

Unità didattica N° 27: Il campo magnetico

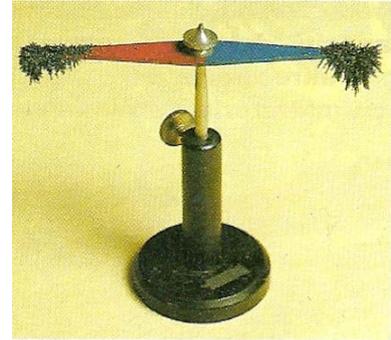
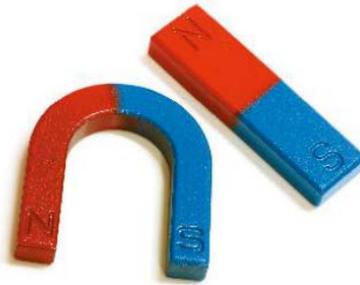
- 1) I magneti e le loro interazioni
- 2) Le interazioni tra magneti e correnti e tra correnti e correnti
- 3) Campo magnetico e vettore \vec{B}
- 4) Seconda legge di Laplace
- 5) Unità di misura del campo magnetico \vec{B}
- 6) La forza di Lorentz
- 7) Metodi pratici per l'individuazione del verso delle linee di campo
- 8) Prima legge di Laplace
- 9) Campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente:
legge di Biot-Savart
- 10) Campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente
- 11) Teorema della circuitazione di Ampere
- 12) Campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente
- 13) Interazione elettrodinamica fra due circuiti rettilinei percorsi da corrente:
definizione di ampere
- 14) Il vettore eccitazione magnetica \vec{H}
- 15) Moto di una carica puntiforme q in un campo magnetico uniforme \vec{B}
- 16) Esperienza di Thomson per determinare il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica elettrica
e la massa m dell'elettrone

\mathcal{J} magneti e le loro interazioni

- Già ai tempi del filosofo greco **Talete di Mileto** (VI secolo A.C.) era noto che un minerale di ferro la magnetite ($F_eO \cdot F_eO_3$ minerale composto da **ossido di ferro** e **ossido ferroso**, detto anche **sesquiossido di ferro**) gode della proprietà di attirare la limatura di ferro specialmente **lungo talune zone** della sua superficie. Si indica brevemente questa proprietà dicendo che tale minerale è magnetizzato e rappresenta una **calamita o un magnete naturale**. Si possono costruire magneti permanenti artificiali. Per esempio, una sbarretta di acciaio su cui viene ripetutamente strofinata, sempre nello stesso verso, una zona di maggiore attrazione di un pezzo di magnetite, diventa a sua volta un magnete. L'attrazione della limatura di ferro è limitata ai due estremi della sbarretta (**poli magnetici**); i due poli sono separati da una zona neutra ove la limatura non è attratta. Le calamite artificiali così ottenute, se costruite con opportuni materiali ferromagnetici e conservate con qualche cura, sono **permanenti**, cioè conservano praticamente inalterate per anni le loro proprietà magnetiche. Tuttavia il metodo di gran lunga più comodo per magnetizzare regolarmente una sbarretta di acciaio consiste nel disporla lungo l'asse di un solenoide in cui si invia una intensa corrente elettrica continua.
- Per un lungo periodo di tempo l'elettricità ed il magnetismo sono stati considerati come **enti fisici distinti ed indipendenti**, dotati di talune analogie e di forti differenze. Con l'estendersi delle indagini e la scoperta delle interazioni tra magneti e correnti elettriche, e più in generale tra magneti e cariche elettriche in movimento rispetto ad essi si è stabilita una relazione che riconduce i fenomeni magnetici ad azioni tra correnti elettriche. Ad **Ampère** (1820) spetta il grande merito di avere proposto una interpretazione dei fenomeni magnetici che riduce la magnetizzazione dei corpi ad effetti dovuti alla circolazione, all'interno del corpo magnetizzato, di correnti elettriche su scala molecolare e atomica.
- Le calamite possono avere forme diverse. Le più comuni sono: **a) calamita a barra parallelepipedica b) calamita a barra cilindrica c) calamita a ferro di cavallo** o ad U **d) calamita a forma di ago** detta più comunemente **ago magnetico**. Si tratta di una laminetta d'acciaio sottilissima avente la forma di losanga molto stretta ed allungata capace di ruotare attorno ad un perno verticale passante per il suo baricentro. Una calamita possiede la proprietà di attirare la limatura di ferro.

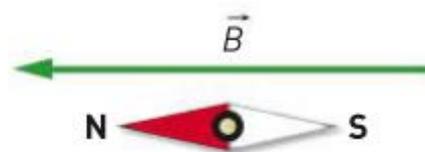
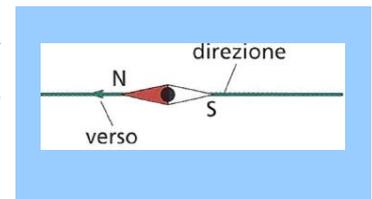
Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Un **magnete a barra** e un **magnete a ferro di cavallo**, un **ago magnetico**. I poli si trovano alle due estremità.

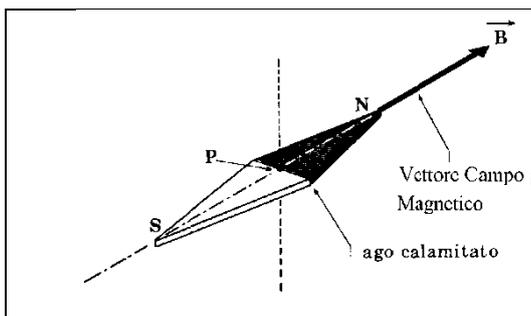


• L' **ago magnetico** è costituito da una lamina d'acciaio sottilissima avente la forma di losanga molto stretta ed allungata capace di ruotare attorno ad un perno verticale passante per il suo baricentro. Un ago magnetico si orienta sempre disponendosi in modo che un suo estremo si volga verso il nord geografico e l'altro estremo verso il sud geografico. Il primo estremo dicesi **polo nord** o **polo positivo** e viene indicato con uno dei due seguenti simboli N P_N , il secondo estremo dicesi **polo sud** o **polo negativo** e viene indicato con uno dei due seguenti simboli S , P_S . Ogni calamita genera nello spazio circostante un campo magnetico descritto dal vettore \vec{B} .

La direzione del campo magnetico \vec{B} è data dalla retta che unisce i poli **Nord** e **Sud** del magnete di prova, il verso è quello che va dal polo **Sud** al polo **Nord** del magnete di prova.



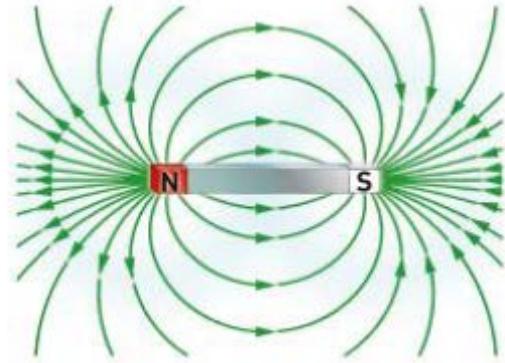
• Una calamita o un circuito percorso da corrente generano nello spazio circostante un **campo magnetico** \vec{B} la cui direzione ed il cui verso sono individuati dalle **linee di campo**. **Linea di campo** è una linea chiusa la cui tangente ci dà la direzione del campo \vec{B} ed il cui verso ci dà il verso del campo \vec{B} .



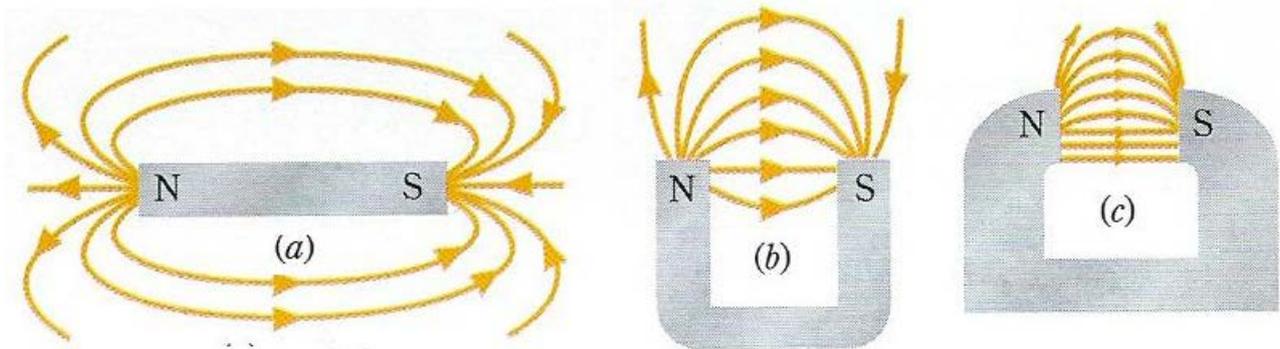
Assumiamo come **direzione** e **verso** di un campo magnetico \vec{B} in un punto P dello spazio la direzione ed il verso della retta orientata che va dal **polo sud** al **polo nord** di un aghetto magnetico in equilibrio e col baricentro coincidente con P .

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

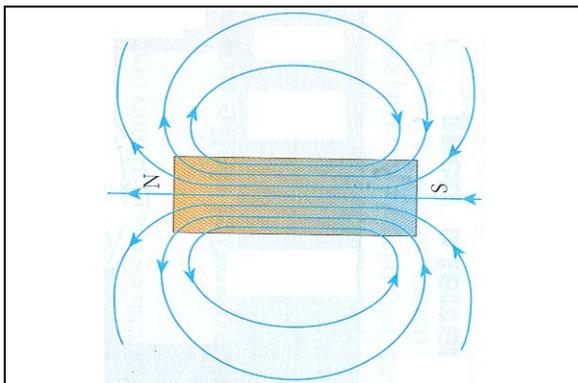
Le linee del campo magnetico nella regione esterna al magnete a barra vanno dal **polo nord N** al **polo sud S**, e nella regione interna alla barra magnetizzata vanno dal **polo sud S** al **polo nord N**.



Le linee del campo magnetico per tre magneti di geometria differente. Le linee del campo magnetico all'esterno di un campo magnetico escono dal suo **polo nord** ed entrano nel suo **polo sud**.



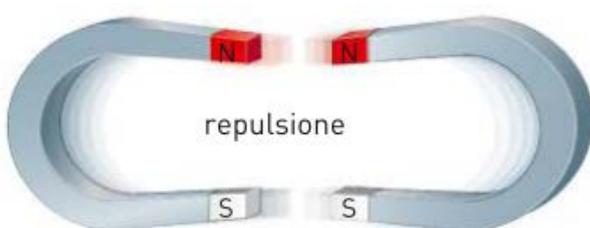
La rappresentazione mediante linee di campo indica non solo la direzione ed il verso del campo magnetico \vec{B} , ma permette anche di stimare la sua intensità: le linee del campo magnetico sono più fitte laddove il campo è più intenso.



Linee di campo per un magnete a sbarra

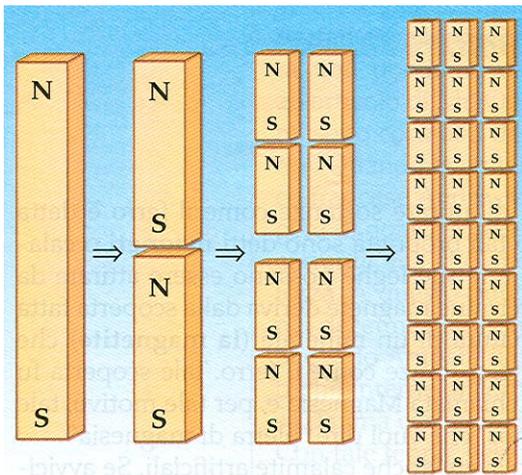
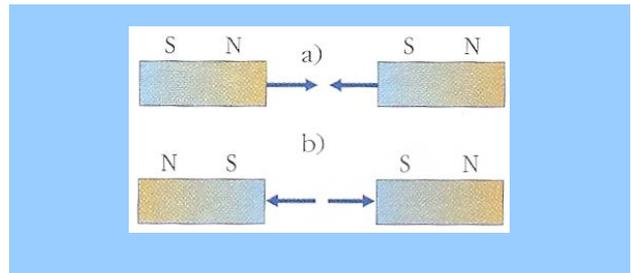
Nel punto A la direzione del campo magnetico coincide con l'asse dell'ago magnetico di prova (in posizione di equilibrio), il verso del campo magnetico è per convenzione quello che va dal polo **Sud** al polo **Nord** dell'ago magnetico di prova.

- Poli magnetici dello stesso nome si respingono, poli magnetici di nome diverso si attraggono.



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Poli magnetici di nome di verso **(a)** interagiscono con **forze attrattive**, mentre poli magnetici dello stesso nome **(b)** interagiscono con **forze repulsive**.



L'esperienza della calamita spezzata (ogni calamita divisa in due parti genera altre due calamite) ci dice che è impossibile realizzare poli magnetici separati. Non è possibile suddividere un magnete in modo da ottenere un **polo nord** isolato o un **polo sud** isolato. Suddividendo la calamita A si ottengono prima due calamite ridotte A' e A'', ma sempre con i due poli N ed S. Infine suddividendo ulteriormente A' e A'' si ottengono quattro calamite elementari, ma ognuna delle quali con i rispettivi due poli

Ogni calamita è costituita da un numero notevole di calamite elementari orientate secondo la direzione S-N, una di seguito all'altra e disposte su diverse file parallele ed in più strati.

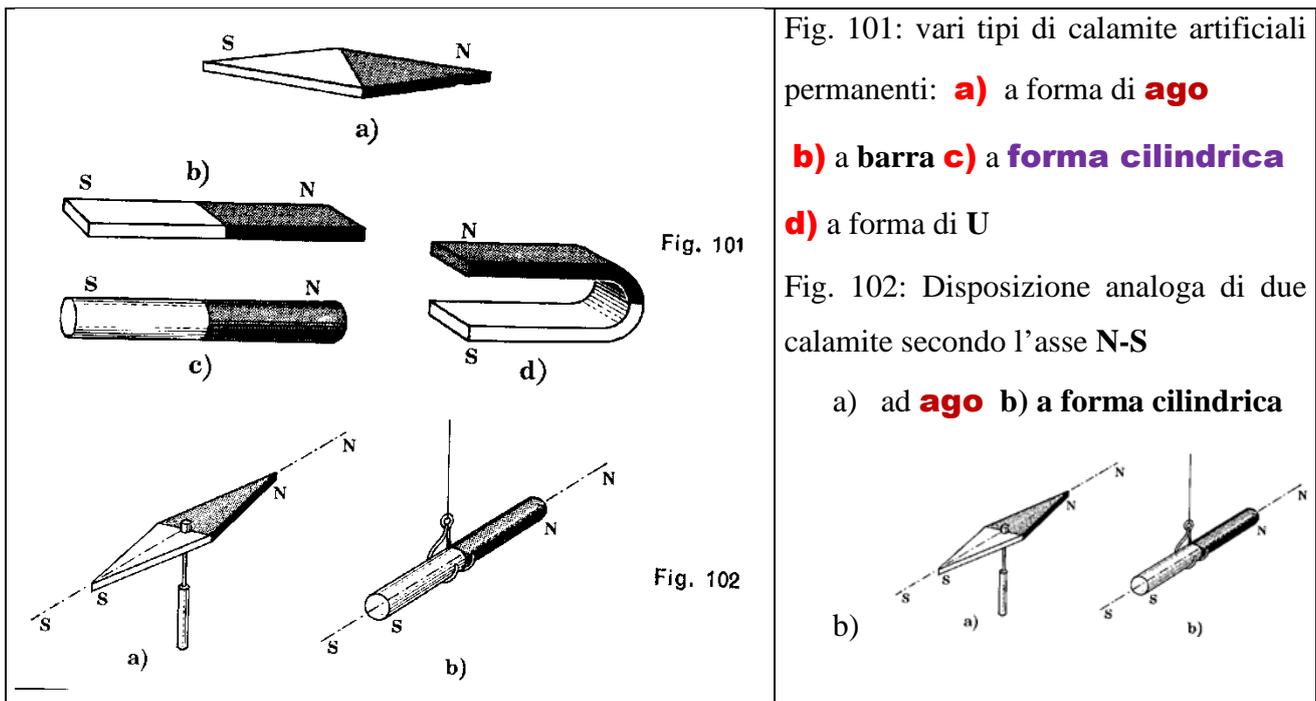


Fig. 101: vari tipi di calamite artificiali permanenti: **a)** a forma di **ago** **b)** a **barra** **c)** a **forma cilindrica** **d)** a forma di U

Fig. 102: Disposizione analoga di due calamite secondo l'asse N-S

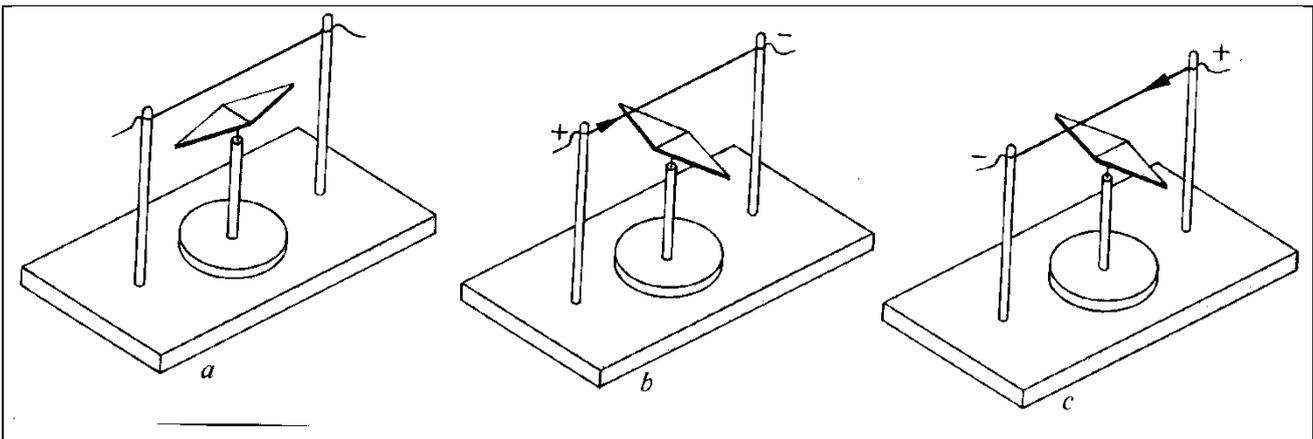
a) ad **ago** **b)** a **forma cilindrica**

Le interazioni tra magneti e correnti e tra correnti e correnti

- Un ago magnetico mobile, posto nelle vicinanze e parallelamente ad un filo conduttore percorso da corrente, devia dalla sua posizione di equilibrio e si dispone ortogonalmente al filo

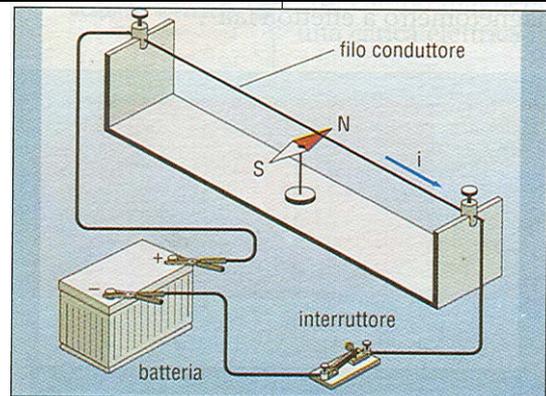
(Esperienza di Oersted 1820)

Questa esperienza dimostra che un filo conduttore percorso da corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico.



Schema dell'esperienza di Oersted: **a)** nel conduttore non passa corrente
b) nel conduttore passa corrente in un certo verso **c)** la corrente viene invertita

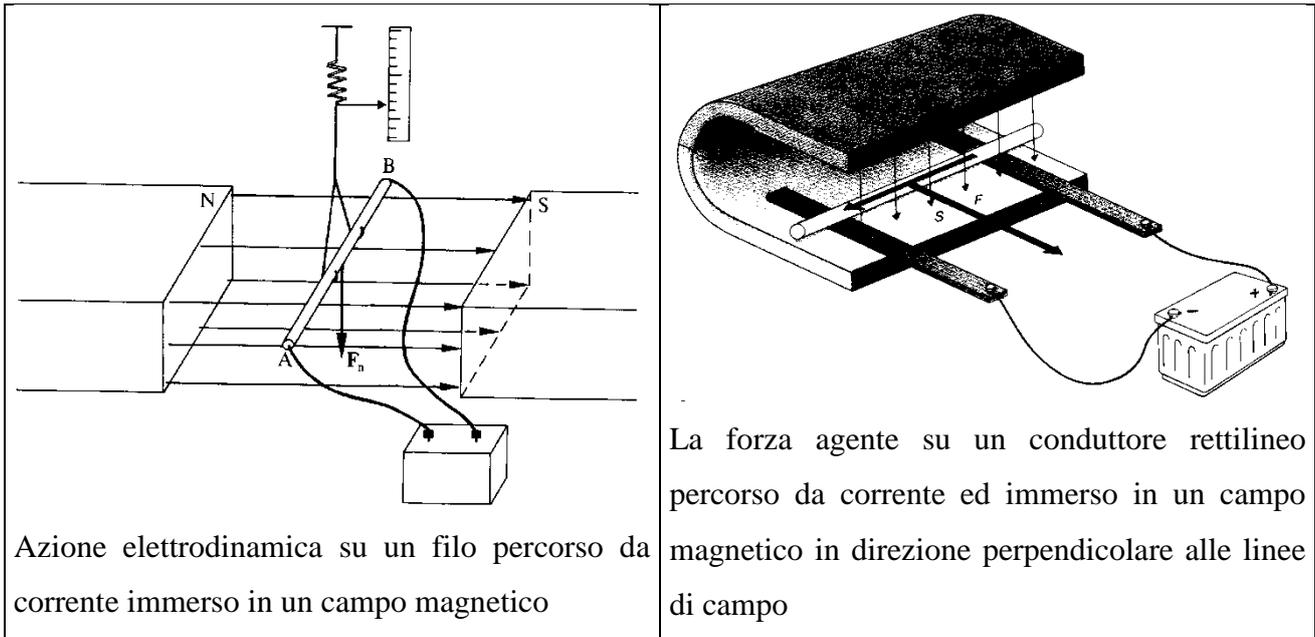
L'esperienza del fisico danese **Christian Oersted**: a circuito aperto, l'ago sente solo l'influenza del campo magnetico terrestre e si posiziona in direzione $S-N$. Quando passa corrente nel circuito, si genera un campo magnetico che fa ruotare l'ago magnetico di 90° e lo dispone perpendicolare al filo.



