sferico infinitamente sottile con densità di carica elettrica costante  $\sigma = \frac{Q}{S}$ . Voglio calcolare il campo elettrico in punti P interni ed esterni alla sfera cava.**



Si consideri una sfera conduttrice cava infinitamente sottile di raggio R ed avente una densità di carica elettrica costante  $\sigma = \frac{Q}{S}$ . Vogliamo calcolare il campo elettrico in tutti i punti P all'interno ed all'esterno dello strato sferico. Per motivi di simmetria, il campo elettrico  $\vec{E}$  all'esterno dello strato sferico è radiale. Considero come superficie gaussiana S la sfera di centro O e raggio  $r > R$ .

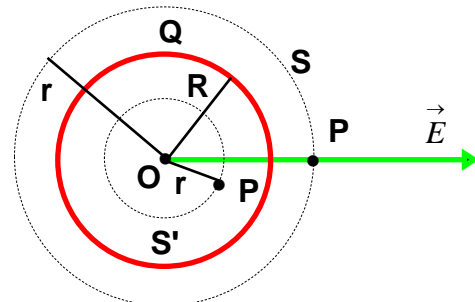
$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad S = 4\pi r^2 \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

**Per punti P esterni alla sfera cava, il campo elettrico ha lo stesso valore che esso avrebbe qualora la carica elettrica fosse concentrata nel suo centro O.**

Per punti P interni allo strato sferico considero come superficie gaussiana  $S'$  la sfera di centro O e raggio  $r < R$ .

$\Phi_{s'}(\vec{E}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot S' = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \quad \sum q_i = 0$  in quanto la superficie gaussiana  $S'$  non racchiude al suo interno alcuna carica elettrica. Questo ci consente di scrivere:  $E \cdot S' = 0$  e dedurre che risulta:  **$E = 0$** . **Il campo elettrico all'interno della sfera cava è nullo.**

**Problema:** Una carica Q è distribuita con densità spaziale  $\rho = \frac{Q}{V}$  uniformemente nel volume di una sfera di raggio R. Calcolare il campo elettrico nei punti interni ed esterni alla sfera.



## Unità Didattica N° 21 : Campo elettrostatico

$Q = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  carica distribuita uniformemente all'interno della sfera di centro O e raggio R.

Per ragioni di simmetria il campo elettrico  $\vec{E}$  all'esterno della sfera (ed anche all'interno) è radiale.

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \quad E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad S = 4\pi \epsilon_0 r^2 \quad E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

**Per punti P esterni ad una distribuzione di carica avente simmetria sferica, il campo elettrico ha lo stesso valore che esso avrebbe qualora la carica elettrica fosse concentrata nel suo centro O.**

All'interno ( $r < R$ ) della sfera di centro O e raggio R esiste una carica elettrica distribuita uniformemente ed il campo elettrico non è più nullo. Resta valido l'argomento di simmetria che porta ad un campo radiale per cui il flusso attraverso una superficie gaussiana di centro O e raggio

$r < R$  diventa:  $\Phi_{s'}(\vec{E}) = E \cdot S' = \frac{q}{\epsilon_0}$   $S' = 4\pi r^2$  e  $q$  è la carica contenuta all'interno della

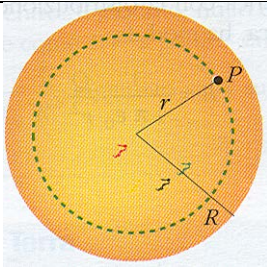
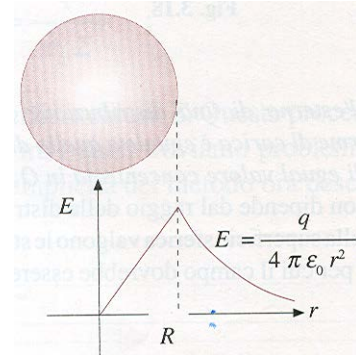
superficie  $S'$ .  $\rho = \frac{q}{V'} \Rightarrow q = V' \cdot \rho = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \quad q = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$

$$E = \frac{q}{S' \cdot \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r$$