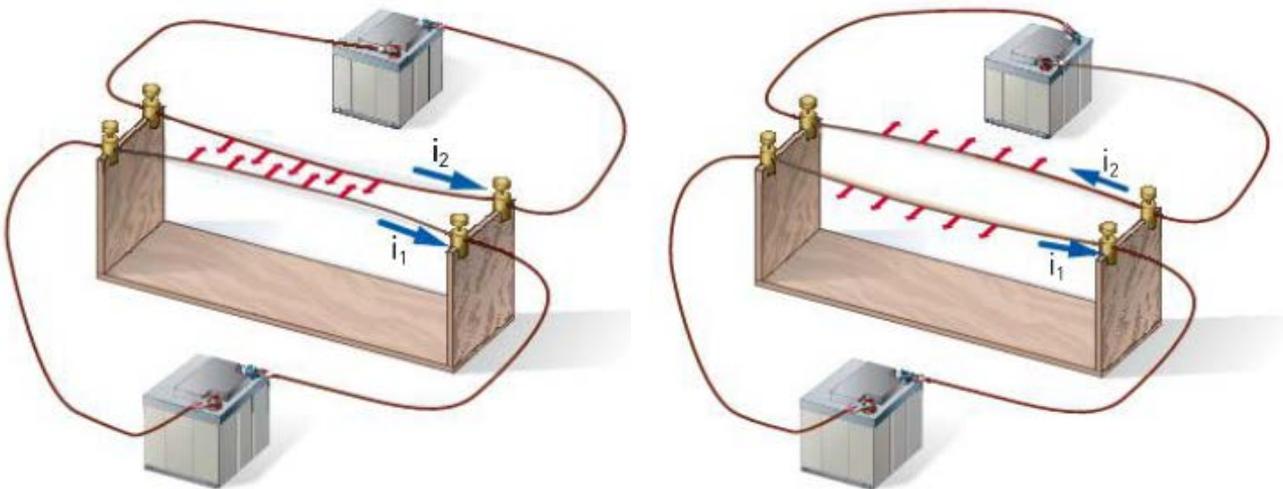
- Un tratto mobile percorso da corrente immerso in un campo magnetico creato da una calamita è soggetto ad una *forza* che tende a spostarlo perpendicolarmente alle linee di campo.

(Esperienza di Faraday 1821) Questa esperienza dimostra che un campo magnetico agisce mediante forze sulle cariche in movimento.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico



- Tra **due fili conduttori paralleli percorsi da corrente** si esercita una forza attrattiva o repulsiva a seconda che le correnti sono concordi o discordi.



Due fili paralleli **(a)** percorsi da corrente elettrica nello stesso verso si attraggono.

Due fili paralleli **(b)** percorsi da corrente elettrica in versi opposti si respingono.

L'intensità della forza di attrazione è direttamente proporzionale alle correnti i_1 e i_2 nei fili ed inversamente proporzionale alla distanza d tra essi. Questo esperimento permette di definire in modo operativo l'**ampere** come unità di misura della corrente elettrica.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Questa esperienza dimostra che le correnti elettriche interagiscono tramite campi magnetici. Il primo conduttore genera nello spazio circostante un campo magnetico che esercita delle forze sul secondo conduttore. Il secondo conduttore, a sua volta, genera nello spazio circostante un campo magnetico che esercita sul primo conduttore delle forze.

Tutte queste esperienze mostrano che le correnti elettriche producono campi magnetici e risentono dell'azione di campi magnetici, cioè mettono in evidenza l'intima connessione che intercorre tra fenomeni elettrici e fenomeni magnetici.

- Le forze che si esercitano tra correnti e correnti sono dette **forze elettrodinamiche**, quelle che si esercitano fra correnti e magneti sono dette **forze elettromagnetiche**, quelle che si esercitano fra magneti e magneti **forze magnetiche**.
- Un **campo magnetico** è **uniforme** quando il vettore che lo rappresenta è lo stesso in ogni punto del campo. Le **linee di un campo magnetico uniforme sono rette parallele ed equiverse**.
- Un ago magnetico immerso in un campo magnetico uniforme è soggetto ad una coppia di forze il cui momento meccanico diventa nullo quando l'ago magnetico si dispone lungo la stessa direzione e lo stesso verso del campo magnetico.

Campo magnetico e vettore \vec{B}

Da quanto detto precedentemente possiamo affermare che lo spazio attorno ad un magnete o ad un conduttore percorso da corrente è sede di un **campo magnetico** così come abbiamo detto che lo spazio nelle vicinanze di un conduttore elettrizzato è sede di un **campo elettrico**.

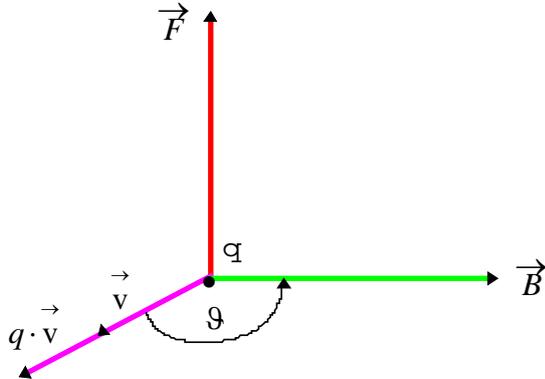
In ogni caso per **campo magnetico** dobbiamo intendere la perturbazione fisica che si genera in una regione dello spazio quando poniamo in tale regione una calamita o un reoforo percorso da corrente. La perturbazione consiste nella creazione di forze magnetiche che si manifestano quando collochiamo nella regione sede del campo magnetico un ago magnetico o una spira percorsa da corrente.

Un **campo magnetico** viene descritto dal vettore \vec{B} detto **vettore campo magnetico** (una volta era chiamato **induzione magnetica**) completamente individuato dalla relazione

vettoriale:
$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

dove \vec{F} è la forza che agisce sulla carica q avente velocità vettoriale \vec{v} posta in un punto del campo magnetico \vec{B} . \vec{F} è perpendicolare ai vettori $q\vec{v}$ e \vec{B} , ha modulo $F = qvB\sin\vartheta$, ha verso che si ottiene applicando la regola della mano destra.



<< Il verso di \vec{F} coincide col verso del pollice della mano destra se le altre dita si avvolgono nel verso della rotazione antioraria dell'angolo convesso ϑ >> .

- Le forze di tipo magnetico sono originate ed agiscono su cariche elettriche in movimento. Esse dipendono, oltre che dalla carica, anche dalla velocità vettoriale con cui si muovono le cariche.

Una buona descrizione dei fenomeni magnetici è quella di associare alle cariche elettriche in movimento (o i fili percorsi da corrente) la creazione di un **campo magnetico** e di fare discendere da esso le forze (magnetiche) agenti sulle cariche elettriche in movimento (o i fili percorsi da corrente elettrica).

- Il vettore fondamentale \vec{B} del campo magnetico è chiamato **induzione magnetica** anche se **intensità del campo magnetico** sarebbe stato il nome più adatto; ma questo nome è stato usurpato per ragioni storiche da un altro vettore, il vettore \vec{H} collegato al vettore \vec{B} dalla relazione $\vec{B} = \mu \vec{H}$

In questa fase non ci occuperemo delle cause che determinano il campo magnetico, ma ci preoccuperemo di stabilire: **1)** se in un dato punto esiste un **campo magnetico**

2) l'azione che questo campo magnetico esercita sulle cariche elettriche che si muovono in esso.

Come per il campo elettrico useremo una carica elettrica puntiforme q (positiva o negativa) per esplorare il campo magnetico \vec{B} e, per il momento non ci interessa sapere se a creare \vec{B} sia stato un magnete o un filo percorso da corrente. Inoltre supporremo che non sia presente nessun campo elettrico e questo significa che, se trascuriamo la gravità, nessuna forza agirà sulla carica di prova se essa è posta in quiete nel punto in esame. Diremo che in un punto esiste un **campo magnetico**

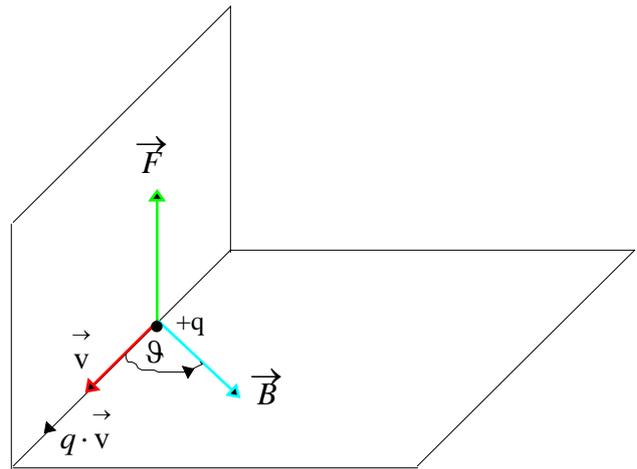
se in quel punto agisce una forza \vec{F} su una carica in moto.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

L'esperienza dimostra che, se la carica q si muove con una velocità \vec{v} in un campo magnetico \vec{B} , la forza magnetica \vec{F} che agisce sulla carica q , ci viene data dalla seguente formula:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

la quale definisce in modulo, direzione e verso il vettore \vec{B} .



Osservazione

$$F = q v B \sin \vartheta \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}}{q v \sin \vartheta}$$

La forza magnetica \vec{F} , che è sempre una **forza trasversale** in quanto risulta perpendicolare al piano individuato dai vettori \vec{v} e \vec{B} , è **nulla** quando $\vec{v} = \vec{0}$ oppure quando $\vec{v} // \vec{B}$; è **massima** se $\vec{v} \perp \vec{B}$. nel primo caso abbiamo $\sin \vartheta = 0$, nel secondo caso abbiamo $\sin \vartheta = 1$.

Questa definizione di \vec{B} è più complessa rispetto ad altre ma in compenso è simile nello spirito alla definizione dell'intensità del campo elettrico \vec{E} . Poiché \vec{F} risulta sempre perpendicolare alla velocità \vec{v} posseduta dalla carica q , risulta pure perpendicolare allo spostamento $d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$ per cui, (per **campi magnetici stazionari**) \vec{F} non compie lavoro.

Quindi un campo magnetico stazionario non può cambiare l'**energia cinetica** di una particella elettrica in moto; può soltanto mutare la direzione del vettore \vec{v} (ma non il suo modulo).

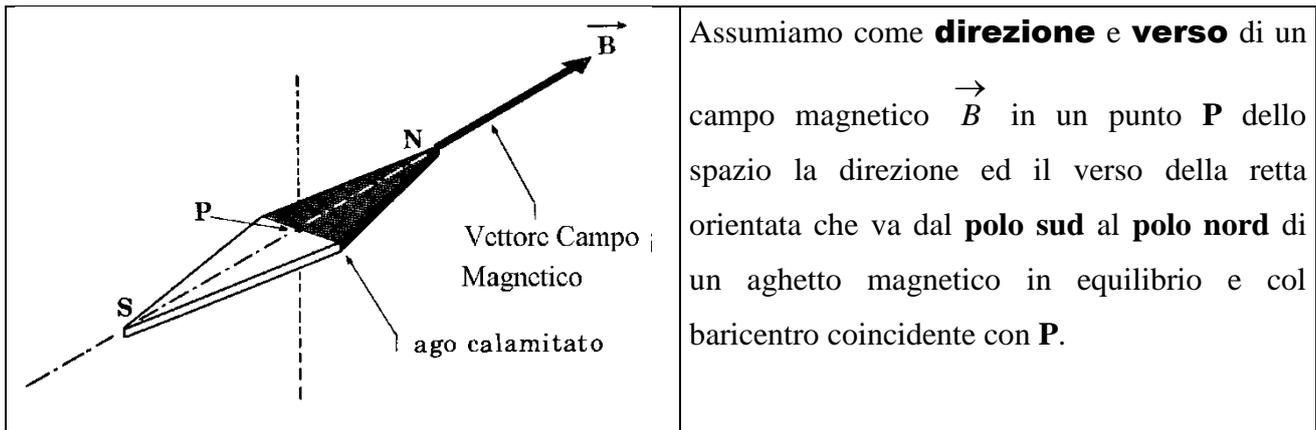
Se poi la carica elettrica q si muove in una regione dello spazio nella quale sono presenti un campo elettrico \vec{E} ed un campo magnetico \vec{B} essa è soggetta ad una **forza elettrostatica** \vec{F}_e e ad

una **forza magnetica** $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ e quindi ad una **forza elettromagnetica** \vec{F}_{em} , detta

forza di Lorentz, data da:

$$\vec{F}_{em} = q \cdot \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Qualche autore chiama **forza di Lorentz** soltanto la forza magnetica $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$.



Seconda legge di Laplace

Quando un conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico \vec{B} , gli elettroni di conduzione presenti all'interno del conduttore sono soggetti a **forze magnetiche** e quindi l'intero conduttore è soggetto a **forze magnetiche**. Consideriamo un conduttore filiforme e rettilineo lungo ℓ e percorso dalla corrente i immerso in un campo magnetico \vec{B} . Si verifica sperimentalmente e si dimostra teoricamente che il conduttore è soggetto ad una forza complessiva \vec{F} completamente definita dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{F} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}$ dove $\vec{\ell}$ rappresenta un vettore di modulo ℓ , diretto come il conduttore ed orientato nel verso convenzionale della corrente elettrica i .

Caratteristiche della forza: • **intensità:** $F = i \ell B \sin \vartheta$

- **direzione:** perpendicolare al piano individuato dai vettori \vec{B} ed $\vec{\ell}$
- **verso:** si determina applicando la regola della mano destra.

$\vec{F} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}$ può essere utilizzata come equazione di partenza per definire il vettore campo magnetico \vec{B} . In questo caso si dimostra che una carica q avente velocità \vec{v} immersa in un campo magnetico \vec{B} è soggetta ad una forza \vec{F} data dalla seguente relazione vettoriale: $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

La relazione $\vec{F} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B}$ esprime la **seconda legge di Laplace** in un caso particolare, precisamente quando il vettore campo magnetico \vec{B} è uniforme ed ℓ è un tratto di circuito rettilineo. Quale forza agisce su un circuito avente forma arbitraria, attraversato dalla corrente i , immerso in un campo magnetico qualsiasi \vec{B} ?

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

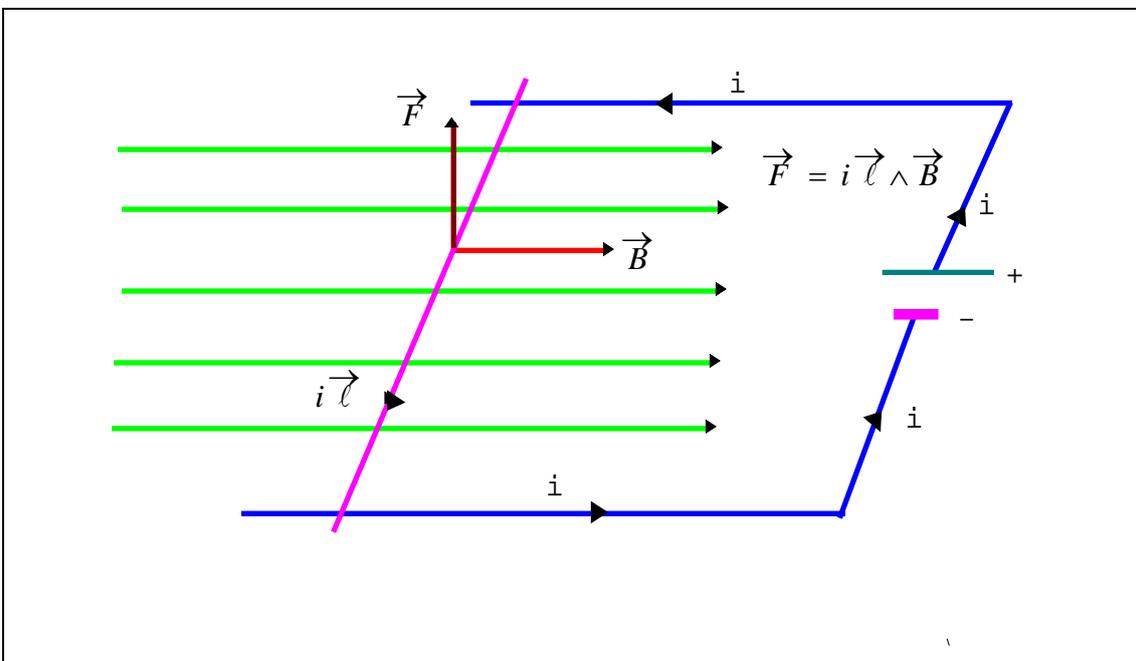
Si decompone il circuito in tanti tratti infinitesimi $d\ell$, in modo da poterli considerare rettilinei e tale che \vec{B} sia costante in ciascuno di essi.

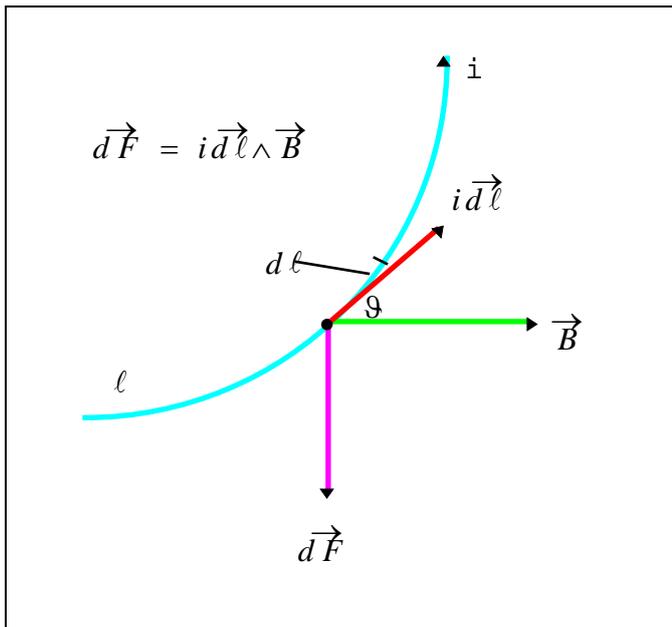
<p>Il verso della forza magnetica \vec{F}_m che si esercita su un filo rettilineo percorso dalla corrente i è dato dalla regola della mano destra ponendo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • il pollice della mano destra nel verso della corrente • le altre dita nel verso delle linee del campo magnetico • il verso della forza è quello che esce dal palmo della mano. 	
--	--

La forza $d\vec{F}$ che agisce su ciascuno di essi vale:

$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ ed esprime la **seconda legge di Laplace**.

campo magnetico (N/(A · m) o T)	$B = \frac{F}{il}$	forza magnetica (N)
intensità di corrente (A)	lunghezza (m)	





Seconda legge di Laplace

Sul tratto di circuito $d\ell$ agisce la forza

$$\vec{dF} \text{ data da: } \vec{dF} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La forza \vec{F} che agirà sul tratto ℓ di circuito sarà data dalla somma vettoriale delle forze elementari che agiscono sui singoli elementi

$$\text{infinitesimi } d\ell \text{ del circuito. } \vec{F} = i \cdot \int_P^Q d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

\vec{F} è la forza che agisce sul tratto di filo di lunghezza finita e di estremi P e Q.

Unità di misura e dimensioni del campo magnetico \vec{B}

$$B = \frac{F}{q v \sin \vartheta} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{F}{q v} \quad [B] = \frac{[F]}{[q v]} = \frac{[M \cdot L \cdot T^{-2}]}{[I \cdot T \cdot L \cdot T^{-1}]} = [M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}]$$

$$\{B\} = \text{tesla} = T = \frac{\{F\}}{\{q\} \cdot \{v\}} = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}}$$

Il **tesla** (T) rappresenta l'intensità di un campo magnetico uniforme che esercita la forza di un newton su una carica di un coulomb quando la carica si muove con la velocità di un metro al secondo in direzione ortogonale al campo magnetico \vec{B} .

$$B = \frac{F}{i \cdot \ell \cdot \sin \vartheta} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{F}{i \cdot \ell} \quad [B] = \frac{[F]}{[i \ell]} = [M \cdot T^{-2} \cdot \mathcal{J}^{-1}]$$

$$\{B\} = \text{tesla} = T = \frac{\{F\}}{\{i\} \cdot \{\ell\}} = \frac{N}{A \cdot m}$$

Il **tesla** (T) rappresenta l'intensità di un campo magnetico uniforme che esercita la forza di un newton su un filo conduttore, normale a \vec{B} , lungo un metro e percorso dalla corrente di un ampere.

- Un campo magnetico può essere descritto e visualizzato disegnando le sue **linee di forza** (meglio **linee di campo**) le quali, se orientate, ci danno due informazioni: la **direzione** di \vec{B} (retta tangente alla linea di campo) ed il verso di \vec{B} .

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Un campo magnetico è **più intenso** dove le linee di campo sono più fitte, è **meno intenso** dove le linee di campo sono più rarefatte.

- Assumiamo come **direzione** e **verso** di un campo magnetico \vec{B} in un punto **P** dello spazio la direzione ed il verso della retta orientata che va dal **polo sud** al **polo nord** di un aghetto magnetico in equilibrio e col baricentro coincidente con **P**.

- Malgrado alcuni parallelismi, **campo magnetico** e **campo elettrico** sono diversi.

Mentre esistono separatamente cariche elettriche positive e negative non esistono i **monopoli magnetici**, cioè non è possibile separare il polo magnetico **Sud** dal polo magnetico **Nord**.

Di conseguenza, mentre un campo elettrico agisce su una carica elettrica con una forza, un campo magnetico agisce su un ago magnetico con una **coppia di forze**.

- Un campo magnetico è generato sempre da cariche elettriche in movimento ed esercita forze su qualsiasi carica elettrica in movimento. Nel caso di un **magnete permanente** le cariche in movimento coincidono con gli elettroni degli atomi. Una diretta conseguenza di tale differenza è che una **linea di campo magnetico** è sempre **chiusa**, mentre una linea di un qualsiasi campo elettrico è sempre aperta. Una linea del campo elettrico nasce da una carica positiva e termina su una carica negativa, oppure nasce da una carica positiva e termina all'infinito, oppure proviene dall'infinito e termina su una carica positiva.

- **Le linee del campo magnetico**

Abbiamo visto che un campo magnetico può essere rappresentato mediante linee orientate dette **linee del campo magnetico**. La tangente ad una linea magnetica in un punto dà la direzione del vettore \vec{B} in quel punto. Ogni linea di campo è orientata nel verso di \vec{B} . La densità delle linee del campo magnetico in un dato punto è proporzionale all'intensità del campo magnetico in quel punto. Dove le linee del campo magnetico sono più **fitte** il campo magnetico è **più intenso** (**convenzione di Faraday**). Le linee di forza di un campo magnetico sono **linee chiuse** in quanto non esistono i monopoli magnetici. Le linee di forza di un campo elettrico, invece, sono **linee aperte**. Una diretta conseguenza di tale affermazione è che una **linea di campo magnetico** è sempre **chiusa**, mentre una **linea del campo elettrico** è sempre **aperta** in quanto una linea del campo elettrico:

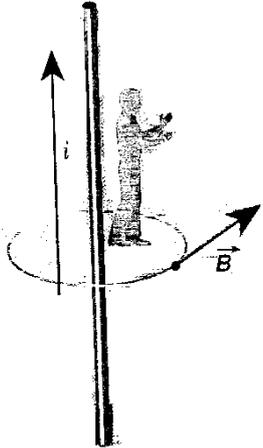
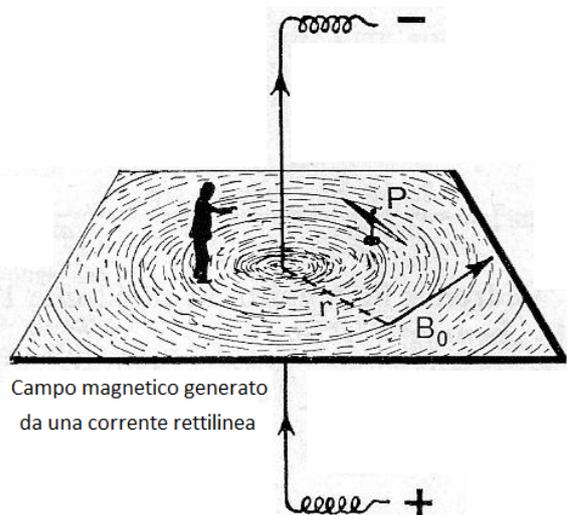
Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

- 1) o nasce da una carica positiva e termina su una carica negativa
- 2) o nasce da una carica positive e termina all'infinito
- 3) o proviene dall'infinito e termina su una carica negativa

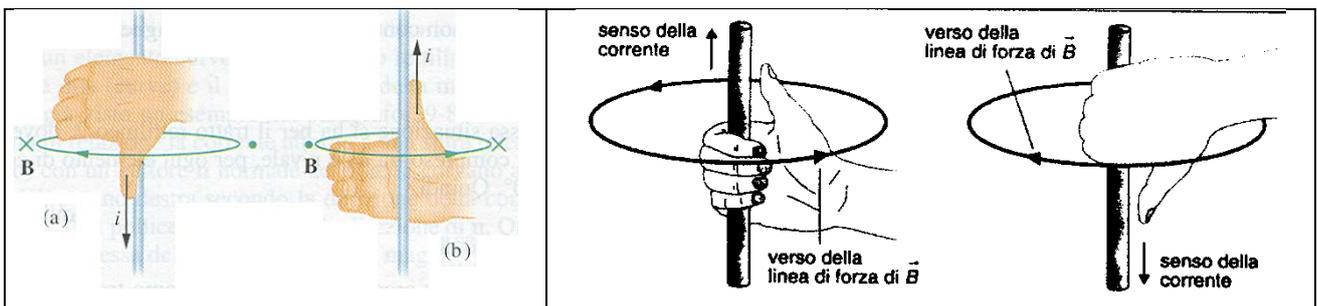
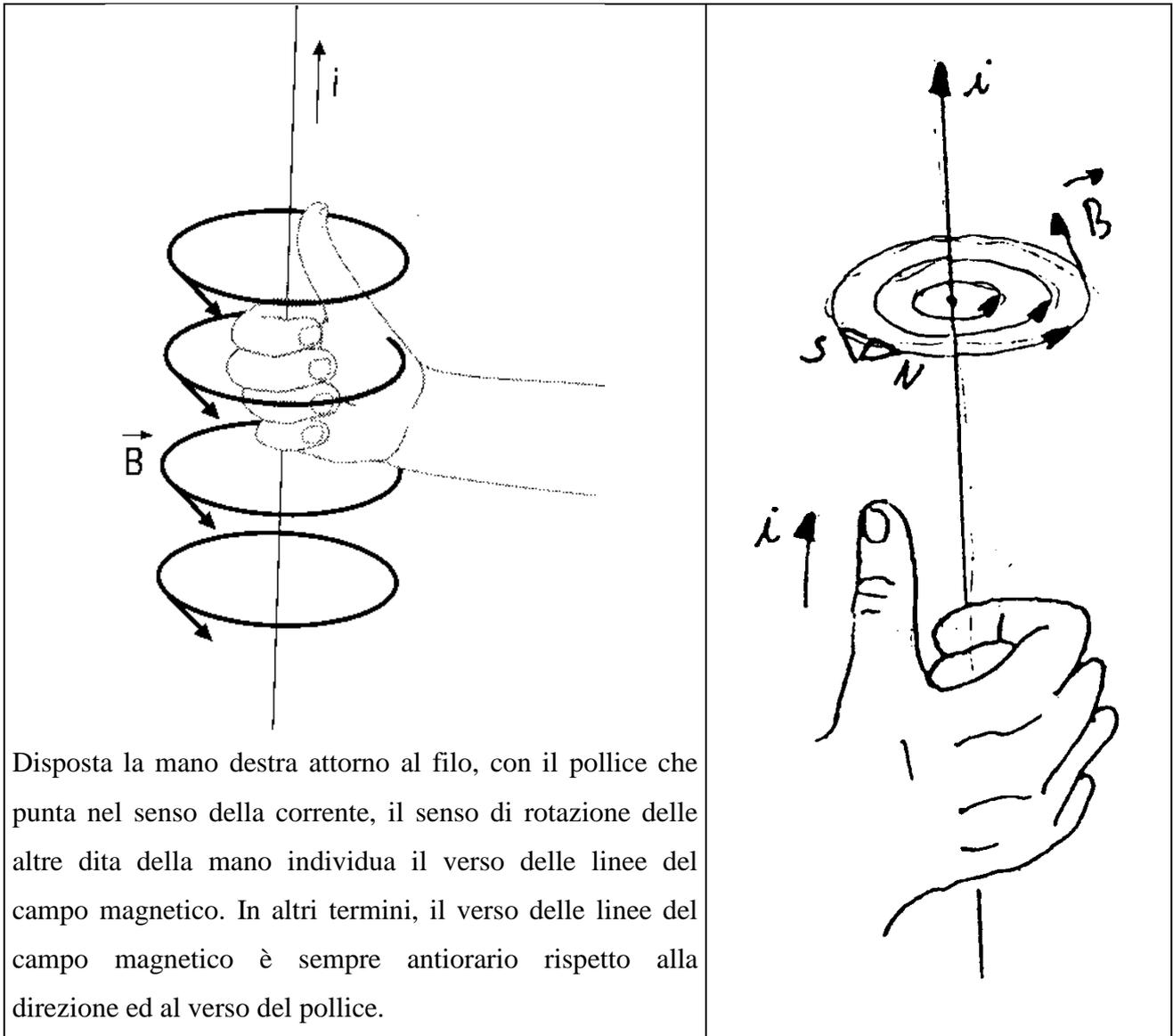
Metodi pratici per la individuazione del verso delle linee del campo magnetico

Un qualsiasi reoforo percorso da corrente genera nello spazio circostante un campo magnetico le cui linee di campo hanno verso da ricavare da una delle seguenti regole fra loro equivalenti:

Regola dell'uomo di Ampère

 <p>La regola della corrente personificata</p>	 <p>Campo magnetico generato da una corrente rettilinea</p>
<p>Un osservatore disposto parallelamente al filo rettilineo percorso da corrente in modo che la corrente i entri dai suoi piedi ed esca dal suo capo, attribuisce alle linee del campo magnetico un verso antiorario e, di conseguenza, attribuisce alle linee del campo magnetico un verso orario se è attraversato dalla corrente i dal capo ai piedi</p>	

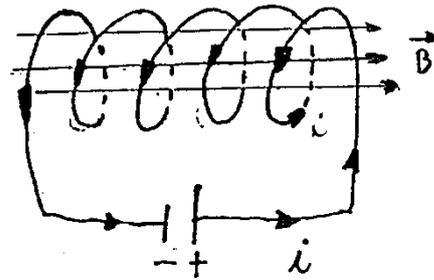
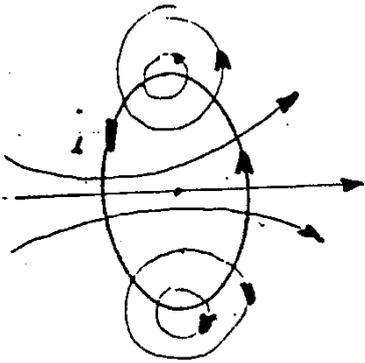
Regola della mano destra



Se il pollice della mano destra è nel verso della corrente i , le dita piagate individuano il verso del campo magnetico. Se un filo rettilineo percorso da corrente è afferrato con la mano destra in modo tale che il suo pollice sia orientato secondo il verso convenzionale in cui fluisce la corrente i , allora le altre dita circondano il filo nello stesso verso delle linee del campo magnetico.

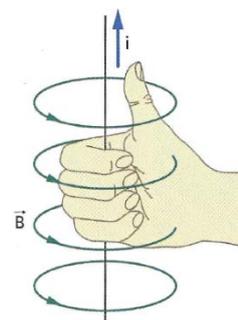
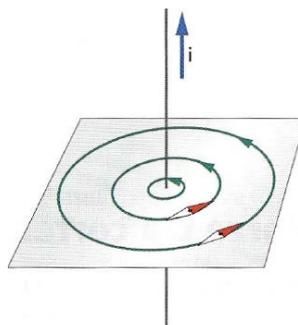
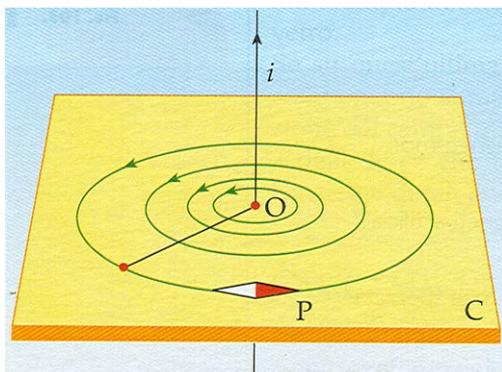
Regola dell'orologio

Un osservatore che guardi una spira o un solenoide percorsi dalla corrente i , e che veda circolare la corrente i in verso opposto alle lancette dell'orologio, vede uscire le linee del campo magnetico dall'interno della spira o del solenoide verso di sé.

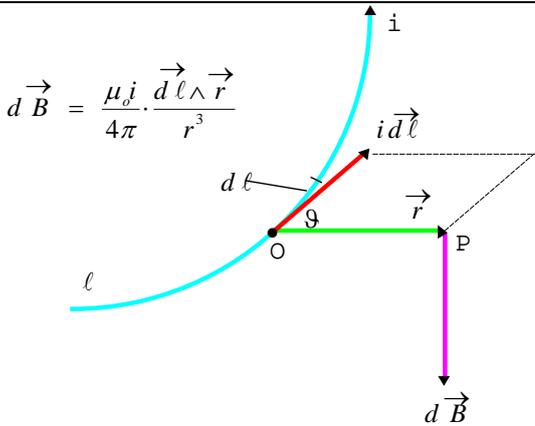


	<p>Un osservatore che guarda una spira percorsa da corrente vede la faccia NORD (la faccia SUD) se la corrente circola in verso antiorario (orario)</p>

Linee di un campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente



Prima legge di Laplace

<p>Ci consente di calcolare il campo magnetico \vec{B} generato da un conduttore metallico filiforme (reoforo) percorso dalla corrente i. Il vettore \vec{B} in un generico punto dello spazio è da considerarsi come la somma vettoriale di infiniti contributi ciascuno derivante da un elemento di corrente facente parte del conduttore che crea il campo.</p>	
---	--

Sia ℓ un reoforo percorso dalla corrente i . Indichiamo con $d\ell$ un elemento infinitesimo del reoforo, con $i d\ell$ un vettore avente come verso positivo quello della corrente i , come modulo $i d\ell$ e come direzione la retta tangente al reoforo nel punto O (origine dell'elemento infinitesimo del reoforo), con \vec{r} il vettore $P-O$. La **prima legge di Laplace** postula che un elemento $d\ell$ di conduttore percorso dalla corrente i , genera in un punto P alla distanza $r = P-O$ un campo magnetico \vec{B}

individuato dalla seguente relazione vettoriale:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad [S]$$

che, in termini scalari, diventa:
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \sin \vartheta}{r^2}$$

($i d\ell$ è un vettore avente la direzione di $d\ell$, il verso della corrente convenzionale i ed il modulo $i d\ell$).

Un reoforo ℓ crea, in un punto P , un campo magnetico \vec{B} che è la somma vettoriale di tutti i campi magnetici elementari $d\vec{B}$ creati dagli elementi $d\ell$ di cui esso è costituito. Se nel punto P voglio calcolare il campo magnetico generato da un filo di lunghezza finita e di estremi P e Q basta applicare la seguente formula:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \int_P^Q \frac{d\vec{\ell} \cdot \sin \vartheta}{r^2}$$

Se nel punto P voglio calcolare il campo magnetico generato da un circuito chiuso avente forma qualsiasi e percorso dalla corrente stazionaria i , dobbiamo applicare la seguente formula:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\vec{\ell} \cdot \sin \vartheta}{r^2}$$

Campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente: legge di BIOT-SAVART

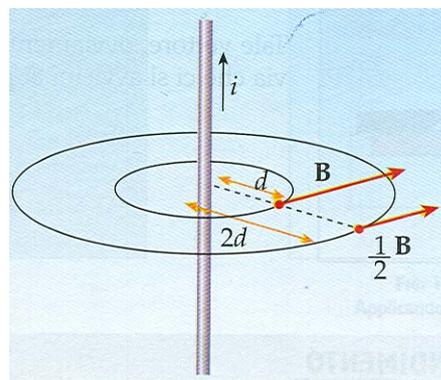
Un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i genera nello spazio circostante un campo magnetico \vec{B} . Le linee del campo magnetico sono circonferenze situate su piani perpendicolari al filo ed aventi i centri sul filo stesso. Il verso delle linee di campo si ottiene applicando la regola della **mano destra**, oppure collocando in un punto della linea di campo un piccolo aghetto magnetico mobile. Il verso della linea di campo coincide col verso $S \rightarrow N$ dell'aghetto magnetico nella sua posizione di equilibrio. Una linea del campo magnetico orientata ci fornisce, punto per punto, la direzione ed il verso di \vec{B} . Il campo magnetico \vec{B} prodotto da un filo rettilineo infinito percorso dalla corrente i è un vettore che:

- 1) giace sul piano α passante per il punto P e perpendicolare al filo
- 2) è tangente alla circonferenza che giace su α , passa per P ed ha come centro l'intersezione O di α col filo
- 3) verso indicato in figura e ricavabile con la regola della mano destra.
- 4) modulo: $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$

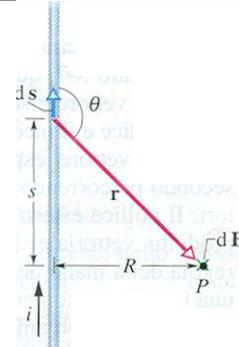
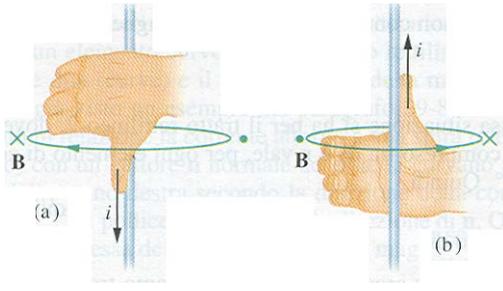
Quindi in un punto P distante r da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i il campo magnetico vale: $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$ [1] (Legge di **Biot-Savart**)

Legge di **Biot-Savart**

Linee del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i .



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

<p>Calcolo del campo magnetico \vec{B} dovuto a una corrente i passante in un lungo filo rettilineo, Il campo $d\vec{B}$ associato all'elemento di corrente $i \cdot ds$ ha direzione entrante nella pagina, come mostrato in figura.</p>	
<p>La regola della mano destra dà il verso del campo magnetico \vec{B} dovuto al passaggio di una corrente in un filo. (a) La situazione della figura vista di lato. Il campo magnetico \vec{B} in ogni punto sulla sinistra del filo punta nella direzione entrante nella pagina (x), nella direzione delle punte delle dita. (b) Se la corrente viene invertita, \vec{B} in ogni punto sulla sinistra del filo ha verso uscente dalla pagina (punto).</p>	

Osservazione: Notare che il campo magnetico nel punto O generato da una delle due metà del filo

rettilineo infinito vale la metà di quello generato dall'intero fili, cioè: $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi r}$

La [1] si dimostra calcolando il seguente integrale generalizzato:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = 2 \cdot \int_0^{+\infty} dB = 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{r^2} d\ell = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{r^2} d\ell$$

Ho un filo rettilineo percorso dalla corrente i e voglio calcolare il modulo di \vec{B} in un generico punto P distante R dal filo. Per la prima legge di Laplace il contributo elementare di campo

$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cdot \sin \vartheta}{r^2}$ nel punto P , dovuto all'elemento di corrente $i d\ell$, vale:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = 2 \cdot \int_0^{+\infty} dB = 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{r} d\ell = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{r^2} d\ell$$

$$R = r \cdot \sin(\pi - \vartheta) = r \cdot \sin \vartheta \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{\ell^2 + R^2}} \quad r^2 = \ell^2 + R^2$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \vartheta}{r^2} d\ell = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{R}{(R^2 + \ell^2)\sqrt{R^2 + \ell^2}} d\ell = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{R}{(R^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}}} d\ell = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left[\frac{\ell}{\sqrt{R^2 + \ell^2}} \right]_0^{+\infty}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi R} \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\sqrt{R^2 + \ell^2}} = 1$$

Posso calcolare l'integrale indefinito utilizzando la seguente sostituzione:

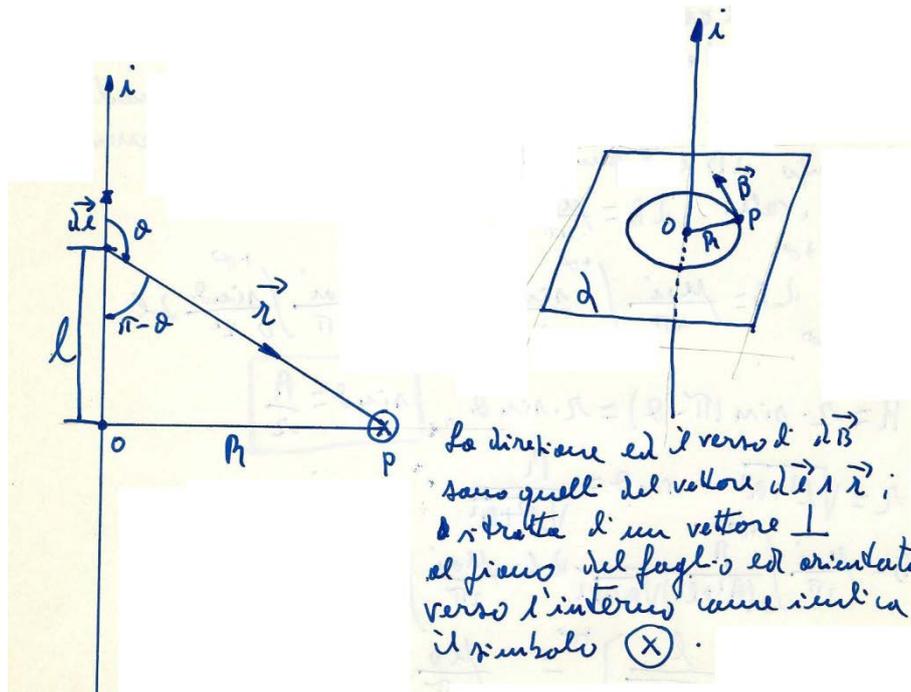
$$\ell = R \cdot \operatorname{tg} x \quad \ell = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 0; \quad \ell = +\infty \Rightarrow \operatorname{tg} x = +\infty \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad d\ell = \frac{R}{\cos^2 x} dx$$

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

$$(R^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}} = (R^2 \operatorname{tg}^2 x + R^2)^{\frac{3}{2}} = [R^2 (\operatorname{tg}^2 x + 1)]^{\frac{3}{2}} = \left[R^2 \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) \right]^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{R^2}{\cos^2 x} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{R^3}{\cos^3 x} \Rightarrow$$

$$(R^2 + \ell^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{R^3}{\cos^3 x}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos^{\delta} x}{R^3} \cdot \frac{R}{\cos^2 x} dx = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{R}$$



Questo risultato può essere ricavato in maniera più semplice applicando la legge di Ampere:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \times d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

Dove ℓ è la linea del campo magnetico passante per il punto P ; si tratta di una circonferenza concentrica col filo percorso dalla corrente i e passante per il punto P . \vec{B} e $d\vec{\ell}$ sono paralleli ed

equiversi; $\text{ang}(\vec{B}; d\vec{\ell}) = 0$. $\oint_{\ell} \vec{B} \times d\vec{\ell} = \mu_0 i \Rightarrow \oint_{\ell} B \cdot d\ell \cdot \cos 0 = \mu_0 i \Rightarrow B \oint_{\ell} d\ell = \mu_0 i$

$$2\pi R B = \mu_0 i \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{R}$$

Campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente

Una spira circolare percorsa dalla corrente i genera nello spazio circostante un campo magnetico \vec{B}_o che presenta queste caratteristiche:

- 1)** Le linee del campo magnetico sono linee chiuse concatenate col filo circolare

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Una sola linea di campo è **rettilenea** ed è quella coincidente con l'asse della spira; le altre invece sono curve, simmetriche rispetto all'asse stesso, che si addensano da una parte e dall'altra della spira sino ad assumere in vicinanza del filo una forma sensibilmente circolare

2) La **direzione del campo magnetico** \vec{B}_o è in ogni punto tangente alle linee di campo e risulta in particolare perpendicolare al piano della spira. **3)** Il **verso delle linee di campo** può essere individuato con la **regola dell'orologio**. Un osservatore che guarda la spira circolare percorsa dalla corrente i , se vede circolare la corrente in verso opposto alle lancette dell'orologio (**verso antiorario**) vede uscire le linee di campo dalla spira verso di sé **4)** Nei punti P dell'asse

della spira a distanza z da questa il campo magnetico B_o vale:
$$B_o = \frac{\mu_o}{2} \cdot i \cdot \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}}$$

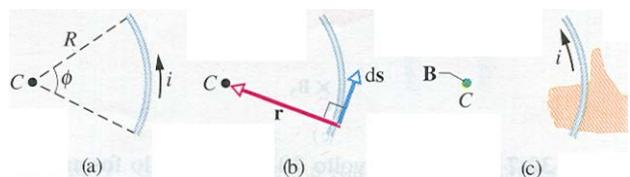
In particolare, nel centro della spira di raggio r abbiamo:
$$B_o = \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{i}{r}$$

Linee del campo magnetico di una spira circolare percorsa dalla corrente i . Il campo magnetico è simile a quello di un magnete a sbarra. Per individuare il verso di \vec{B}_o si può applicare la **regola della mano destra**. Se le dita della mano destra sono piegate nello stesso verso in cui fluisce la corrente i nella spira, il pollice fornisce il verso delle linee del campo magnetico che attraversano la spira. Il campo magnetico al centro di una spira ad arco di cerchio di ampiezza Φ e percorsa dalla corrente i vale:

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \int_0^\Phi d\Phi = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot [\Phi]_0^\Phi = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \Phi \quad B = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i}{r^2} \cdot \Phi$$

con $\Phi = \frac{L}{r}$ e con: $L =$ **arco di spira** percorsa dalla corrente i

(a) Un filo a forma di arco circolare con centro in C è percorso da una corrente i . **(b)** Per ogni elemento lungo l'arco, l'angolo tra ds ed r vale 90° . **(c)** Determinazione del verso del campo magnetico in C dovuto alla corrente nel filo; il campo è uscente dalla pagina



Teorema della circuitazione di Ampere

Consideriamo una linea chiusa ℓ tracciata in un campo magnetico \vec{B} ed assumiamo su di essa, in maniera arbitraria, un **verso positivo**. Suddividiamo la linea ℓ in elementi $\Delta\ell$ piccoli a

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

piacere (in teoria in elementi infinitesimi $d\ell$) Per ogni elemento $\Delta\ell$ ($d\ell$) della linea chiusa si considerino poi:

1) il vettore $\vec{\Delta\ell}$ ($\vec{d\ell}$) avente per modulo $\Delta\ell$ ($d\ell$) e per direzione e verso quelli della tangente alla curva nel punto considerato orientato secondo il verso positivo assunto sulla curva.