**Conclusioni:** Il campo elettrico cresce linearmente con  $r$  dal valore **zero** assunto nel centro della sfera al valore

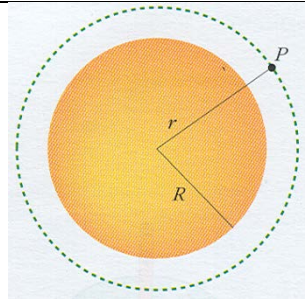
$$\frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot r \text{ assunto sulla superficie della sfera di raggio}$$

$r$ . All'esterno esso **decrece** col quadrato della distanza dal centro. Per  $r = R$  il campo elettrico è continuo.



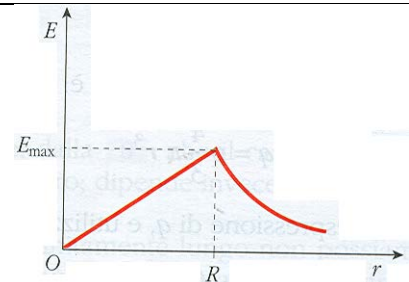
Volume sferico di raggio R uniformemente carico con carica totale Q. Il campo elettrico in un punto P distante  $r < R$  dal centro ha modulo

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r$$



Volume sferico di raggio R uniformemente carico con carica totale Q. Il campo elettrico in un punto P distante  $r > R$  dal centro ha modulo

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$



Modulo E del campo elettrico generato da una carica Q distribuita uniformemente nel volume di una sfera di raggio R, in funzione della distanza r dal centro. Il modulo cresce proporzionalmente a r, raggiunge il valore massimo

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \quad \text{per} \quad r = R;$$

successivamente decresce come  $\frac{1}{r^2}$



## Campo elettrico generato da un anello carico

Sia dato un anello sottile di raggio  $R$  sul quale è distribuita uniformemente la carica  $q$  (ad esempio positiva). Voglio calcolare il campo  $\vec{E}$  in un punto generico del suo asse  $z$ .

$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} = \frac{dq}{d\ell} \quad \text{in quanto } \lambda \text{ è costante} \quad dq = \frac{q}{2\pi R} \cdot d\ell \quad dq \text{ è la carica presente}$$

nell'elemento infinitesimo  $d\ell$  dell'anello. La carica elementare  $dq$  genera nel generico punto  $P$  dell'asse  $z$  dell'anello un campo infinitesimo  $d\vec{E}$ . Il campo risultante  $\vec{E}$  nel punto  $P$  si calcola sommando vettorialmente i contributi dovuti a tutti gli elementi infinitesimi che costituiscono l'anello.

$d\vec{E} = d\vec{E}_\perp + d\vec{E}_\parallel$  I componenti  $d\vec{E}_\perp$  possono essere trascurati in quanto due elementi infinitesimi diametralmente opposti si annullano. Pertanto il campo totale si ottiene sommando i

componenti  $d\vec{E}_\parallel$ . Otteniamo: 
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{z^2 + R^2} \cdot d\ell$$

$$dE_\parallel = dE \cdot \cos\vartheta \quad \text{con} \quad \cos\vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad dE_\parallel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z}{(z^2 + R^2)\sqrt{z^2 + R^2}} \cdot d\ell$$

$$E_\parallel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \quad \oint d\ell = 2\pi R \quad \oint dq = q \quad q = 2\pi R\lambda$$

$$E_\parallel = \oint dE_\parallel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \cdot \oint d\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \cdot 2\pi R$$

$$E_\parallel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \cdot 2\pi R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}}$$

In termini vettoriali abbiamo: 
$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \cdot \text{vers } \vec{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{vers } \vec{z}$$

Se l'anello è caricato **negativamente** abbiamo:

$$\vec{E}_\parallel = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \cdot \text{vers } \vec{z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{vers } \vec{z} \quad (17)$$