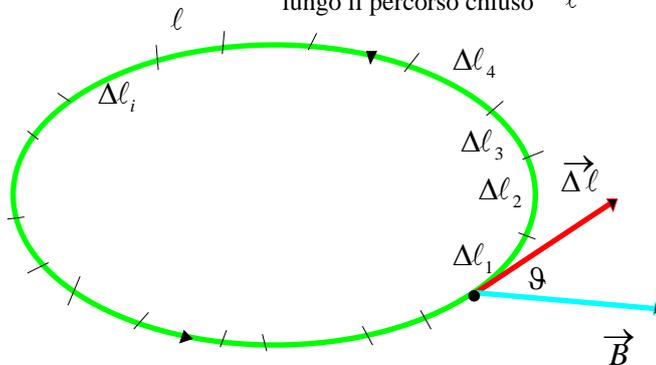
2) il prodotto scalare $\vec{B} \times \vec{\Delta\ell} = B \cdot \Delta\ell \cdot \cos\vartheta$ ($\vec{B} \times \vec{d\ell} = B \cdot d\ell \cdot \cos\vartheta$), ove \vec{B} è il vettore campo magnetico nel punto in cui si considera $\vec{\Delta\ell}$ ($\vec{d\ell}$) e ϑ l'angolo formato dalle direzioni orientate di \vec{B} e $\vec{\Delta\ell}$ ($\vec{d\ell}$).

La somma delle quantità $\vec{B} \times \vec{\Delta\ell}$ ($\vec{B} \times \vec{d\ell}$) estesa a tutti gli elementi della curva chiusa ℓ prende il nome di **circuitazione del vettore \vec{B}** lungo la linea chiusa ℓ nel verso prestabilito, cioè:

$$C_1(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{\Delta\ell}_1 + \vec{B} \times \vec{\Delta\ell}_2 + \vec{B} \times \vec{\Delta\ell}_3 + \dots + \vec{B} \times \vec{\Delta\ell}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B} \times \vec{\Delta\ell}_i$$

In termini differenziali abbiamo: $C_1(\vec{B}) = \oint \vec{B} \times \vec{d\ell} = \oint B \cdot \cos\vartheta \cdot d\ell$

$$C_\ell(\vec{B}) = \sum_{i=1}^n \vec{B} \times \vec{\Delta\ell}_i \quad \text{Circuitazione del vettore } \vec{B} \text{ lungo il percorso chiuso } \ell$$



La definizione di **circuitazione del vettore \vec{B}** , precedentemente introdotta, è valida per un campo vettoriale \vec{v} qualsiasi. Se risulta $C_\ell(\vec{v}) = 0$, qualunque sia la linea chiusa ℓ , allora \vec{v} dicesi **campo conservativo**. Il campo gravitazionale \vec{g} e quello elettrostatico \vec{E} sono conservativi in quanto risulta $C_\ell(\vec{g}) = 0$, $C_\ell(\vec{E}) = 0$. Il campo magnetico \vec{B} non è un campo conservativo in quanto, in generale, risulta: $C_\ell(\vec{B}) \neq 0$.

Dimostriamo adesso il **teorema della circuitazione di Ampere** per un campo magnetico prodotto da un filo infinito percorso dalla corrente i . Il risultato ottenuto è estendibile ad un qualsiasi altro campo magnetico. Sia \vec{B} il campo magnetico creato da un filo rettilineo indefinito

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

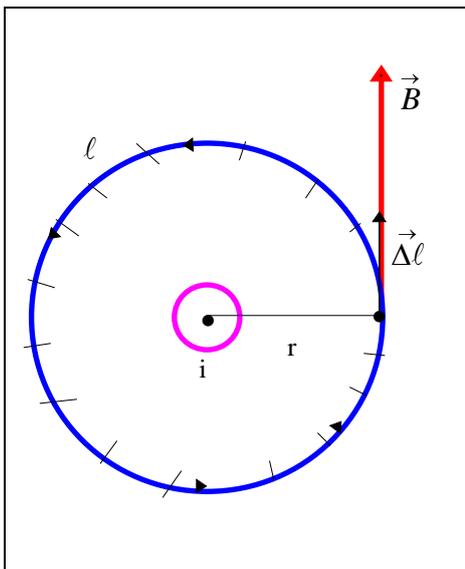
percorso dalla corrente \mathbf{i} e sia ℓ una circonferenza di raggio r concentrica col filo rettilineo, ad esso perpendicolare e con verso positivo (ad esempio quello antiorario) fissato ad arbitrio. La corrente \mathbf{i} sarà considerata **positiva** (o **negativa**) secondo che alla corrente convenzionale del filo (quella dei protoni per intenderci) personificata (che va dai piedi al capo dell'osservatore) **appaia** (**non appaia**) **antiorario** il verso di percorrenza della linea chiusa secondo il verso positivo prefissato.

$$C_\ell(\vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \times \Delta \ell_1 + \vec{\mathbf{B}} \times \Delta \ell_2 + \vec{\mathbf{B}} \times \Delta \ell_3 + \dots + \vec{\mathbf{B}} \times \Delta \ell_n = \mathbf{B} \cdot \Delta \ell_1 + \mathbf{B} \cdot \Delta \ell_2 + \mathbf{B} \cdot \Delta \ell_3 \dots + \mathbf{B} \cdot \Delta \ell_n$$

$$C_\ell(\vec{\mathbf{B}}) = \mathbf{B} \cdot (\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3 \dots + \Delta \ell_n) = 2\pi r \mathbf{B}$$

Ma per la legge di **Biot-Savart** abbiamo: $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$ per cui possiamo scrivere:

$$C_\ell(\vec{\mathbf{B}}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} \cdot 2\pi r = \mu_0 \mathbf{i} \quad [§]$$



Il punto centrale indica una corrente \mathbf{i} nel filo, diretta dalla pagina del foglio verso l'esterno. L'angolo fra $\vec{\mathbf{B}}$ e $\vec{\Delta \ell}$ è zero, sicché $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\Delta \ell} = B \cdot \Delta \ell$. In questo caso la linea chiusa ℓ coincide con una linea del campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$.

$\vec{\mathbf{B}}$ è il campo magnetico generato dalla corrente \mathbf{i} .

La [§] è valida in generale per qualsiasi configurazione del campo magnetico, per qualsiasi distribuzione di corrente e per qualsiasi linea chiusa.

Nel caso in cui la linea ℓ si avvolga N volte attorno al circuito percorso dalla corrente \mathbf{i} abbiamo :

$$C_\ell(\vec{\mathbf{B}}) = \mu_0 N \mathbf{i}$$

Se il campo magnetico $\vec{\mathbf{B}}$ è generato da più circuiti percorsi rispettivamente dalle correnti di intensità i_1, i_2, \dots, i_n allora abbiamo :

$$C_\ell(\vec{\mathbf{B}}) = \mu_0 (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \dots + \mathbf{i}_n) = \sum_{s=1}^n \mu_0 \mathbf{i}_s = \mu_0 \mathbf{i}$$

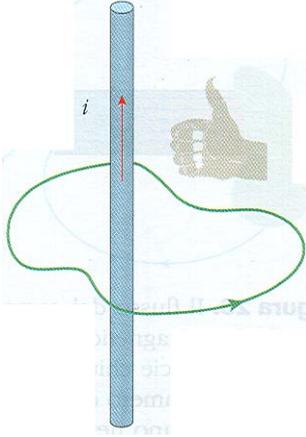
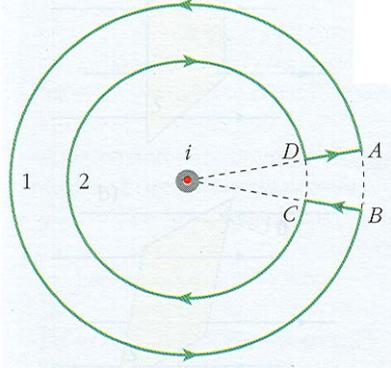
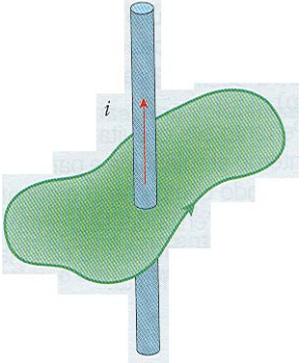
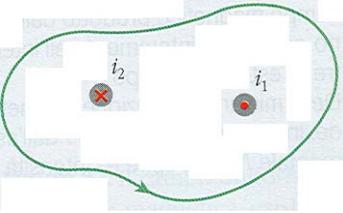
dove \mathbf{i} rappresenta la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea chiusa ℓ .

Se la linea chiusa ℓ non è concatenata col circuito in cui passa la corrente \mathbf{i} , allora abbiamo:

$$C_\ell(\vec{\mathbf{B}}) = 0$$

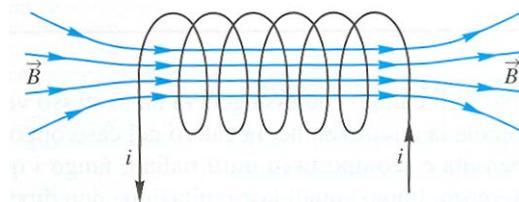
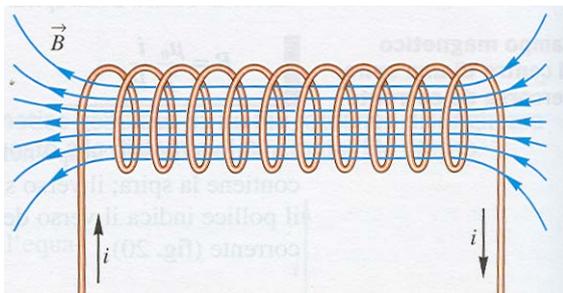
Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Il fatto che $C_\ell(\vec{B})$, in generale, è diversa da zero significa che il **campo magnetico non è conservativo** e quindi ad esso non è conveniente associare un **potenziale magnetico** in quanto questi verrebbe ad essere una funzione a più valori (cioè ad uno stesso punto di uno stesso campo magnetico verrebbero a corrispondere almeno due valori diversi del potenziale magnetico).

<p>Stabilito il verso di percorrenza della linea chiusa su cui si calcola la circuitazione del campo magnetico, la corrente concatenata con la linea è assunta con segno positivo se circola nel verso indicato dal pollice della mano destra quando le altre dita sono avvolte nel verso della linea; in caso contrario è assunta con segno negativo</p>		<p>La circuitazione del campo magnetico lungo il percorso chiuso ABCDA, con il quale la corrente i che genera il campo non è concatenata, è nulla</p>	
<p>E' concatenata con una linea chiusa ogni corrente che attraversi una qualunque superficie, anche non piana, avente come contorno la linea considerata</p>		<p>Percorrendo la linea chiusa in senso antiorario, la corrente concatenata i_1, uscente dal foglio, è positiva; la corrente concatenata i_2, entrante, è negativa. La corrente totale concatenata con la linea è $i_c = i_1 - i_2$</p>	

Campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente

Si chiama **solenoid** un avvolgimento di filo conduttore a forma elicoidale di **passo** piccolissimo. (**Passo** di un solenoide è la distanza che intercorre tra due spire consecutive).



Linee del campo magnetico generato da un **solenoid**: il campo magnetico è **uniforme** all'interno del solenoide e **nulla** all'esterno.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Le spire sono quindi molto vicine e, in prima approssimazione, possiamo considerare il solenoide come formato da un sistema di N spire uguali e coassiali.

Ciascuna spira può essere considerata piana. Le spire sono percorse dalla corrente i , sono affiancate in modo da costituire una superficie cilindrica le cui generatrici sono rette tra loro parallele e perpendicolari al piano di ciascuna spira.

Se, per esempio, le spire sono circolari, il solenoide ha la forma di un cilindro circolare ed il suo asse, normale al piano di ciascuna spira, è l'**asse** del solenoide. Sia $n = \frac{N}{\ell}$ il numero di spire riferite alla lunghezza ℓ del solenoide (numero di spire per unità di lunghezza)

In un **solenoide infinito** (nella pratica si considera tale un solenoide che abbia lunghezza ℓ grande rispetto al raggio r di ciascuna spira: $\ell \gg r$) il campo magnetico \vec{B} è (debole) **nullo all'esterno** mentre all'interno è un vettore:

- avente come **verso** quello che si ricava applicando la regola dell'orologio o la regola della mano destra
- come **direzione** l'asse del solenoide
- come **modulo**:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} \mathbf{i} = \mu_0 n \mathbf{i} \quad [*§]$$

Il campo magnetico \vec{B} di un solenoide è direttamente proporzionale al numero totale N delle spire ed all'intensità i della corrente che vi circola ed inversamente proporzionale alla lunghezza ℓ del solenoide. Il campo magnetico \mathbf{B} di un solenoide è direttamente proporzionale all'intensità i della corrente che vi circola ed al numero n delle spire per unità di lunghezza.

Mediante il solenoide possiamo creare un **campo magnetico uniforme** di valore noto, così come con un condensatore a facce piane e parallele possiamo creare campi elettrici uniformi.

Per dimostrare la formula [*§] basta calcolare la **circuitazione** del vettore \vec{B} lungo il percorso rettangolare $ABCD$ avente come dimensioni $AB = h$, $BC = k$.

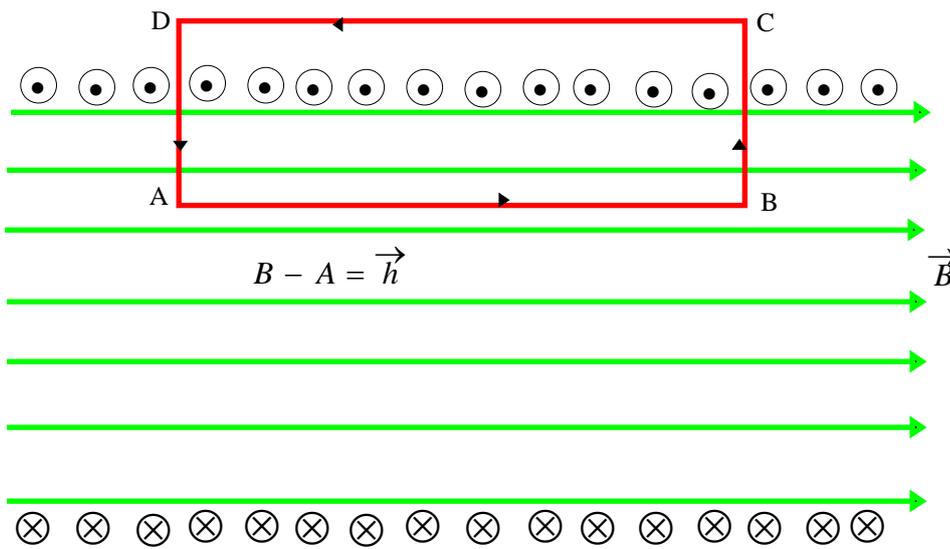
Se teniamo presente che: **1)** lungo il tratto CD è $\vec{B} = \vec{o}$ **2)** lungo i tratti AD e BC il campo \vec{B} è perpendicolare al percorso **3)** lungo il tratto AB il vettore \vec{B} è **parallelo** al percorso, possiamo

scrivere: $C_{ABCD}(\vec{B}) = C_{AB}(\vec{B}) + C_{BC}(\vec{B}) + C_{CD}(\vec{B}) + C_{DA}(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{h} = B \cdot h$

Per $h = \ell$ abbiamo: $C_{ABCD}(\vec{B}) = \mathbf{B} \cdot \ell$ Applicando il teorema della circuitazione di Ampere

abbiamo: $C_{ABCD}(\vec{B}) = \mu_0 N i$ e quindi: $B \cdot \ell = \mu_0 N i$ $\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} \mathbf{i} = \mu_0 n \mathbf{i}$

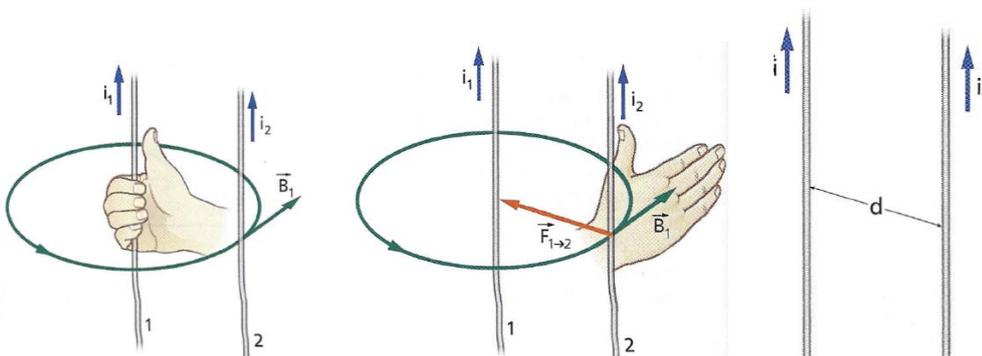
Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico



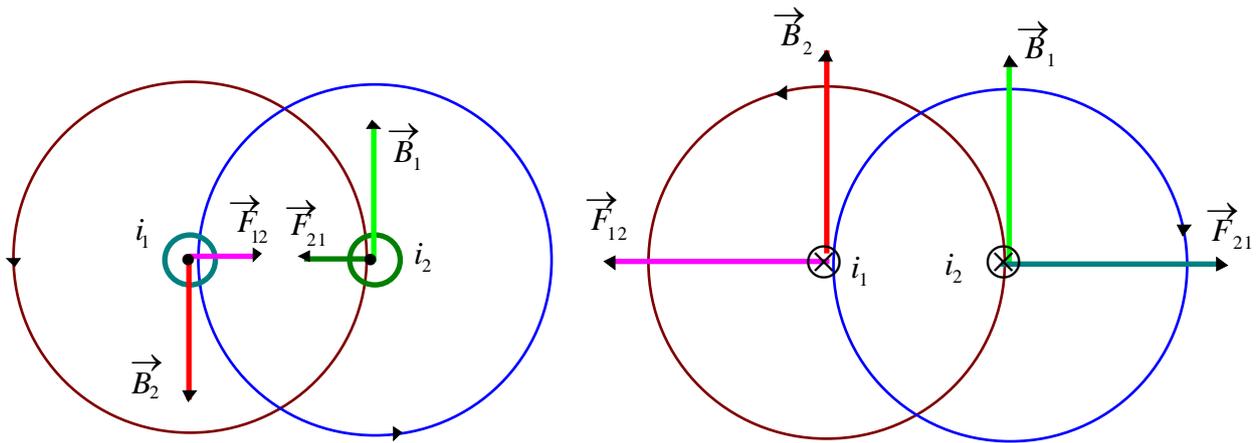
- Un solenoide percorso dalla corrente i genera al suo interno un campo magnetico uniforme
- calcolo del campo magnetico ottenuto all'interno di un solenoide mediante il teorema della circuitazione di Ampere

Interazione elettrodinamica fra due circuiti rettilinei percorsi da corrente: definizione di ampere

Due fili rettilinei e paralleli percorsi da corrente interagiscono fra loro esercitando l'uno sull'altro forze uguali ed opposte. Tali forze sono **attrattive** (**repulsive**) se le due correnti hanno lo **stesso verso** (verso opposto). Le forze che si esercitano tra i due fili sono di tipo **magnetico**.



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico



Nel caso di due **filii indefiniti** (in pratica molto lunghi rispetto alla loro distanza **d**) percorsi da correnti elettriche rispettivamente d'intensità i_1 e i_2 , **la corrente di ciascun filo agisce, su un tratto lungo ℓ dell'altro filo, con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle intensità delle due correnti, inversamente proporzionale alla distanza d tra i due fili e dipende dalla natura del mezzo in cui si trovano.**

Nel vuoto abbiamo:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \cdot \frac{\ell}{d} \quad [\text{A}]$$

L'interazione tra fili rettilinei indefiniti percorsi da corrente viene utilizzata per definire l'unità di misura della corrente elettrica nel Sistema Internazionale (S.I.).

Assegnato alla **permeabilità magnetica nel vuoto** μ_0 il valore arbitrario $4\pi \cdot 10^{-7}$ e ponendo nella [A] $i_1 = i_2 = 1 \text{ ampere} = 1 \text{ A}$, $\ell = 1 \text{ m}$, $d = 1 \text{ m}$ abbiamo: $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ e quindi è pienamente giustificata la seguente definizione di ampere.

L'ampere è l'intensità di una corrente costante che, passando in due conduttori paralleli, rettilinei, indefiniti, di sezione trascurabile, posti a distanza di un metro nel vuoto, determina una forza uguale a $2 \cdot 10^{-7}$ newton su ogni metro di filo.

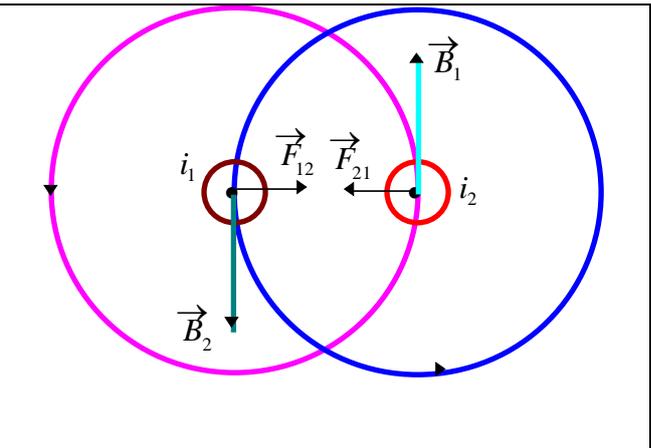
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{newton}}{(\text{ampere})^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{W_b}{\text{A} \cdot \text{m}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{henry}}{\text{metro}}$$

$$[\mu_0] = \left[\frac{F}{i^2} \right] = [F \cdot i^{-2}] = [L \cdot M \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}]$$

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

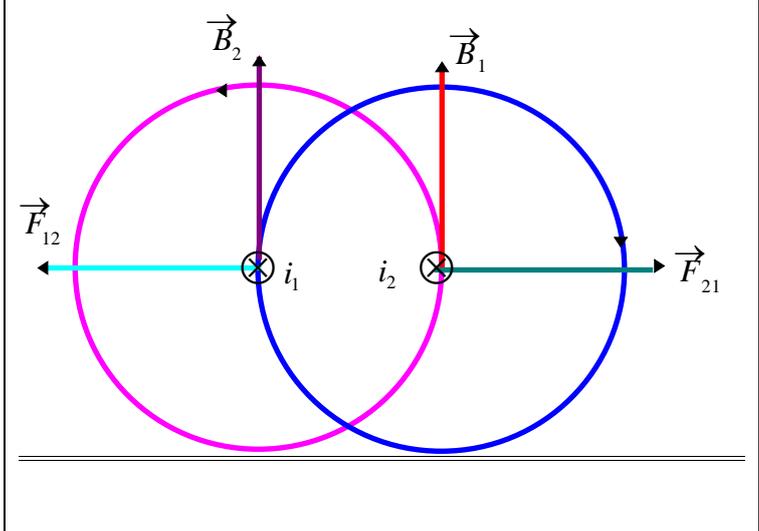
Convenzione americana:

il simbolo \bullet indica che il filo percorso dalla corrente i è ortogonale al piano del foglio ed il verso della corrente i è uscente, cioè va dal foglio al volto dell'osservatore



Convenzione americana:

il simbolo \otimes indica che il filo percorso dalla corrente i è ortogonale al piano del foglio ed il verso della corrente i è entrante, cioè va dal volto dell'osservatore al piano del foglio



Il vettore eccitazione magnetica \vec{H}

Certe formule dell'elettromagnetismo assumono una forma più semplice se, accanto al vettore campo magnetico \vec{B} , introduciamo un altro vettore \vec{H} detto **vettore eccitazione magnetica**

magnetica definito nel vuoto, in maniera formale, dalla relazione: $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$

Questo nuovo vettore \vec{H}_0 non è necessario per descrivere le proprietà del campo magnetico nel vuoto, il quale è adeguatamente rappresentato dal solo vettore \vec{B}_0 .

Dal punto di vista didattico è però utile definire tale vettore già nel vuoto perché, come vedremo in seguito, per rappresentare le proprietà magnetiche nella materia è necessario introdurre due vettori:

il **vettore campo magnetico** \vec{B} ed il **vettore eccitazione magnetica** \vec{H} i quali godono nella materia delle stesse proprietà di cui godono rispettivamente i vettori \vec{B}_0 ed \vec{H}_0 nel vuoto.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Nella materia \vec{B} ed \vec{H} sono legati dalla seguente relazione: $\vec{B} = \mu \vec{H}$

con $\mu = \mu_0 \mu_r$.

Le formule precedentemente ricavate, espresse mediante \vec{H} , assumono la seguente forma:

$$H_o = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} \quad \text{legge di Biot e Savart} \quad d\vec{H}_o = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{prima legge di Laplace}$$

$$C_\ell(\vec{H}_o) = \Sigma i \quad \text{teorema della circuitazione di Ampere}$$

$H_o = ni$ modulo del **vettore eccitazione magnetica** all'interno del solenoide

Nel S.I. l'unità di misura del **vettore eccitazione magnetica** è l'**ampere spira al**

metro ($\frac{A \cdot sp}{m}$) definita come il modulo del vettore H_o all'interno di un solenoide vuoto quando

questi ha una spira per ogni metro di lunghezza ed è attraversato dalla corrente di un ampere.

OSSERVAZIONE

Fino a poco tempo fa impropriamente si diceva:

\vec{B} = **vettore induzione magnetica** \vec{H} = **intensità del campo magnetico**

$\vec{B}_o = \mu_0 \vec{H}_o$ relazione valida nel vuoto $\vec{B} = \mu \vec{H}$ relazione valida in un mezzo avente permeabilità magnetica relativa μ_r

Oggi invece diciamo: \vec{B} = **vettore campo magnetico**

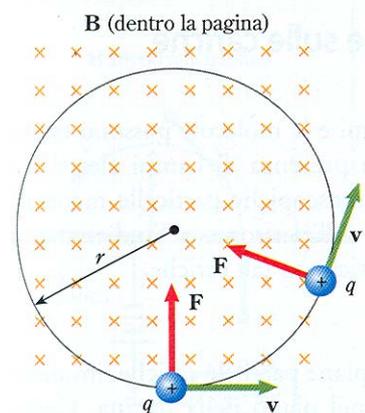
\vec{H} = **vettore eccitazione magnetica**

Moto di una carica puntiforme q in un campo magnetico

uniforme \vec{B}

Vogliamo dimostrare che una carica puntiforme q quando entra in un campo magnetico uniforme con velocità \vec{v} perpendicolare al vettore campo magnetico \vec{B} viene deviata lungo una traiettoria circolare di raggio

$$r = \frac{m v}{q B} \quad \text{dove } m \text{ rappresenta la massa della carica } q.$$



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Questo significa che la carica puntiforme q si muove su un piano perpendicolare a \vec{B} ed il suo moto è **circolare uniforme**, in quanto l'effetto della **forza magnetica** che agisce su di essa è quello di cambiare la direzione della velocità vettoriale \vec{v} senza cambiarne il modulo v . Noi sappiamo che una carica q in moto in un campo magnetico \vec{B} subisce l'azione della forza magnetica $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Essendo \vec{f} perpendicolare alla velocità \vec{v} e quindi allo spostamento \vec{s} della carica q (dalla meccanica sappiamo che la velocità vettoriale \vec{v} e lo spostamento \vec{s} hanno sempre la stessa direzione e lo stesso verso) la **forza magnetica** non può compiere lavoro e non può variare l'energia cinetica della carica q . L'effetto della forza magnetica \vec{f} è quello di cambiare la direzione della velocità vettoriale \vec{v} senza cambiarne il modulo. Questo significa che una carica puntiforme q in moto sotto l'azione di una forza magnetica non può descrivere una traiettoria rettilinea ma una traiettoria curvilinea e se il campo magnetico è **uniforme** il moto è **circolare uniforme** in quanto l'accelerazione scalare (cioè **tangenziale**) è nulla, la **velocità scalare è costante** e l'accelerazione centripeta è diversa da zero e costante. Consideriamo, dunque, il moto di una carica puntiforme q immersa in un campo magnetico uniforme \vec{B} (cioè avente lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso in tutti i punti dello spazio sede del campo magnetico). Supponiamo che la velocità \vec{v} della carica puntiforme q , quando questa penetra nella regione sede del campo magnetico, sia perpendicolare a \vec{B} .

In questo caso la carica q avente massa m si muove di moto circolare uniforme in quanto soggetta da una **forza centripeta** che è la forza magnetica: $f = q \cdot v \cdot B \cdot \sin 90^\circ = q \cdot v \cdot B$

La forza magnetica f fornisce la forza centripeta necessaria per il moto circolare .

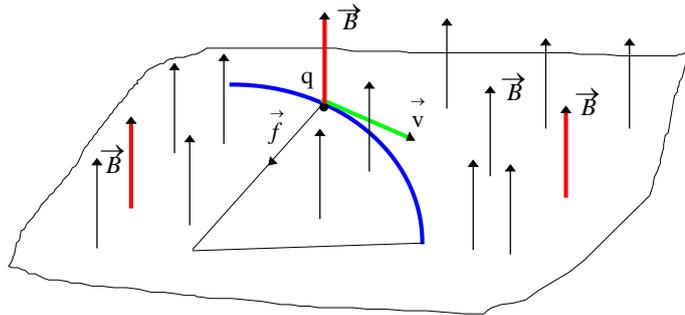
Per determinare la traiettoria di una carica q che si muove in un campo magnetico uniforme ortogonale alla sua velocità iniziale basta imporre che la forza magnetica sia uguale al prodotto della massa m della carica q per la sua accelerazione centripeta , cioè basta applicare la legge

fondamentale della dinamica: $f = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$. Ma : $f = q \cdot v \cdot B$ per cui possiamo scrivere:

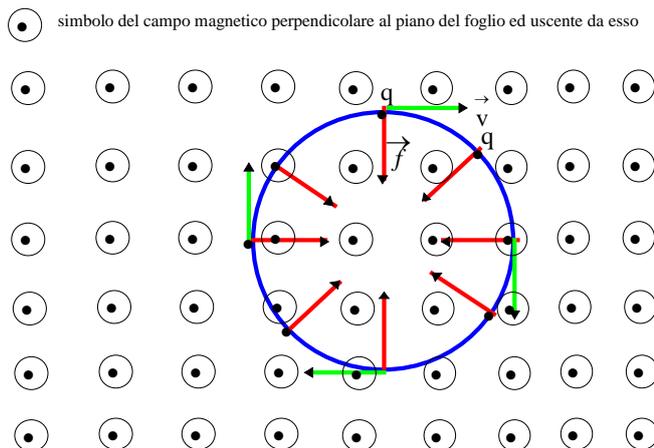
$$q v B = \frac{m v^2}{r} \qquad r = \frac{m v}{q B}$$

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Una carica q in moto perpendicolarmente ad un campo magnetico \vec{B} uniforme descrive una traiettoria circolare con velocità vettoriale \vec{v} avente modulo costante.



Traiettoria di una carica (positiva) q che si muove parallelamente al piano della pagina in un campo magnetico \vec{B} perpendicolare a tale piano ed uscente da esso. La forza \vec{f} a cui la carica è sottoposta è costante e diretta perpendicolarmente alla velocità \vec{v} . Il moto risultante è **circolare uniforme**.



Se la carica q è l'elettrone la formula precedente diventa:

$$r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} = \text{velocità angolare della carica } q \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2m\pi}{qB} = \text{periodo del moto}$$

circolare uniforme $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2m\pi} = \text{frequenza del moto circolare uniforme}$

Il periodo T di rivoluzione, a parità di massa m e di carica q , è **indipendente dalla velocità della particella**. Fra le particelle uguali, quelle aventi grandi velocità, si muoveranno su circonferenze di grande raggio, ma tutte indistintamente impiegheranno lo stesso tempo T a descrivere una intera circonferenza nel campo magnetico.

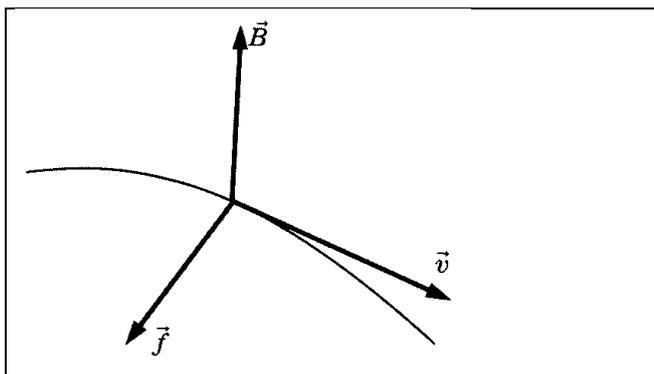


Fig. 3.8 I vettori nella Forza di Lorentz

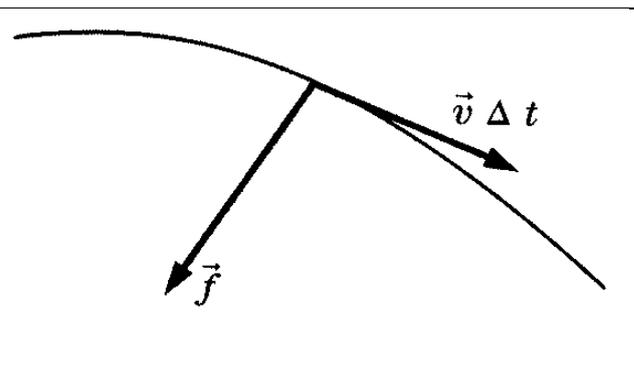


Fig. 3.9 Il lavoro della forza di Lorentz è nullo

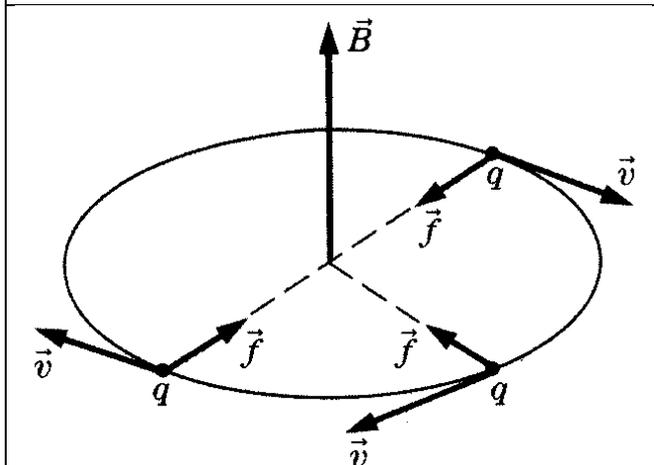


Fig. 3.10 Carica in un campo costante

La traiettoria di una carica q in un campo magnetico \vec{B} costante è confinata in un piano ortogonale a \vec{B} se la velocità inizialmente è ortogonale a \vec{B}

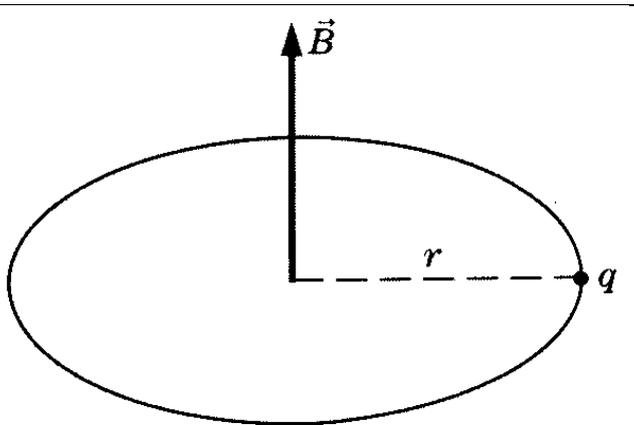
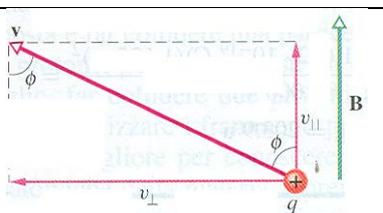


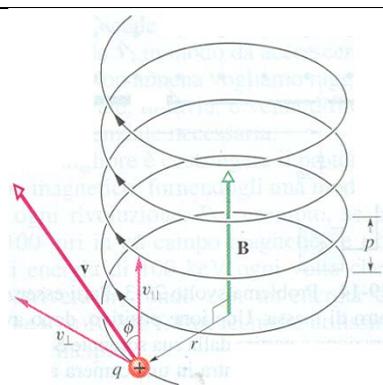
Fig. 3.11 Forza di Lorentz

La traiettoria in un campo magnetico costante è una circonferenza di raggio $r = \frac{mv}{qB}$

Adesso vogliamo trovare la traiettoria descritta dalla carica elettrica q quando entra nel campo magnetico uniforme \vec{B} con una velocità \vec{v} formante un angolo ϑ col vettore \vec{B} . In questo caso possiamo immaginare di decomporre la velocità vettoriale \vec{v} in due componenti; una, $\vec{v}_{//}$, parallela al vettore \vec{B} ; l'altra, \vec{v}_{\perp} perpendicolare al vettore \vec{B} .



Una particella si muove in un **campo magnetico uniforme** e la sua velocità forma un angolo Φ con la direzione del campo



La carica q segue un percorso ad elica di raggio r e passo p

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Al moto circolare uniforme prodotto dal componente \vec{v}_\perp si sovrappone il moto rettilineo uniforme generato dal componente \vec{v}_\parallel . Il moto risultante è un moto elicoidale. Il moto della carica q risulta dalla composizione di un moto circolare uniforme (perpendicolare al campo magnetico \vec{B}) e di un moto rettilineo uniforme (parallelo al campo magnetico \vec{B}). Risulta:

$$r = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{m v \cdot \sin \vartheta}{qB} = \text{raggio della circonferenza}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2m\pi}{qB} = \text{periodo del moto circolare uniforme}$$

$$x(t) = v_\parallel \cdot t = v \cdot \cos \vartheta \cdot t = \text{legge oraria del moto rettilineo uniforme}$$

Il componente parallelo \vec{v}_\parallel determina il passo p dell'elica, cioè la distanza tra due spire adiacenti. Quindi il passo dell'elica può essere determinato calcolando la distanza coperta dopo un tempo uguale al periodo T , tempo in cui la carica riprende la sua posizione iniziale sulla circonferenza.

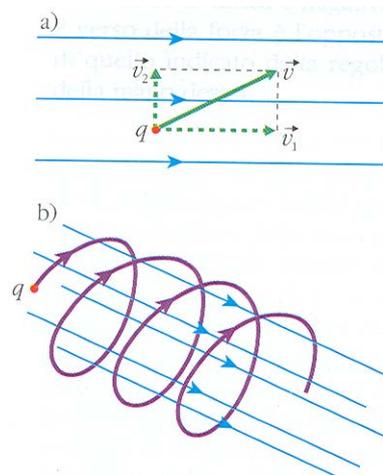
$p = \text{passo dell'elica} = \text{spazio percorso nella direzione del campo magnetico durante un giro completo.}$

$$x(T) = p = v_\parallel \cdot T = v \cdot \cos \vartheta \cdot T = \frac{v_\parallel}{v} = \frac{v \cdot \cos \vartheta}{v}$$

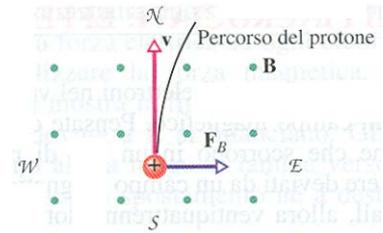
Una particella carica che penetra in un campo magnetico uniforme \vec{B} con una velocità \vec{v} avente, rispettivamente, componenti \vec{v}_1 e \vec{v}_2 nella direzione del campo e nel piano perpendicolare al campo (a) descrive una traiettoria elicoidale

(b) avente raggio
$$r = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{m v \cdot \sin \vartheta}{qB}$$

e passo
$$p = v_\parallel \cdot T = v \cdot \cos \vartheta \cdot T = \frac{v_\parallel}{v} = \frac{v \cdot \cos \vartheta}{v}$$



Un campo magnetico uniforme \vec{B} di intensità $B=1,2\text{mT}=1,2\cdot 10^{-3}\text{T}$, è diretto verso l'alto in una camera di un laboratorio. Un protone con energia cinetica $K=5,3\text{MeV}$ entra nella camera, muovendosi orizzontalmente da Sud a Nord.



Quale forza di deflessione agisce sul protone appena entra nella camera? Quanto vale l'accelerazione del protone? Si tratta di una accelerazione tangenziale o di una accelerazione centripeta? Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza magnetica in un secondo?

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad 1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad K = 5,3\text{MeV} = 5,3 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

Per calcolare la velocità del protone basta applicare la seguente formula: $K = \frac{1}{2} m v^2$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (5,3) \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-14}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{\frac{16,96}{1,67} \cdot 10^{14}} = 10^7 \sqrt{10,16} = 3,2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v = 3,2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sul protone agisce la forza di Lorentz dovuta alla presenza del campo magnetico \vec{B}

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow F_m = q \cdot v \cdot B = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,2 \cdot 10^7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \quad F_m = 6,1 \cdot 10^{-15} \text{ N}$$

Questa può sembrare una forza assai modesta, ma agisce su una particella di massa piccola,

producendo una grande accelerazione centripeta: $a_c = \frac{F_m}{m_p} = \frac{6,1 \times 10^{-15}}{1,67 \times 10^{-27}} = 3,7 \times 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Si tratta di una accelerazione centripeta in quanto la forza magnetica è perpendicolare alla velocità vettoriale del protone.

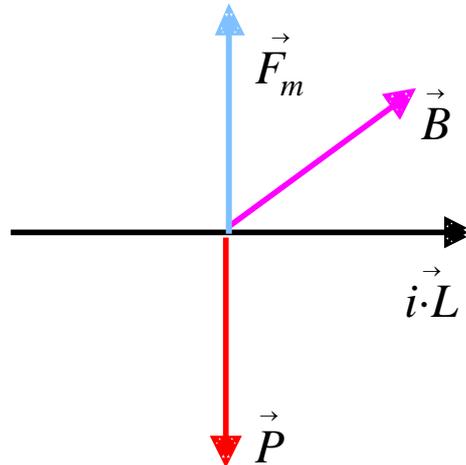
La direzione della forza magnetica è perpendicolare al piano individuato dalla velocità vettoriale del protone e dal vettore \vec{B} . Il verso della forza magnetica si deduce applicando la regola della mano destra; essa è orientata da **ovest** verso **est**. Se la carica della particella che attraversa il campo magnetico fosse negativa, la forza magnetica avrebbe verso opposto, cioè da est verso ovest.

La forza magnetica, essendo perpendicolare alla velocità vettoriale e quindi anche allo spostamento, non compie lavoro.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

H.R.W. Pagina 645 N° 29.5 Problema Risolto

Un filo rettilineo orizzontale è percorso da una corrente $i=28\text{ A}$. Qual è l'intensità e la direzione del campo magnetico \vec{B} necessaria a "fare galleggiare" il filo, cioè a bilanciare il suo peso? La densità lineare del rame è $46,6\frac{\text{g}_r}{\text{m}}$.



$$\lambda = \frac{m}{L} = 46,6 \frac{\text{g}_r}{\text{m}} = 46,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

La figura mostra un segmento di filo lungo L attraversato dalla corrente i orientata da sinistra verso destra. Il filo percorso dalla corrente i "galleggia" se la forza magnetica $\vec{F}_m = i\vec{L} \wedge \vec{B}$ deve essere uguale ed opposta al peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ del filo.

$$F_m = P \Rightarrow iLB = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{Li} = \frac{\lambda g}{i} = \frac{46,6 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{28} = \frac{456,68}{28} \cdot 10^{-3}$$

$$B = 16,31 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 1,631 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Questo valore è circa 160 volte l'intensità del campo magnetico terrestre.

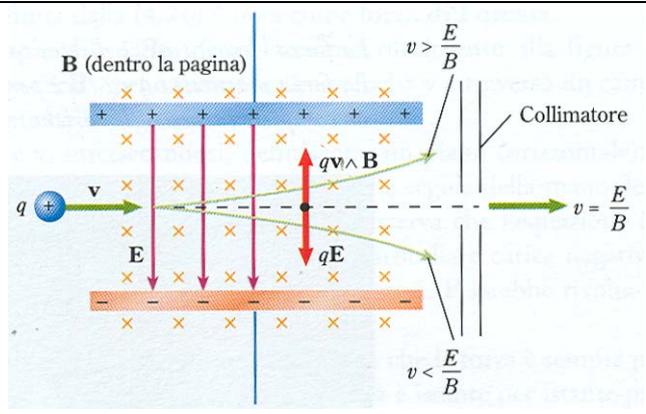
Selettore di velocità

La figura mostra una coppia di armature piane parallele cariche, immerse in un campo magnetico uniforme entrante nel piano della pagina. Tra le armature piane si crea un campo elettrico uniforme, diretto dall'armatura positiva a quella negativa. Per via delle direzioni del campo magnetico e del campo elettrico, questo dispositivo viene a volte detto selettore a campi incrociati. Supponiamo che l'apparecchiatura si trovi in una camera a vuoto, in modo da poter trascurare l'attrito dell'aria. Immagina che una particella carica $+q$ entri nella regione dei campi incrociati con una velocità v parallela alle armature, come mostrato in figura. La forza elettrica di modulo $q \cdot E$ è diretta verso il basso e la forza magnetica di modulo qvB è diretta verso l'alto. Se la carica è negativa, ciascuna

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

delle due forze inverte il proprio orientamento. In generale la particella, attraversando la regione interessata dai campi, verrà deviata verso l'alto o verso il basso, a seconda di quale forza è maggiore. Solo nel caso in cui le forze si equilibrino, la carica attraverserà la regione senza essere deviata. Questa condizione richiede: $qE = qvB$ ovvero $v = \frac{E}{B}$

Le particelle che possiedono esattamente questa velocità potranno passare attraverso delle piccole aperture allineate con l'asse centrale del dispositivo; le particelle con qualsiasi altro valore della velocità saranno invece arrestate. Il selettore permette quindi, regolando i valori di E e B, di selezionare da un fascio di particelle con varia velocità quelle aventi la medesima velocità.