Nel centro  $O$  abbiamo  $z = 0$  e quindi  $\vec{E}_\parallel = \vec{0}$ . Per la simmetria dell'anello i contributi di elementi simmetrici danno una somma nulla. Se  $z \gg R$  abbiamo:

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{z^3} \cdot \text{vers } \vec{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{z^2} \cdot \text{vers } \vec{z}$$

<sup>(17)</sup> Per eliminare il segno **meno** basta orientare verso il basso l'asse  $z$  dell'anello

		<p>Una distribuzione uniforme ad anello di una carica <math>q</math> positiva. Un elemento differenziale di carica <math>dq = \lambda \cdot d\ell</math> occupa una lunghezza <math>d\ell</math>. Questo elemento genera un campo elettrico <math>d\vec{E}</math> nel punto P. La componente di <math>d\vec{E}</math> lungo l'asse centrale dell'anello vale <math>dE \cdot \cos \vartheta</math></p>
<p>I contributi di <math>dq</math> vanno verso l'alto in quanto abbiamo supposto positiva la carica sull'anello. Questo risultato può essere previsto osservando che a grandi distanze l'anello si comporta come una carica puntiforme. <math>R^2 + z^2 = r^2</math></p>		

### Campo elettrico generato da un disco sottile con densità elettrica superficiale costante

		<p>Un disco di raggio R e con carica positiva <math>q</math> distribuita uniformemente. <math>\sigma = \frac{dq}{dS}</math> <math>S = \pi r^2 =</math> area di un generico disco di raggio <math>r</math>          L'anello disegnato ha un raggio <math>r</math> ed una larghezza radiale <math>dr</math>.          Esso genera un campo elettrico differenziale <math>d\vec{E}</math> nel punto P.</p>
--	--	--



## Unità Didattica N° 21 : Campo elettrostatico

Problema: **Un disco sottile di raggio R ha una carica distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. Calcolare il campo  $\vec{E}$  nel punto P distante z dal disco lungo il suo asse centrale.**

La carica è contenuta in uno spessore sottilissimo tra le facce del disco (e non su ciascuna faccia); la

densità di carica, costante su tutto il disco è:  $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}$   $S = \pi R^2$  = area del disco  $q = \pi \sigma R^2$

Isoliamo idealmente una corona circolare compresa tra r e  $dr$ , assimilabile ad un anello di area  $dS = 2\pi r dr$  e carica  $dq = \sigma dS = 2\pi \sigma r dr$ .

Il disco può essere considerato come la somma di infinite corone circolari di spessore infinitesimo  $dr$ .

La corona circolare di spessore  $dr$  genera in un punto P dell'asse del disco un campo elettrico il cui modulo vale:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{z^2 + r^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi\sigma r \cdot dr}{z^2 + r^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dr$$

Il modulo risultante si ottiene sommando i contributi degli infiniti anelli che compongono il disco.

$$E = \int_0^R dE = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dr = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \cdot \int_0^R (z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot d(z^2 + r^2) = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[ \frac{(z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$R \rightarrow \infty \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  Il disco diventa un **piano indefinito**.

## Campo elettrico generato da un dipolo elettrico

La figura mostra un dipolo elettrico, cioè un sistema di due cariche  $+q$  e  $-q$  poste alla distanza  $d$ .

Sia P un punto generico dell'asse del segmento  $AB$ . Voglio calcolare il campo  $\vec{E}$  nel punto P.