<p>Selettore di velocità</p> <p>Campo elettrico e campo magnetico incrociati. Se una carica positiva si muove verso destra, essa è soggetta ad una forza elettrica diretta verso il basso e ad una forza magnetica diretta verso l'alto. Queste forze si fanno equilibrio se la velocità della carica è legata alle intensità dei due campi dalla relazione $v \cdot B = E$. Il selettore di velocità lascia passare senza deiarle solo le carica che hanno velocità $v = \frac{E}{B}$.</p>	
--	---

Spettrometro o spettrografo di massa

Lo spettrografo di massa, realizzato da **Francis William Aston** nel 1919 e poi perfezionato da altri fisici, fu progettato per misurare le masse degli **isotopi**, o meglio il rapporto $\frac{q}{m}$ (**carica**

specificata) tra la massa e la carica dell'isotopo considerato. Operando con gas chimicamente puri, si sono trovati diversi valori della carica specifica degli ioni, corrispondenti alla stessa carica elettrica ma a diversa massa. Si è concluso che esistono elementi identici, aventi lo stesso numero atomico, ma diversa massa atomica, chiamati **isotopi**. Ione è un atomo che ha perduto o acquistato uno o più elettroni. La figura mostra un disegno schematico di uno spettrografo di massa: gli ioni provenienti da una sorgente vengono accelerati da una differenza di potenziale ΔV ed entrano nel campo magnetico uniforme prodotto da un elettromagnete. Gli ioni entrano nel campo

magnetico con una energia cinetica data da: $K = E_c = \frac{1}{2} m v^2 = q \cdot \Delta V$ Gli ioni percorrono una

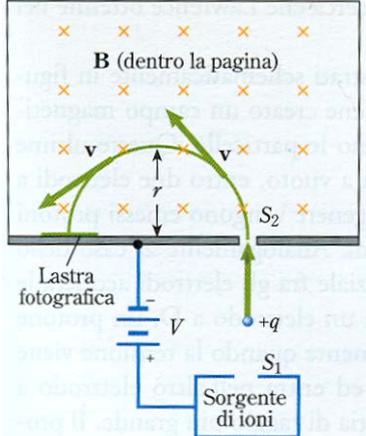
Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

semicirconferenza di raggio r e vanno a colpire un rivelatore, ad esempio una lastra fotografica, posto a distanza $2r$ da S_2 . Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni:

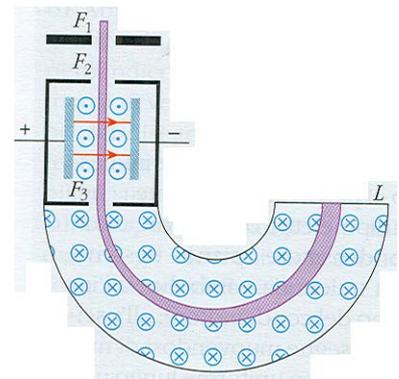
$$K = E_c = \frac{1}{2} m v^2 = q \cdot \Delta V \quad r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \quad \text{otteniamo: } m = \frac{q B^2 r^2}{2 \Delta V} \quad \text{ed anche: } \frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2 \Delta V}$$

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \Rightarrow v^2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2} \quad \frac{1}{2} m v^2 = q \cdot \Delta V \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2} = q \cdot \Delta V \Rightarrow m = \frac{q B^2 r^2}{2 \Delta V}$$

Dato che, q , ΔV e B sono noti, un'accurata misura del raggio r permette di determinare la massa degli isotopi. Si migliora la precisione introducendo un selettore di velocità degli ioni che entrano e ne determina e ne determina la velocità.

<p>Parti essenziali di uno spettrometro di massa. Uno ione positivo $+q$, dopo avere subito una accelerazione a partire da una sorgente S_1, grazie alla differenza di potenziale ΔV, entra in una camera a campo magnetico uniforme \vec{B}. Percorre una traiettoria semicircolare e colpisce una lastra fotografica ad una distanza $2r$ dall'ingresso.</p>	
--	---

La figura rappresenta schematicamente la sezione di un moderno spettrografo di massa. In esso gli ioni, provenienti da un'opportuna sorgente, vengono collimati in uno stretto fascio da due fenditure F_1 ed F_2 e immessi in una regione in cui sono presenti un campo elettrico uniforme e un campo magnetico, anch'esso uniforme, perpendicolari fra loro e alla direzione del fascio. In tali condizioni la forza esercitata dal campo elettrico sugli ioni, che supponiamo positivi, ha la stessa direzione e lo stesso verso del campo, mentre la forza esercitata dal campo magnetico ha verso opposto. Se E e B sono i moduli del campo elettrico e del campo magnetico, su uno ione di carica $+q$ e velocità v agiscono una forza elettrica di intensità $q E$ e una forza magnetica di intensità $q v B$.



Pertanto gli ioni la cui velocità v soddisfa la relazione: $q E = q v B$ ovvero $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}$ non subiscono alcuna deflessione e possono passare attraverso la fenditura F_3 , mentre gli altri vengono intercettati da uno schermo.

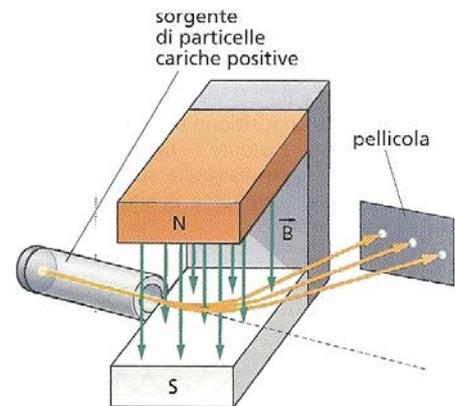
Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

A parità di v , q e B , i raggi descritti dalla formula

$r = \frac{mv}{qB}$ sono direttamente proporzionali alla massa m

della particella. Se facciamo entrare un fascio, composto da particella che hanno la stessa velocità e la stessa carica, ma masse diverse, in direzione perpendicolare ad un campo magnetico, la forza di Lorentz suddivide il fascio in diverse componenti che descrivono traiettorie circolari con raggi diversi, uno per ogni valore della massa presente nel fascio.

Uno strumento di questo tipo si chiama spettrometro di massa.

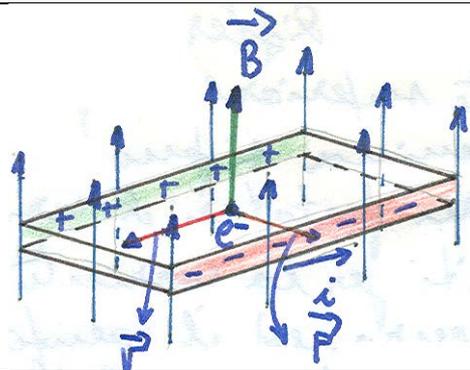


Campi incrociati: effetto Hall

Si tratta di un fenomeno che si manifesta quando si fa agire un campo magnetico \vec{B} su un conduttore percorso dalla corrente i . L'effetto Hall ci permette di stabilire se i portatori di carica in un conduttore trasportano una carica positiva o negativa. Nel 1879 il ventiquattrenne fisico americano **Edwin Hall** ideò un metodo sperimentale in base al quale dimostrò che nei conduttori metallici si muovono le cariche negative. Se poniamo una lastra metallica attraversata dalla corrente in un campo magnetico \vec{B} , la forza magnetica tenderà a deviare i portatori di carica trasversalmente rispetto alla direzione della corrente determinando un aumento della densità delle cariche elettriche su un lato rispetto all'altro. Questa variazione di densità genera una differenza di potenziale tra i due lati dal valore della quale è possibile risalire al segno dei portatori di carica.

Effetto Hall

Gli elettroni di conduzione (e^-) che viaggiano lungo un conduttore disposto perpendicolarmente alle linee del campo magnetico \vec{B} risultano deviati lateralmente rispetto alla direzione del moto.



Nella figura è rappresentata una lamina conduttrice percorsa da una corrente continua diretta da sinistra verso destra. Se la lamina è posta in un campo magnetico a essa ortogonale si trova sperimentalmente una differenza di potenziale fra il bordo superiore P e il bordo inferiore Q. L'esperimento, ideato dal fisico americano Edwin H. Hall nel 1879 al fine di determinare il segno della carica dei portatori di elettricità in un conduttore, si interpreta in base alla forza di Lorentz agente sulle cariche mobili. Se la corrente è dovuta al movimento di elettroni, cioè di cariche negative, la forza magnetica, nello schema in figura, è diretta verso il basso.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Gli elettroni, mentre si muovono nella direzione della corrente e in verso opposto a essa, si spostano anche trasversalmente accumulandosi sul bordo inferiore Q. Conseguentemente sul bordo superiore P viene a crearsi un eccesso di carica positiva. Così, fra P e Q si stabilisce una differenza di potenziale, con P a potenziale maggiore rispetto a Q. La differenza di potenziale fra la parte superiore e la parte inferiore della lamina è nota come **f.e.m. di Hall**. Per il calcolo di questa forza elettromotrice osserviamo che l'accumulo di elettroni di conduzione sul bordo Q genera un campo elettrico diretto da P a Q. Indicando con E il modulo del campo e con **d** l'altezza della lamina, la **f.e.m. di Hall V** può essere espressa mediante la relazione:

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta V}{d} \quad \text{ove } d \text{ è la } \mathbf{larghezza} \text{ della lamina percorsa dalla corrente } i$$

<p>Lamina percorsa da corrente verso destra e immersa in un campo magnetico \vec{B} perpendicolare al piano del disegno in verso uscente. I portatori di elettricità, se dotati di carica elettrica e^- negativa, si muovono con velocità di deriva v_d verso sinistra; per effetto della forza di Lorentz $\vec{F} = -e \cdot \vec{v}_d \wedge \vec{B}$ si accumulano verso il basso, generando una differenza di potenziale fra i bordi P e Q della lamina (f.e.m. di Hall), con il polo positivo in P.</p>	
--	--

Il campo elettrico, la cui intensità aumenta man mano che gli elettroni si addensano sul bordo inferiore, esercita su di essi una forza orientata verso l'alto, cioè in verso opposto rispetto alla forza di Lorentz. Quando la forza elettrica arriva a bilanciare la forza di Lorentz, sugli elettroni non agisce più alcuna forza netta nella direzione trasversale. Pertanto si raggiunge una situazione di equilibrio, nella quale il processo di accumulo si arresta e il modulo E del campo elettrico assume un valore stabile. All'equilibrio abbiamo: $F_{el} = e \cdot E = F_m = e \cdot v_d \cdot B$ dove v_d è la velocità di deriva degli elettroni di conduzione che si ricava applicando la seguente formula: $v_d = \frac{i}{neS}$

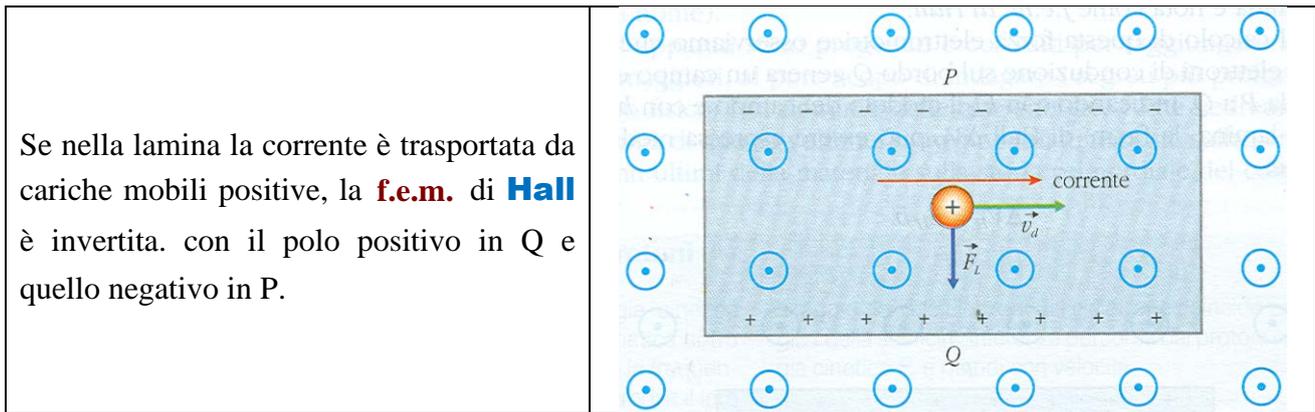
$$n = \text{densità numerica dei portatori di carica} = \frac{\text{numero di portatori di carica}}{\text{volume}}$$

$$E = v_d \cdot B \quad \wedge \quad E = \frac{\Delta V}{d} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{v_d} = \frac{\Delta V}{d} \cdot \frac{neS}{i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\Delta V \cdot neS}{di}$$

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{Bdi}{neS} = \mathbf{f.e.m. di Hall}$$

L'effetto Hall ci permette di stabilire se le cariche mobili che trasportano la corrente elettrica sono positive oppure negative. Infatti, lasciando invariato il verso della corrente e quello del campo magnetico, se i portatori di carica sono positivi, anziché negativi, per effetto della forza magnetica il bordo P si carica negativamente e il bordo Q positivamente. Il segno della f.e.m. di Hall è pertanto invertito rispetto al caso precedente.

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico



Grazie all'**effetto Hall** è stato possibile accertare che nei conduttori metallici la corrente elettrica è costituita da un flusso di elettroni.

Esperienza di Thomson per determinare il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica e la massa dell'elettrone

Lo scienziato inglese **Joseph John Thomson** (1856-1940) determinò nel 1947 la **carica specifica** dei **raggi catodici**, cioè il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica e e la massa m dei **raggi catodici**. I **raggi catodici** sono elettroni liberi espulsi ortogonalmente dalla superficie di un catodo (si tratta di un filo conduttore metallico portato ad un potenziale negativo).

Per il suo esperimento **Thomson** si servì di un **tubo a raggi catodici**. Esso è costituito da un tubo vuoto il cui anodo N_1 è forato, in modo da permettere ad un sottile fascio di elettroni, emessi dal catodo D ed accelerati da un campo elettrico \vec{E}_1 orientato da N_1 verso D , di attraversare le fenditure N_1 ed N_2 e percorrere una regione priva di campo elettrico per proseguire poi all'interno di un campo elettrostatico \vec{E} creato all'interno di un condensatore piano. Quando \vec{E} è nullo il fascio di elettroni colpisce lo schermo fluorescente S nel punto A che si manifesta come un punto luminoso. Quando $\vec{E} \neq \vec{0}$ l'azione del campo elettrico \vec{E} è quella di incurvare le traiettorie degli elettroni facendo deviare il punto luminoso dal centro dello schermo alla posizione C . Quindi i raggi catodici, che sono elettroni, attraversano due strette fenditure N_1 ed N_2 , passano tra le armature R_1 ed R_2 di un condensatore piano all'interno del quale c'è un campo elettrostatico uniforme \vec{E} , e produce una piccola macchia luminosa C sullo schermo fluorescente S dove è praticata una scala graduata T . Siano m , e , v rispettivamente la massa, la carica e la velocità d'ingresso degli elettroni nel campo \vec{E} . Se la direzione del pennello di elettroni è perpendicolare ad \vec{E} e se il campo \vec{E} esistente tra le armature del condensatore piano è diretto verso il basso, ogni elettrone, quando si trova in \vec{E} , è sottoposto ad una forza verticale diretta verso l'alto.

Ogni elettrone si comporta come un grave lanciato orizzontalmente nel campo gravitazionale terrestre. Ogni elettrone descriverà un arco di parabola all'interno del campo elettrico, fuori da questo una traiettoria rettilinea e colpirà lo schermo S nel punto C .

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Sia $d = AC$ la deviazione rettilinea subita dal punto luminoso sullo schermo. Il moto dell'elettrone si ottiene componendo i moti di due punti P_x e P_y .

Il primo si muove sull'asse delle x con velocità vettoriale \vec{v} costante e legge oraria $x = vt$, il secondo si muove sull'asse y con accelerazione vettoriale \vec{a}_y costante e legge oraria $y = \frac{1}{2}a_y t^2$; questo significa che P_x si muove di moto rettilineo uniforme e P_y di moto rettilineo uniformemente accelerato. Le equazioni parametriche della traiettoria descritta da ogni elettrone sono:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

Su ogni elettrone agisce la forza elettrica $F = m \cdot a_y = e \cdot E$ $a_y = \frac{e}{m} \cdot E$

Le precedenti equazioni diventano:
$$\begin{cases} x = v \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot E \cdot t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x}{v} \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{v^2} \cdot x^2 \end{cases} \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{v^2} \cdot x^2 \quad \text{è}$$

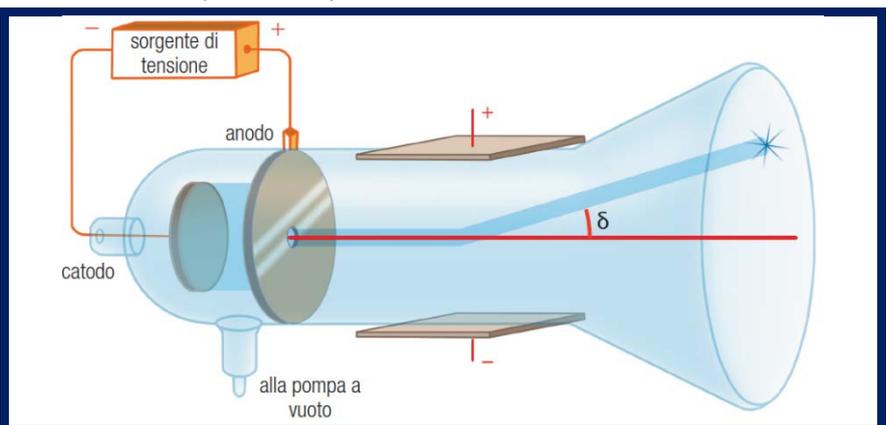
l'equazione della traiettoria (parabola) di ciascun elettrone $\frac{e}{m} = \frac{2y}{Ex^2} \cdot v^2$

Si dimostra facilmente che la tangente alla parabola $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{v^2} \cdot x^2$ nel punto $B \left(\ell; \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \ell^2 \right)$

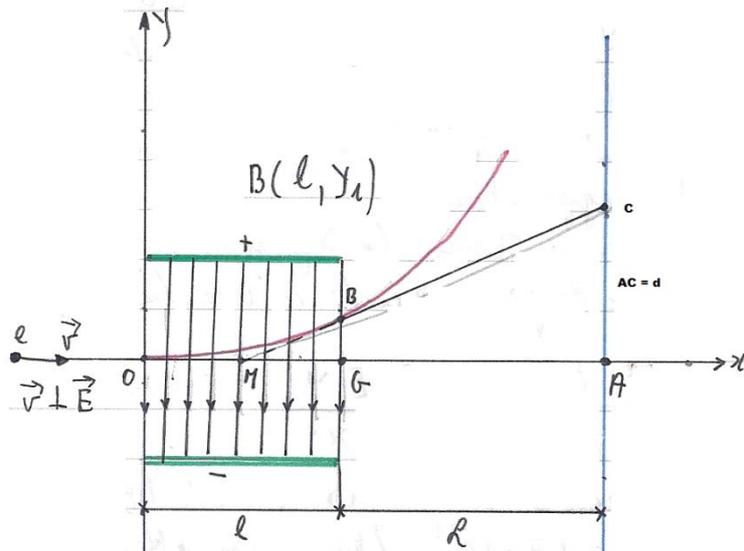
passa per il punto medio $M \left(\frac{1}{2} \ell; 0 \right)$.

Si dimostra anche che risulta: $\frac{e}{m} = \frac{2y}{Ex^2} \cdot v^2 = \frac{v^2}{\left(\ell L + \frac{1}{2} \ell^2 \right)} \cdot \frac{d}{E}$ $AC = y = d$

Deflessione dei raggi catodici provocata da un campo elettrico costante esterno nel tubo catodico.



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico



Adesso supponiamo di eliminare il campo elettrico ed applichiamo al tubo a raggi catodici un campo magnetico costante \vec{B} . Un elettrone che si muove alla velocità \vec{v} perpendicolarmente ad un campo magnetico \vec{B} è soggetto alla **forza di Lorentz** $\vec{F}_m = e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ avente modulo

$$F_m = e v B \sin 90^\circ = e v B = m \cdot a_z. \text{ Quindi: } a_z = \frac{e v B}{m}$$

Le equazioni parametriche della traiettoria descritta da ogni elettrone sono:

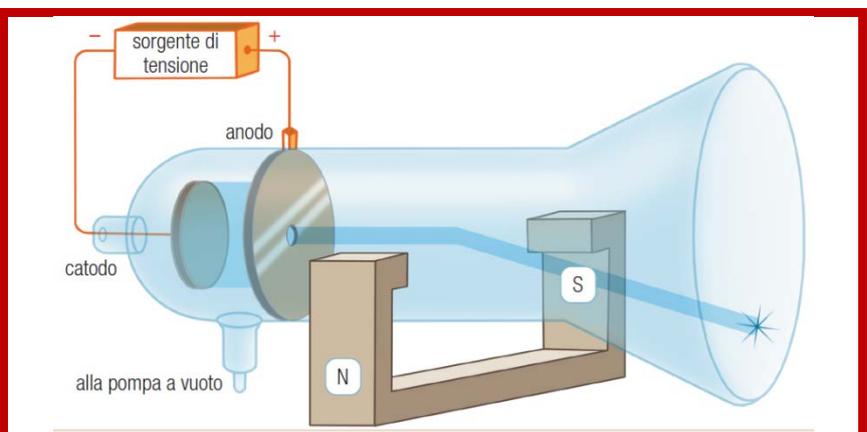
$$\begin{cases} x = vt \\ z = \frac{1}{2} a_z t^2 \end{cases}$$

Le precedenti equazioni diventano:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v} \\ z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e v B}{m} \cdot \frac{x^2}{v^2} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{x}{v} \\ z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e B}{m v} \cdot x^2 \end{cases}$$

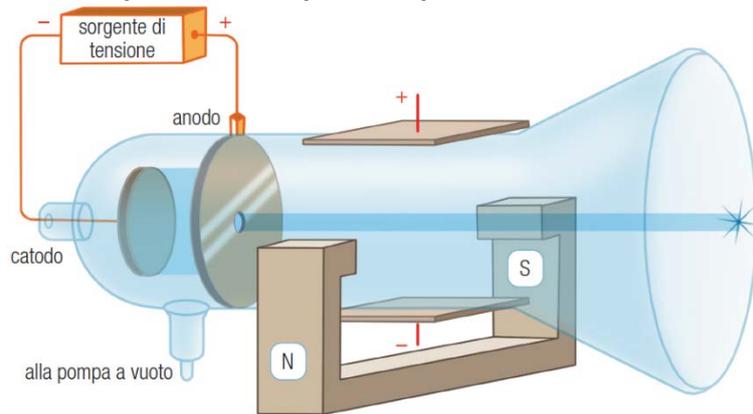
$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e B}{m v} \cdot x^2 \text{ è l'equazione della traiettoria di ciascun elettrone } \frac{e}{m} = \frac{2z}{B x^2} \cdot v$$

Deflessione subita da un elettrone sottoposto ad un campo magnetico costante.



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

Tranne la velocità \mathbf{v} , tutte le grandezze che figurano nel secondo membro delle relazioni $\frac{e}{m} = \frac{2y}{E x^2} \cdot v^2$ e $\frac{e}{m} = \frac{2z}{B x^2} \cdot v$ sono facilmente misurabili. La determinazione della velocità era la difficoltà maggiore che si presentò a **Thomson** nei suoi esperimenti diretti a misurare il rapporto $\frac{e}{m}$. Si tratta infatti di velocità elevate, dell'ordine di $100000 \frac{km}{s}$. L'ostacolo fu superato sottoponendo il pennello di elettroni ad un campo magnetico \vec{B} uniforme, agente nella stessa regione dove agiva il campo elettrico uniforme \vec{E} . La forza magnetica agente su una particella carica in moto in un campo magnetico uniforme può essere equilibrata da una forza elettrostatica se si scelgono in maniera opportuna i moduli e le orientazioni del campo magnetico e del campo elettrico. Poiché la forza elettrica ha la stessa direzione ma verso opposto ad \vec{E} ($\vec{F} = e\vec{E}$) e la forza magnetica è perpendicolare al campo magnetico, il campo elettrico ed il campo magnetico debbono essere fra loro perpendicolari perché le due forze si facciano equilibrio. Questo significa che dobbiamo realizzare il campo elettrico e quello magnetico in modo che risulti $\vec{F}_e \parallel \vec{F}_m$. Due campi mutuamente perpendicolari si dicono **campi incrociati**. Campi siffatti si possono realizzare interponendo il condensatore piano tra le espansioni polari di una calamita a ferro di cavallo.