Si scelga  $r \gg \frac{d}{2}$   $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$   $E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\frac{d^2}{4} + r^2}$

Il vettore  $\vec{E}$  è diretto verticalmente verso il basso ed ha come modulo

$$E = 2E_1 \cdot \cos \vartheta \quad \text{con} \quad \cos \vartheta = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2}}$$

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\frac{d^2}{4} + r^2} \cdot \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2}} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)^3}}$$

$$r \gg \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d^2}{4} + r^2 \cong r^2 \quad \text{e quindi :} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}$$

$\vec{p} = q \cdot \vec{d} =$  **momento del dipolo elettrico** In termini vettoriali abbiamo:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{r^3} \quad \text{Campo elettrico del dipolo lungo la retta asse del segmento } AB$$

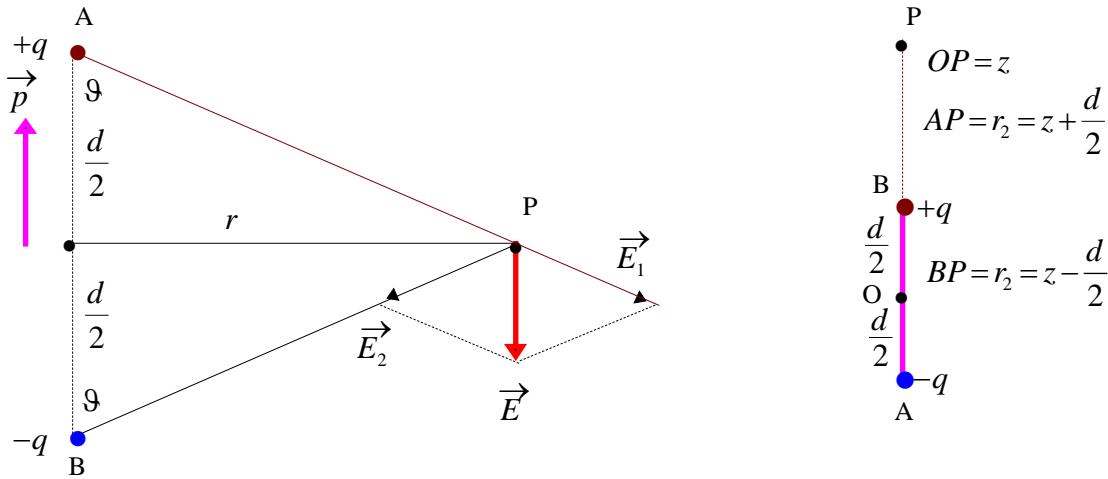
Voglio calcolare il campo elettrico in un punto **P** della retta contenente le cariche del dipolo distante **z** dal punto medio **O** delle due cariche.

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{+q}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2} \right] \quad \text{se } r \gg \frac{d}{2} \text{ abbiamo :}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd}{z^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{z^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{z^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\vec{p}}{z^3} = \text{campo elettrico del dipolo lungo la retta contenente le cariche}$$



## Dipolo immerso in un campo elettrico e sua energia potenziale

Voglio vedere come si comporta un dipolo elettrico in presenza di un campo elettrico uniforme .

Il dipolo è soggetto ad una coppia di forze che generano un momento torcente  $\vec{\tau}$  dato da :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (A - O) \wedge \vec{F} + (B - O) \wedge (-\vec{F}) = (A - O - B - O) \wedge \vec{F} = (A - B) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = (A - B) \wedge q \cdot \vec{E} = \vec{l} \wedge q \cdot \vec{E} = q \cdot \vec{l} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad \vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

$\vec{\tau} = \vec{o} \Rightarrow \vec{p}$  ed  $\vec{E}$  sono vettori paralleli , cioè il dipolo ha lo stesso orientamento del vettore  $\vec{E}$  .

Se il campo è uniforme le forze che agiscono sulle cariche del dipolo [  $-\vec{F} = -q\vec{E}$  ed  $\vec{F} = q\vec{E}$  ] costituiscono una **coppia** e quindi hanno risultante nullo ma momento risultante diverso da zero .