La forza elettrica $\vec{F} = e\vec{E}$ è orientata verso l'alto, la forza magnetica $\vec{F}_m = e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ verso il basso. (per una carica positiva si verificherebbe tutto il contrario)

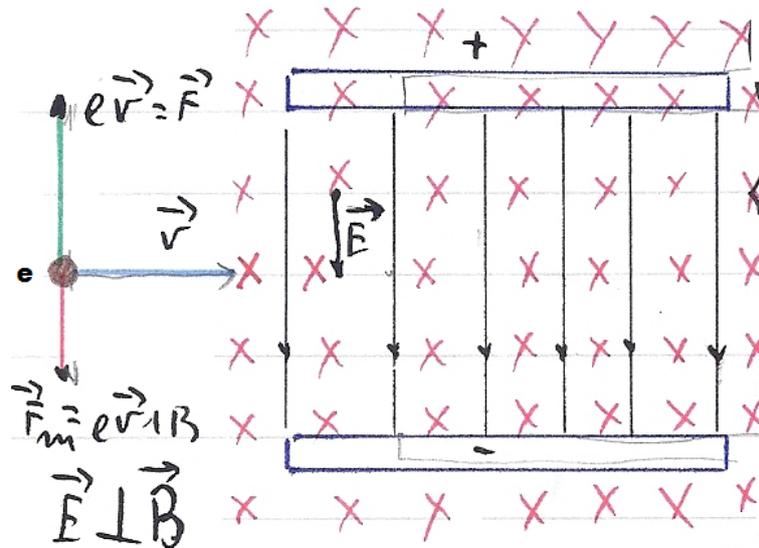
$$\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \mathbf{F}_m = e v B \sin 90^\circ = e v B \quad \mathbf{F} = e \mathbf{E}$$

Le due forze \vec{F} ed \vec{F}_m si equilibreranno se: $e E = e v B$ cioè se: $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}$ [1]

Per assegnati valori del campo elettrico e del campo magnetico, le forze si equilibreranno solo per quelle particelle la cui velocità è data dalla relazione [1].

Qualsiasi particella, qualunque sia la sua massa o la sua carica, attraverserà quello spazio senza essere deviata se la sua velocità è data dalla relazione [1].

Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico



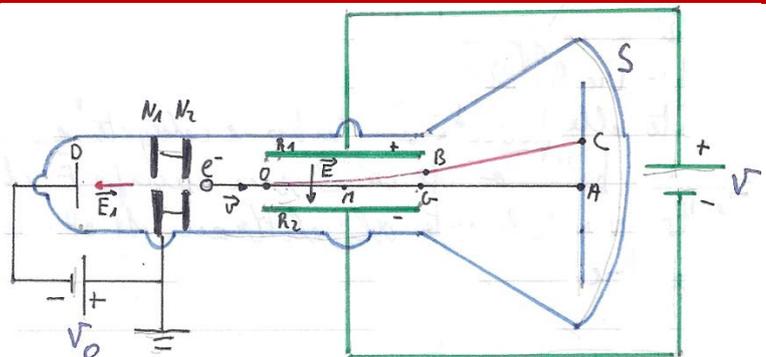
Una particella con velocità maggiore sarà deviata nel verso della forza magnetica. Il moto delle particelle cariche in campi magnetici non uniformi è piuttosto complicato.

Il procedimento utilizzato da Thomson consisteva: **(1)** nell'osservare la posizione del fascio di elettroni non deflesso con \vec{E} e \vec{B} nulli **(2)** nell'applicare un campo elettrico \vec{E} misurando sullo schermo la deflessione così provocata **(3)** nell'applicare un campo magnetico \vec{B} aggiustandone il valore in modo da riportare a zero la deflessione del fascio.

Le formule precedenti diventano:
$$\frac{e}{m} = \frac{d}{\left(\ell L + \frac{1}{2} \ell^2\right)} \cdot \frac{E}{B^2} = \frac{2y}{x^2} \cdot \frac{E}{B^2}$$

Il valore ottenuto da Thomson nel **1896** risultò: $\frac{e}{m} = 1,7 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$ in ottimo accordo col valore ottenuto da più recenti misure $\frac{e}{m} = 1,75890 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$.

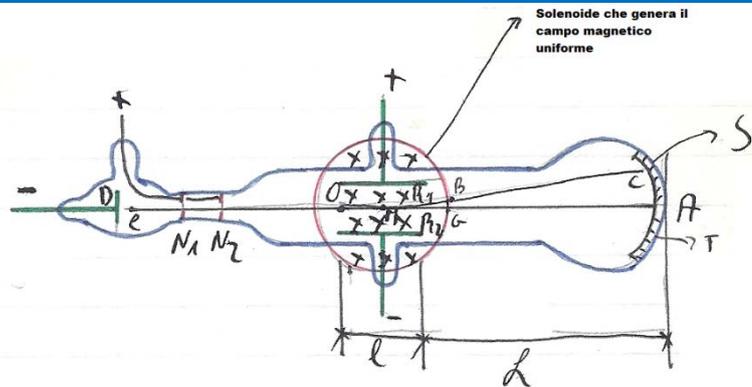
Tubo a raggi catodici utilizzato da Thomson nel **1896** per determinare il rapporto $\frac{e}{m}$ tra la carica elettrica e la massa dell'elettrone. E' costituito da un tubo di vetro a vuoto molto spinto contenente due elettrodi **D** ed **N** ($N_1 + N_2$) metallici ai quali, mediante una batteria si applica una d.d.p. V_0 . L'elettrodo **N** a potenziale più elevato (positivo) viene chiamato **Anodo**, quello (**D**) a potenziale minore (negativo) **Catodo**. Gli elettroni emessi dal catodo **D**, accelerati dal campo \vec{E}_1 , passano attraverso i fori di N_1 ed N_2 formando un sottile



Unità Didattica N° 27: Il campo magnetico

fascio di elettroni che colpisce il punto **A** della superficie **S** costituita da uno schermo fluorescente di solfuro di zinco. I tubi a raggi catodici comprendono anche due piastre **R₁** ed **R₂** deflettrici metalliche parallele, saldate alle pareti del tubo e collegate ad una seconda batteria che crea un campo elettrico \vec{E} che deflette verticalmente gli elettroni che attraversano le piastre.

Esperimento di Thomson per misurare $\frac{e}{m}$. Raggi catodici (elettroni) emessi dal catodo **D** e collimanti dalle fenditure **R₁** ed **R₂** arrivano sullo schermo **S** dopo essere passati attraverso una regione dove sono applicati un campo elettrico uniforme ed un campo magnetico uniforme e fra loro perpendicolari.



Sintesi finale

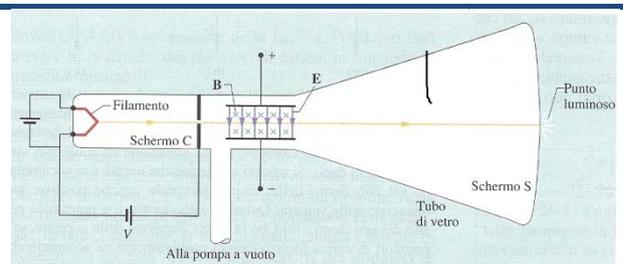
Procedimento di Thomson per determinare $\frac{e}{m}$

- (01)** Porre $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} = 0$ ed osservare la posizione non deflessa del fascio di elettroni
- (02)** Senza eliminare \vec{E} , applicare un campo magnetico uniforme \vec{B} e regolare il suo valore finché la deflessione del fascio ritorna a zero. Quando i campi \vec{E} e \vec{B} sono regolati in modo che le rispettive forze di deflessione si bilanciano abbiamo: $\vec{v} = \frac{\vec{E}}{\vec{B}}$ e quindi:

$$\frac{e}{m} = \frac{d}{\left(\ell L + \frac{1}{2}\ell^2\right)} \cdot \frac{E}{B^2} = \frac{2y}{x^2} \cdot \frac{E}{B^2} \quad \text{dove le grandezze del secondo membro sono tutte facilmente}$$

misurabili.

Il campo elettrico \vec{E} è prodotto collegando una batteria ai piatti del condensatore piano. Il campo magnetico \vec{B} è prodotto per mezzo di bobine percorse da corrente (non mostrate). Il campo magnetico entra nel piano della figura, come suggeriscono le crocette.



Una versione moderna dell'apparato di Thomson per la determinazione del rapporto tra carica e massa per l'elettrone.

Unità Didattica N°28

Proprietà magnetiche della materia

- 01)** Momento magnetico di una spira percorsa da corrente e di una calamita
- 02)** Azione meccanica esercitata da un campo magnetico su di una spira percorsa da corrente
- 03)** I teoremi di equivalenza di Ampere
- 04)** Momenti magnetici atomici e molecolari
- 05)** Effetti prodotti da un campo magnetico sulla materia
- 06)** Intensità magnetica \vec{H} ed intensità di magnetizzazione \vec{M}
- 07)** Isteresi magnetica
- 08)** Elettrocalamita
- 09)** Relè

Momento magnetico di una spira percorsa da corrente e di una calamita

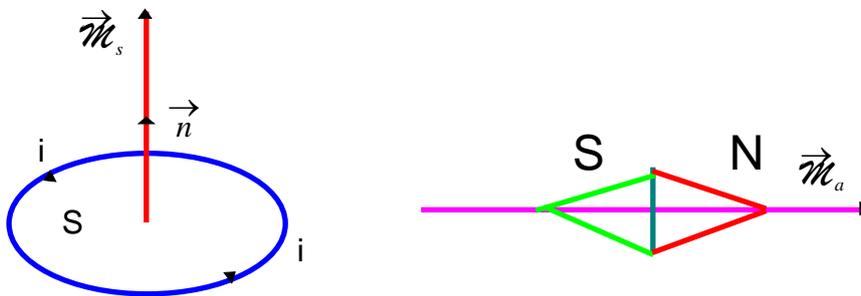
Poiché le proprietà magnetiche di una spira di area S percorsa dalla corrente i dipendono da i e da S (meglio dal prodotto iS) conviene introdurre una nuova grandezza vettoriale $\vec{\mathcal{M}}_s = \vec{\mu}$ detta **momento magnetico** della spira caratterizzata:

1) dalla **direzione** normale al piano della spira 2) dal **modulo** iS 3) dal **verso** dato dalla regola della mano destra. (Se le dita della mano destra avvolgono la spira nel verso della corrente i , il pollice dà il verso di $\vec{\mu}_s$) $\vec{\mu}_s = i \cdot S \cdot \vec{n}$ dove \vec{n} è un **versore** ortogonale al piano della spira ed avente verso deducibile con la regola della mano destra .

Gli **aghi magnetici** sono oggetti per i quali viene spontaneo di ragionare in termini di rotazioni e di coppie piuttosto che di spostamenti e di forze. Ogni ago magnetico è caratterizzato da una proprietà magnetica intrinseca, cioè una proprietà che esso possiede indipendentemente dall'esistenza di un campo magnetico esterno. Per questo motivo all'ago magnetico possiamo associare una grandezza vettoriale $\vec{\mu}_a$ detta **momento magnetico dell'ago** avente:

1) come **direzione** l'asse dell'ago 2) come **verso** quello che va dal polo Sud al polo Nord
3) come **modulo** un valore che dipende dalle sue dimensioni e dalla sua magnetizzazione

In realtà le proprietà magnetiche che caratterizzano gli aghi magnetici trovano la loro origine nel moto degli elettroni atomici. Come vedremo in seguito, ad ogni atomo possiamo associare un momento magnetico. La somma vettoriale dei momenti magnetici di tutti gli atomi dell'ago è il momento magnetico $\vec{\mu}_a$ dell'ago.



Azione meccanica esercitata da un campo magnetico su una spira percorsa da corrente

Consideriamo una spira percorsa da una corrente i immersa in un campo magnetico \vec{B} . Noi sappiamo che alla spira possiamo associare un **momento magnetico** $\vec{\mu}_s = i \cdot S \cdot \vec{n}$

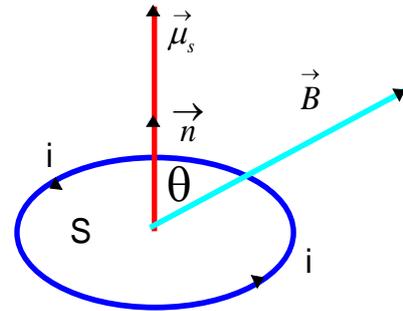
La spira è sottoposta ad una coppia di forze di **momento meccanico** o **momento torcente** $\vec{M} = \vec{\tau}$ definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{\mu}_s \wedge \vec{B}$$

$$M = \tau = \mu \cdot B \cdot \sin \vartheta = i \cdot S \cdot B \cdot \sin \vartheta; \quad M = 0 \Rightarrow \vartheta = 0 \Rightarrow$$

\vec{B} parallelo ed equiverso ad $\vec{\mu}_s = i \cdot S \cdot \vec{n}$

L'azione meccanica cessa quando il piano della spira risulta perpendicolare al vettore \vec{B} ed il verso di \vec{B} (che non è generato dalla corrente i) ci viene dato dalla regola della mano destra.

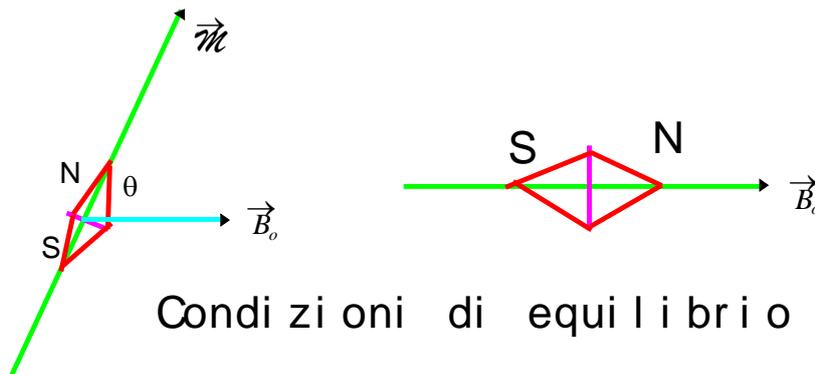


Azione meccanica esercitata da un campo magnetico su un ago magnetico

Un ago magnetico di momento magnetico $\vec{\mu}_a$ immerso in un campo magnetico \vec{B} uniforme è soggetto ad una coppia di forze di momento meccanico \vec{M} dato dalla seguente relazione vettoriale:

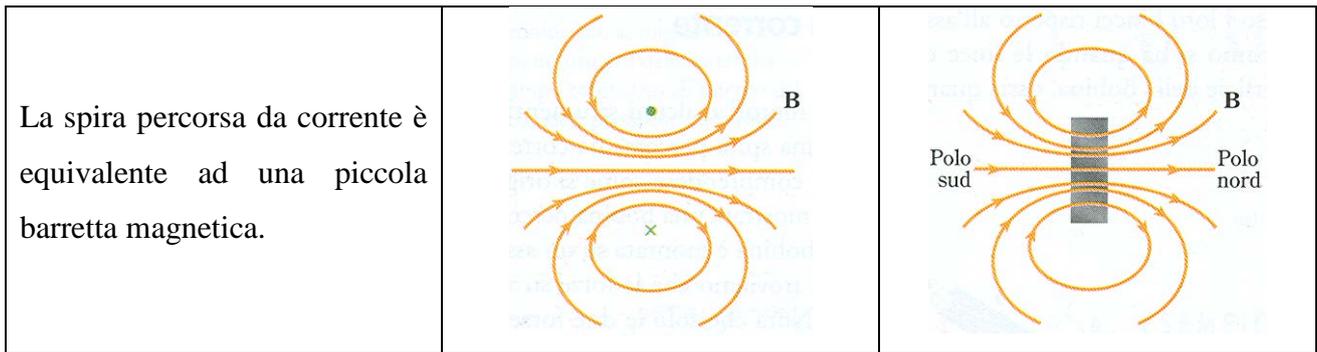
$$\vec{M} = \vec{\mu}_a \wedge \vec{B}$$

L'azione meccanica (cioè la rotazione) cessa quando $\vec{\mu}_a$ è parallelo ed equiverso con \vec{B} .



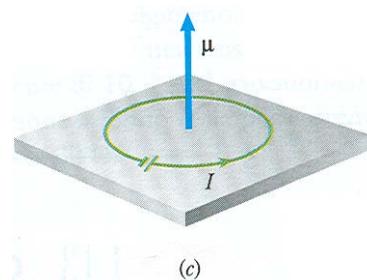
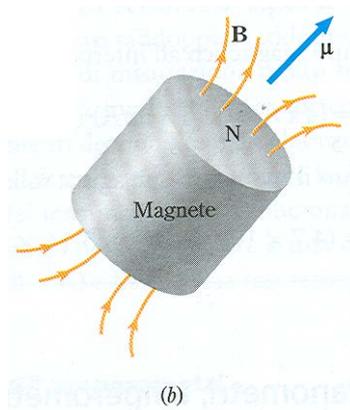
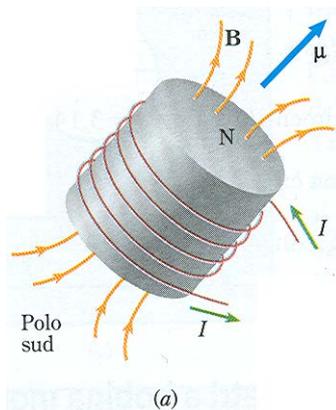
Condizioni di equilibrio

Molto spesso risulta comodo pensare ad una spira percorsa da corrente come ad una barretta magnetica (ago magnetico) caratterizzata dal suo momento magnetico. Se confrontiamo l'andamento del campo magnetico prodotto da una spira percorsa da corrente con quello di una barretta magnetica notiamo che i due campi sono molto simili, ad indicare che una spira si comporta come un piccolo magnete.



Supponiamo di sostituire la singola spira con una bobina o solenoide composta da N spire. Il momento torcente dovuto al campo magnetico agisce su ciascuna spira. Il momento magnetico del solenoide è: $\vec{\mu}_s = i \cdot S \cdot \vec{n}$. Il momento meccanico (torcente) agente sulla bobina vale:

$$\vec{M} = \vec{\mathcal{M}}_s \wedge \vec{B}_0 = NiS \cdot \vec{n} \wedge \vec{B}_0 \quad M = \tau = N \cdot i \cdot S \cdot B \cdot \sin \vartheta \quad iS = \text{momento magnetico di una spira}$$



La bobina in **(a)** è equivalente al piccolo magnete in **(b)**. Osservare in **(c)** come viene assegnato il verso del momento magnetico $\vec{\mu}$

Invece di porre l'attenzione al moto di una spira o di una bobina è più conveniente osservare il comportamento del vettore \vec{n} . La spira o la bobina percorsa dalla corrente i posta in un campo magnetico tende a ruotare in modo che questo vettore si disponga nella direzione e nel verso del vettore campo magnetico \vec{B} .

$\vec{\mu} = iS \cdot \vec{n}$ = momento magnetico di una spira di area S percorsa dalla corrente i ;

$\vec{\mu}_a$ si indica il momento magnetico intrinseco di un ago magnetico. La spira (ago magnetico) immersa in un campo magnetico \vec{B} è soggetto ad un momento meccanico (momento torcente)

$$\vec{M} = \vec{\mu}_s \wedge \vec{B} \quad \text{con} \quad M = \mu_s B \sin \vartheta = iSB \sin \vartheta \quad (\vec{M} = \vec{\mu}_a \wedge \vec{B})$$

I teoremi di equivalenza di Ampere

Ampere ha dimostrato l'equivalenza tra una spira percorsa da corrente ed un ago magnetico. L'equivalenza presenta un duplice aspetto: il primo riguarda le azioni meccaniche che un campo magnetico esterno esercita sulla spira e sull'ago magnetico, il secondo riguarda il campo magnetico prodotto dalla spira e dall'ago magnetico.

Prima parte

Una spira di area S percorsa dalla corrente i ed un ago magnetico di **momento magnetico** $\vec{\mu}_a$ immersi nello stesso campo magnetico uniforme \vec{B} subiscono la stessa azione meccanica (che si traduce in una coppia di forze di momento meccanico $\vec{M}_s = \vec{\mu}_s \wedge \vec{B}$ per la spira ed $\vec{M}_a = \vec{\mu}_a \wedge \vec{B}$ per l'ago magnetico) se vale la relazione: $\vec{\mu}_a = \vec{\mu}_s$ cioè se: $\mu_a = i \cdot S$ dove: i in ampere, S in m^2 , M_a in $weber \cdot m$

Seconda parte

L'equivalenza tra ago magnetico e spira percorsa da corrente non si limita alle sole azioni meccaniche che essi subiscono quando sono immersi in un campo magnetico esterno \vec{B}_o , ma si estende anche ai campi magnetici che essi generano nello spazio circostante.

Si dimostra teoricamente e si verifica sperimentalmente che se un ago magnetico ed una spira percorsa da corrente hanno lo stesso momento magnetico ($\vec{\mu}_s = \vec{\mu}_a$ cioè se $\mu_a = i \cdot S$) allora essi generano nello spazio circostante lo stesso campo magnetico se sono collocati nella stessa posizione.

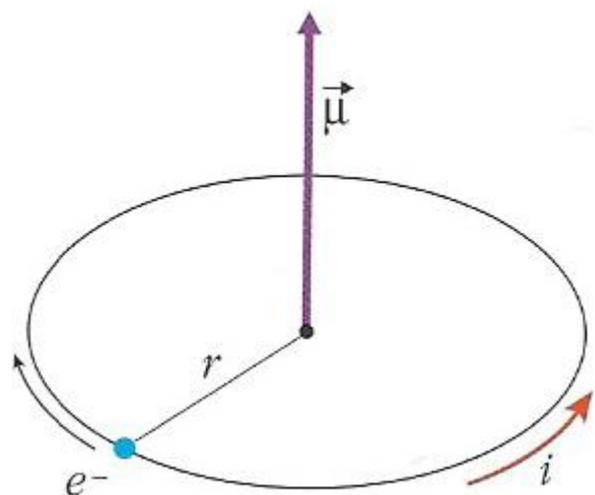
Momento magnetico degli atomi e delle molecole

Consideriamo un atomo di idrogeno. Sia T il tempo impiegato dall'elettrone a percorrere la sua orbita circolare di raggio r .

Si può dire che l'elettrone che si muove nella sua orbita circolare nell'atomo di idrogeno equivale ad un microscopico circuito elettrico nel quale passa una corrente i avente il verso opposto a quello della velocità dell'elettrone, di area pari a quella individuata dall'orbita dell'elettrone e di valore: $i = \frac{e}{T} = \frac{e \cdot \omega_e}{2\pi}$ con

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{T} = \frac{\omega_e}{2\pi} \quad \text{con} \quad \omega_e = \frac{v}{r}$$

velocità angolare dell'elettrone



Ma noi sappiamo che ad ogni spira percorsa da corrente possiamo associare un **momento magnetico orbitale** $\vec{\mu}$.

Si può quindi dire che l'atomo di idrogeno, nello stato fondamentale, ha un momento magnetico $\vec{\mu}^*$ dovuto al moto dell'elettrone lungo la sua orbita, il cui modulo vale:

$$\mu^* = iS = \frac{e}{T} \pi r^2 \quad \mu^* = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{Jm}^2}{\text{weber}} \quad r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad [1]$$

Il momento magnetico dato dalla [1] prende il nome di **Magnetone di Bohr** o **momento magnetico elementare**.

Consideriamo adesso un elettrone di un atomo qualsiasi che ruota su un'orbita circolare di raggio r con velocità angolare ω .