Pertanto il dipolo resta fermo nel campo uniforme  $\vec{E}$  e la sua posizione di **equilibrio stabile** , corrispondente al **minimo dell'energia potenziale** , è col momento di dipolo  $\vec{p}$  parallelo e concorde col campo  $\vec{E}$  .

facendo ruotare il dipolo di un angolo  $\vartheta$  rispetto alla posizione di equilibrio stabile esso risente di un momento delle forze  $\vec{\tau}$  che tende a riportarlo nella posizione  $\vartheta = 0$  . Tale momento , calcolato ad esempio rispetto al centro del dipolo <sup>(20)</sup> è dato da:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad \tau = p \cdot E \cdot \sin \vartheta$$

**In corrispondenza di uno spostamento angolare  $d\vartheta$  quanto vale il lavoro fatto dalle forze del campo?** Quando abbiamo trattato delle rotazioni abbiamo visto che risulta :  $dL = \tau \cdot d\vartheta$

Poiché, durante la rotazione, le forze del campo compiono un lavoro negativo in quanto si oppongono alle rotazioni, dobbiamo scrivere :  $dL = -\tau \cdot d\vartheta$

$$dL = -\tau \cdot d\vartheta = -p \cdot E \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$$

<sup>(20)</sup> ma sappiamo che il momento di una coppia non dipende dal polo

Se il dipolo passa da un angolo  $\vartheta_0$  ad un angolo finale  $\vartheta$  abbiamo:

$$L_{\vartheta_0 \rightarrow \vartheta} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} -\tau d\vartheta = -pE \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = pE [\cos \vartheta]_{\vartheta_0}^{\vartheta} = pE (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)$$

Tale formula ci dà il lavoro compiuto dalle forze del campo quando il dipolo passa dalla posizione iniziale  $\vartheta_0$  alla posizione finale  $\vartheta$ .

Il campo elettrico è **conservativo** per cui possiamo definire una **energia potenziale**

$$U(P) = -L_{\vartheta_0 \rightarrow \vartheta} : U(P) = -L_{\vartheta_0 \rightarrow \vartheta} = -pE(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) = pE(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)$$

$U(P)$  = energia potenziale che compete ad un dipolo immerso nel campo elettrico  $\vec{E}$ .

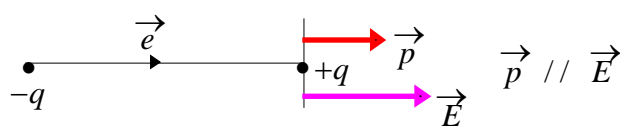
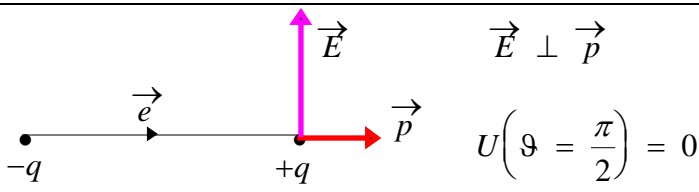
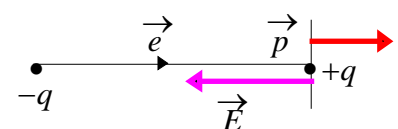
Dal momento che siamo interessati solo a variazioni dell'energia potenziale del dipolo, possiamo scegliere un conveniente angolo di riferimento  $\vartheta_0$  in maniera arbitraria.

Possiamo scegliere  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ . Questo significa che misuriamo l'energia potenziale del dipolo

rispetto ad una configurazione in cui il dipolo è ortogonale al campo elettrico  $\vec{E}$ . Ricordando che

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ otteniamo: } U(\vartheta) = -pE \cos \vartheta = -\vec{p} \times \vec{E}$$

Sono interessanti le seguenti configurazioni :

<b>Equilibrio STABILE</b>	$U(\vartheta = 0) = -pE =$ valore più basso che compete all'energia del dipolo  $\vec{p} // \vec{E}$
<b>Valore intermedio</b>	 $\vec{E} \perp \vec{p}$ $U\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) = 0$
<b>Equilibrio INSTABILE</b>	 $U(\vartheta = \pi) = pE =$ massimo valore della energia potenziale del dipolo