Ad esso possiamo associare un momento magnetico orbitale $\vec{\mu}_s$ dato da: $\vec{\mu}_s = i \cdot S \cdot \vec{n}$ con \vec{n} versore normale al piano dell'orbita descritta dall'elettrone.

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r} \quad S = \pi r^2 \quad \vec{\mu}_s = \frac{evr}{2} \vec{n}$$

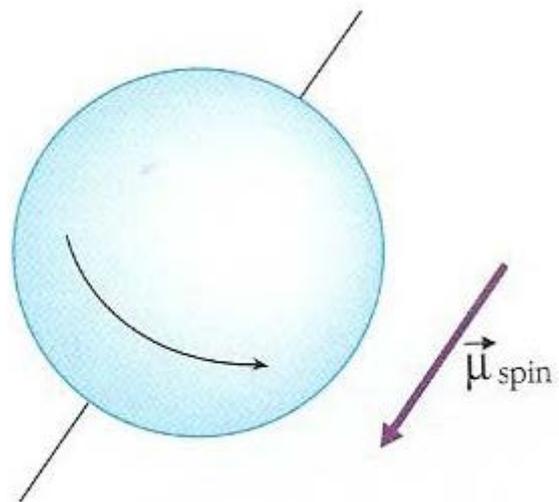
Secondo la meccanica quantistica, il momento magnetico orbitale $\vec{\mu}_s$ di un elettrone di un atomo non può assumere valori arbitrari, ma solo multipli interi del magnetone di Bohr μ^* .

In base a considerazioni di carattere quantistico ogni elettrone va considerato come una sfera che ruota attorno al proprio asse. Questa circostanza ci consente, per ragioni non descrivibili nella fisica classica, di associare all'elettrone un **momento magnetico di spin** detto anche **momento magnetico proprio** o **momento magnetico intrinseco** $\vec{\mu}_{sp}$ il cui modulo μ_{sp} è uguale ad un magnetone di Bohr. La direzione di $\vec{\mu}_{sp}$ coincide con l'asse di rotazione dell'elettrone, mentre il suo verso si ottiene applicando la regola della mano sinistra; il pollice della mano sinistra dà il verso di $\vec{\mu}_{sp}$ se le altre dita rappresentano il verso della rotazione.

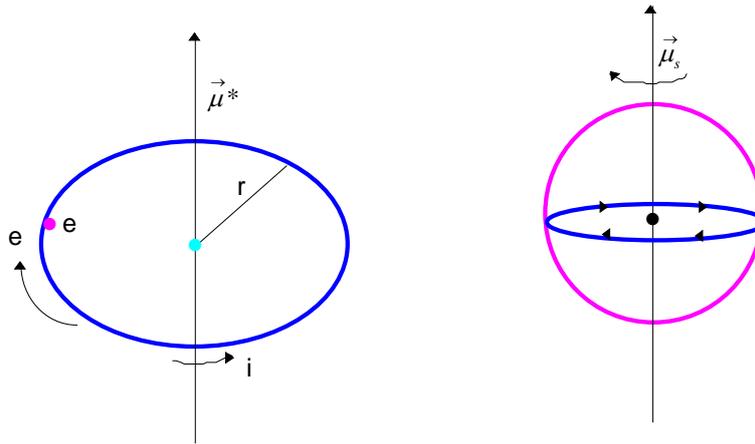
Secondo le vedute della meccanica quantistica ogni elettrone possiede anche un **momento magnetico di spin** $\vec{\mu}_s$ in quanto l'elettrone è concepito come una sfera che ruota attorno ad un asse passante per il suo centro.

Il momento magnetico risultante dell'elettrone è la somma del suo momento magnetico orbitale e del suo momento magnetico di spin, cioè:

$$\vec{\mu}_{tot} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_{sp}$$



Il momento magnetico di un atomo è la somma vettoriale dei momenti magnetici di tutti i suoi elettroni.



L'atomo di idrogeno che contiene un solo elettrone che ruota attorno al nucleo, possiede in qualsiasi stato energetico un **momento magnetico risultante** somma vettoriale del **momento magnetico orbitale** e del **momento magnetico di spin**.

Adesso vogliamo discutere le modifiche che subisce una molecola quando viene posta in un campo magnetico esterno \vec{B} . Mostreremo che, grazie alla presenza del campo magnetico esterno \vec{B} , la componente del momento magnetico $\vec{\mu}$ della molecola nella direzione del campo magnetico esterno \vec{B} risulta diversa da zero. Questo fenomeno, che viene indicato col nome di **polarizzazione magnetica delle molecole**, è in generale dovuto alla sovrapposizione di due cause distinte, e precisamente la precessione di Larmor che subiscono tutte le molecole prive un momento magnetico proprio attorno alla direzione del campo magnetico \vec{B} , e l'**orientamento** nella direzione del campo che subiscono quelle molecole che hanno un momento magnetico proprio.

Precessione di Larmor

Per potere discutere le proprietà magnetiche della materia è opportuno cominciare stabilendo quali modifiche subisce il moto degli elettroni di un atomo quando questi si trova immerso in un campo magnetico esterno \vec{B}_0 . A tale scopo cominciamo col considerare un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico \vec{B}_0 ortogonale al piano dell'orbita circolare dell'elettrone. In assenza del campo magnetico esterno \vec{B}_0 , noi sappiamo che l'elettrone si muove sotto l'azione di una forza centripeta di natura elettrostatica con una **velocità angolare** ω_0 . Quanto l'atomo di idrogeno si trova in un campo magnetico esterno \vec{B}_0 alla forza coulombiana si aggiunge la forza magnetica $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ la quale determina sull'elettrone una velocità angolare aggiuntiva ω_L detta **frequenza di Larmor** o **frequenza di precessione**. La forza magnetica \vec{F}_m ha un effetto su ω_0 che dipende dal verso con cui l'elettrone ruota lungo la sua orbita. Tale forza può provocare sia una diminuzione di ω_0 , sia un suo aumento.

Si può dimostrare che, nei due casi, le nuove velocità angolari sono date da:

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_L \quad \omega_2 = \omega_0 - \omega_L \quad \text{con: } \omega_L = \frac{e}{2m_e} \cdot B_0$$

Così l'effetto prodotto dall'applicazione di un campo magnetico esterno \vec{B}_0 è quello di aumentare o diminuire (a seconda che l'elettrone orbita in senso orario o antiorario) la velocità angolare (e quindi anche la velocità lineare). Questo fatto determina a sua volta un aumento o una diminuzione del momento magnetico orbitale dell'elettrone. In definitiva la presenza del campo magnetico esterno \vec{B}_0 fa sì che al primitivo moto di rivoluzione si sovrapponga un secondo moto rotatorio di precessione intorno alla direzione di \vec{B}_0 con velocità angolare ω_L . Questo moto di precessione dell'elettrone costituisce di fatto una corrente i_L che fluisce in una spirale di raggio r con intensità

$$i_L = \frac{-e}{T} = -e \cdot \frac{\omega_L}{2\pi}$$

A questa corrente sarà associato un momento magnetico: $\mu_L = i_L \cdot S = i_L \pi r^2$

Questo risultato vale in generale e costituisce il **Teorema di Larmor** che potremo enunciare così: << Consideriamo un atomo costituito da molti elettroni in movimento immerso in un campo magnetico uniforme \vec{B}_0 . Al primitivo moto degli elettroni si sovrappone una rotazione (**precessione di Larmor** $\vec{\mu}_L$) con velocità angolare $\omega_L = \frac{e B_0}{2m_2}$ attorno alla direzione di \vec{B}_0

avente il verso dato dalla regola della mano destra>>

Il **momento magnetico totale** dell'elettrone immerso in un campo magnetico \vec{B}_0 è la somma vettoriale del **momento magnetico orbitale** $\vec{\mu}_s$, dell'elettrone, del **momento magnetico di spin** $\vec{\mu}_{sp}$, e del **momento magnetico di Larmor** $\vec{\mu}_L$, cioè:

$$\vec{\mu}_{tot} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_{sp} + \vec{\mu}_L$$

La polarizzazione delle molecole in un campo magnetico esterno

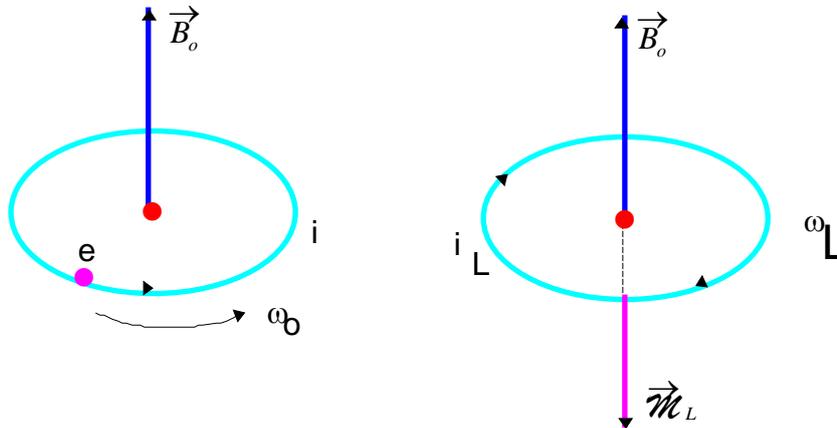
In questo paragrafo ci proponiamo di discutere le modifiche subite da una molecola quando questa viene posta in un campo magnetico esterno \vec{B}_0 . Mostriamo che, grazie alla presenza di tale campo, il componente del momento magnetico della molecola nella direzione del campo \vec{B}_0 è diverso da zero. Questo fenomeno, che viene indicato col nome di **polarizzazione magnetica delle molecole** è in generale dovuto alla sovrapposizione di due cause distinte, precisamente la **precessione di Larmor** che subiscono tutte le molecole attorno alla direzione del campo magnetico \vec{B}_0 e l'orientamento nella direzione del campo magnetico che subiscono quelle molecole dotate di un momento magnetico proprio. Cominciamo discutendo l'effetto della **precessione di Larmor** riferendoci, per semplicità di esposizione, ad un atomo di idrogeno col piano dell'orbita ortogonale alla direzione del campo magnetico \vec{B}_0 . Indichiamo con \vec{B}_0 il campo magnetico agente sull'atomo in esame. Dal punto di vista delle proprietà magnetiche dell'atomo, la **precessione di Larmor** si può descrivere come se lungo l'orbita dell'elettrone circolasse, in verso opposto a quello in cui procede l'elettrone, una corrente di intensità:

$$i_L = \frac{e}{T} = e \cdot \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2}{4\pi m} \cdot B_0$$

A tale corrente corrisponde il momento magnetico :

$$\vec{\mathcal{M}}_L = \mu_0 S i_L \cdot \vec{n} = -\frac{\mu_0 e^2 S}{4\pi m} \cdot \vec{B}_0$$

proporzionale a B_0 ed avente la stessa direzione ma verso opposto a \vec{B}_0 .



Potremo però dire, in generale, che quando si pone una sostanza in un campo magnetico esterno \vec{B}_0 , le sue molecole si polarizzano magneticamente, ossia acquistano un momento magnetico avente la stessa direzione ma verso opposto a quello del vettore \vec{B}_0 . Il valore assoluto di tale momento magnetico dipende dall'orientamento della molecola rispetto al campo. Nel caso delle molecole dotate di un momento magnetico proprio, si sovrappone, alla precessione di Larmor, un altro fenomeno che indicheremo come **polarizzazione per orientamento**. Quando una molecola dotata di momento magnetico proprio $\vec{\mathcal{M}}$ viene posta in un campo magnetico $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$, questo tende a disporlo parallelamente al campo, poiché in tale posizione il momento meccanico della coppia agente su di esso è nullo. A questa azione orientatrice del campo magnetico esterno si oppone l'agitazione termica che tende a disordinare le molecole in modo che i loro momenti magnetici vengono ad essere uniformemente orientati in tutte le direzioni. In queste condizioni si raggiunge un equilibrio in cui le molecole aventi un momento magnetico $\vec{\mathcal{M}}$ parallelo al campo magnetico esterno \vec{B}_0 sono un poco di più di quelle aventi direzione opposta. Ne segue che, preso un numero molto grande di molecole, il risultante di tutti i loro momenti magnetici propri $\sum \vec{\mathcal{M}}_i$ è un vettore non nullo parallelo al campo magnetico agente \vec{B}_0 . Concludiamo il presente paragrafo osservando che ogni molecola, posta in un campo magnetico esterno $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ acquista un momento magnetico avente la direzione di \vec{B}_0 . Tale momento magnetico è il risultante di due momenti magnetici parziali: uno dovuto alla **precessione di Larmor**, ha il verso opposto a \vec{B}_0 , l'altro, dovuto all'**orientamento del momento magnetico proprio della molecola**, ha lo stesso verso di \vec{B}_0 e dipende dal valore di B_0 .

I vettori magnetici \vec{B} , \vec{M} , \vec{H}

Si consideri un solenoide indefinito avente $n = \frac{N}{\ell}$ spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente di intensità i . Il modulo del campo magnetico all'interno del solenoide è dato da:

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} \cdot i = \mu_0 n \cdot i$$

Se introduciamo una sostanza all'interno del solenoide, la magnetizzazione della sostanza darà un contributo \vec{B}_m aggiuntivo al campo magnetico \vec{B}_0 preesistente. $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Per semplicità possiamo supporre che la sostanza posta all'interno del solenoide abbia forma cilindrica e sia uniformemente magnetizzata parallelamente all'asse del cilindro. Questo significa che siano uguali ed ugualmente orientati i momenti magnetici $\vec{\mathcal{M}}$ degli N atomi (molecole) del cilindro di sostanza che si trova all'interno del solenoide. Definiamo **intensità di magnetizzazione** (o **vettore magnetizzazione volumica** o **momento magnetico riferito all'unità di volume** o semplicemente **vettore magnetizzazione**) il vettore \vec{M} definito dalla seguente relazione vettoriale:

$$\vec{M} = \frac{N \cdot \vec{\mathcal{M}}}{\mu_0 \cdot V} = \frac{\vec{M}_{tot}}{\mu_0 \cdot V}$$

$\vec{\mathcal{M}}$ è il **momento magnetico di ciascun atomo** (molecola), \vec{M}_{tot} è la somma vettoriale dei momenti magnetici di tutti gli atomi (molecole) del cilindro di sostanza avente volume $V = S \cdot \ell$ cioè \vec{M}_{tot} rappresenta la **magnetizzazione totale** della sostanza introdotta nel solenoide. Se gli atomi (le molecole) non hanno tutte lo stesso momento magnetico $\vec{\mathcal{M}}$ allora il

vettore \vec{M} è definito dalla seguente relazione vettoriale:
$$\vec{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_i}{\mu_0 V}$$

Si può dimostrare che il campo magnetico \vec{B}_m dovuto alla magnetizzazione della sostanza introdotta nel solenoide risulta:
$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$$

Il campo magnetico totale \vec{B} all'interno del solenoide è la somma vettoriale di questi campi magnetici considerati separatamente.
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

[\vec{M} ha lo **stesso verso** (**verso opposto**) di \vec{B}_0 nel caso di **sostanze paramagnetiche e ferromagnetiche** (**diamagnetiche**)].

Conviene separare il campo magnetico \vec{B}_0 dovuto alla corrente i che circola nel solenoide da quello dovuto alla magnetizzazione della sostanza. Il vettore **eccitazione magnetica** \vec{H} è,

per definizione:
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$
 e quindi:
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Il modulo di \vec{H} all'interno del solenoide è :
$$\vec{H} = \frac{N}{\ell} \vec{i} = n \vec{i}$$

Il vettore \vec{H} è determinato dalla corrente reale, cioè dalla corrente che circola nel solenoide , e non è influenzata dalla magnetizzazione della sostanza.

In questo caso per \vec{H} valgono il teorema della circuitazione di Ampere e la prima legge di Laplace nelle forme:

$$C(\vec{H}) = i \oint d\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad [A]$$

E' importante rendersi conto che le equazioni [A] differiscono dalle corrispondenti equazioni per il campo magnetico \vec{B} non solo per l'assenza di μ_0 ma anche perché l'intensità di corrente \vec{i} è l'intensità della corrente di conduzione macroscopica , mentre nelle equazioni per \vec{B} l'intensità di corrente \vec{i} rappresenta l'intensità di qualunque tipo di corrente , compresa la corrente di polarizzazione associata alla magnetizzazione della sostanza .

Nel caso di **sostanze paramagnetiche** e **diamagnetiche**, l'intensità di magnetizzazione \vec{M} è proporzionale al vettore **eccitazione magnetica** \vec{H} , cioè risulta:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

La costante di proporzionalità χ è chiamata **suscettività magnetica**.

Poiché \vec{M} ed \vec{H} hanno le stesse dimensioni , χ è grandezza adimensionata .

$$\vec{M} \propto \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \propto \vec{H} \quad \text{Infatti: } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 \left(\vec{H} + \chi \cdot \vec{H} \right) = \mu_0 (1 + \chi) \cdot \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad \text{con:}$$

$\mu_r = 1 + \chi_r$ = **permeabilità magnetica relativa** al vuoto della sostanza considerata

$\chi = \mu_r - 1$ = **suscettività magnetica**

$\mu = \mu_0 \mu_r$ = **permeabilità magnetica del mezzo considerato**

Essendo la suscettività magnetica piuttosto piccola , la permeabilità magnetica assoluta per tutte le sostanze paramagnetiche e diamagnetiche è , con ottima approssimazione , uguale alla permeabilità magnetica del vuoto μ_0 .

L'equazione $\vec{B} = \mu \vec{H}$ è valida anche per le sostanze ferromagnetiche, ma è difficile da interpretare in quanto l'intensità di magnetizzazione \vec{M} non è una funzione lineare di \vec{H} , non è una funzione univoca (cioè ad un solo valore) di \vec{H} .

Per le **sostanze ferromagnetiche** \vec{B} ed \vec{M} sono funzioni a più valori di \vec{H} .

(Vedere **isteresi magnetica**)

OSSERVAZIONE N° 1

A solo scopo di semplicità supponiamo che la materia , di cui vogliamo studiare le proprietà magnetiche, abbia la forma di un cilindro molto lungo sul quale è avvolto il solenoide percorso dalla corrente elettronica \vec{i} .

OSSERVAZIONE N° 2

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mu_r \vec{B}_0}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}_0$$

cioè il **vettore eccitazione magnetica** \vec{H} generato da una corrente i non dipende dal mezzo nel quale è posto il circuito, purché il mezzo sia **omogeneo ed isotropo**.

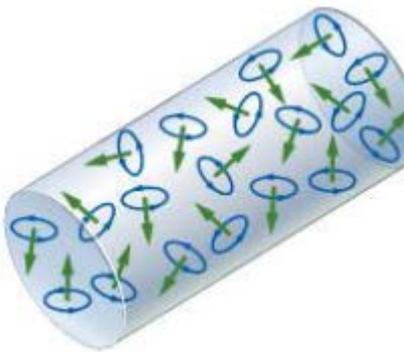
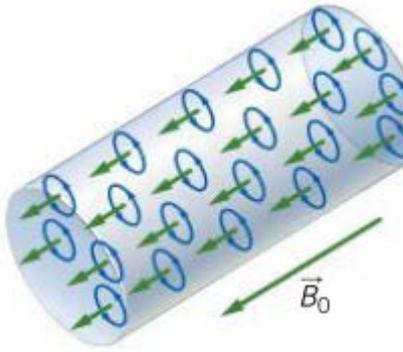
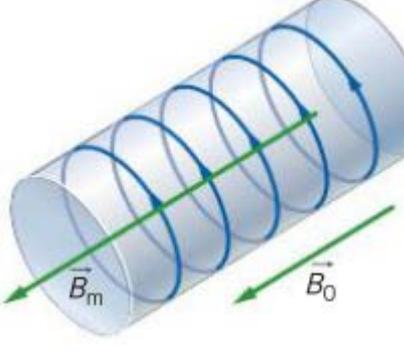
OSSERVAZIONE N° 3

Per molti atomi gli effetti magnetici degli elettroni, comprendenti sia gli spin che i moti orbitali, si cancellano esattamente. In tal caso ogni atomo non possiede un momento magnetico proprio.

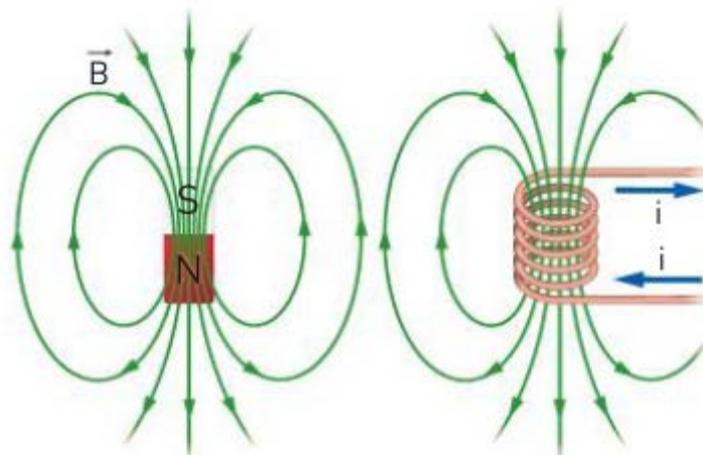
Per altri atomi gli effetti magnetici degli elettroni non si annullano, così che l'atomo in totale ha un momento magnetico \vec{m} .

Ampere ed il comportamento dei magneti permanenti

Ampere aveva ipotizzato che il comportamento dei magneti permanenti fosse dovuto all'effetto di correnti elettriche microscopiche che fluiscono al loro interno. Oggi sappiamo che ogni atomo si comporta come una spira percorsa da corrente generata dal movimento degli elettroni attorno al nucleo. Come esempio consideriamo un cilindro di ferro.

		
<p>In condizioni normali i momenti magnetici degli atomi sono orientati a caso e al suo interno non generano alcun campo magnetico.</p>	<p>In presenza di un campo magnetico esterno \vec{B}_0 i momenti magnetici degli atomi si orientano e generano il campo magnetico \vec{B}_m che la stessa direzione e lo stesso verso di \vec{B}_0.</p>	<p>La sovrapposizione delle correnti elementari dei singoli atomi, tutte nello stesso verso, è equivalente a una corrente che circola sulla superficie del cilindro. Adesso, il campo magnetico totale è:</p> $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Questo modello giustifica l'intuizione di Ampere, secondo il quale il campo magnetico di una calamita rettilinea è simile a quello prodotto da un solenoide. Il campo magnetico esterno \vec{B}_0 orienta nella propria direzione i momenti magnetici elementari presenti nella materia.



L'effetto globale di questo allineamento è equivalente al fluire di una corrente sulla superficie esterna del cilindro di ferro e questa corrente genera, a sua volta, un campo magnetico \vec{B}_m . Così, in tutto lo spazio il campo magnetico che si misura non è più \vec{B}_0 , ma il campo magnetico risultante:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

Sostanze diamagnetiche, paramagnetiche, ferromagnetiche

Avvicinando ad una calamita campioni di materiale diverso, si osserva che è possibile catalogare tutte le sostanze in tre distinte categorie:

1) Sostanze Diamagnetiche come il bismuto (B_i), il rame (C_u), l'acqua (H_2O), l'argento (Ag) che vengono **debolmente respinte**

2) Sostanze Paramagnetiche come l'alluminio (A_l), il sodio (Na), il platino (Pt), l'aria, l'ossigeno liquido che vengono **debolmente attratte**.

3) Sostanze Ferromagnetiche come il ferro (Fe), il cobalto (Co), il nichel (Ni), il gadolinio (G_d), il disprosio (D_y) ed un gran numero di leghe di questi elementi che sono **fortemente attratte**.

Vi è inoltre una differenza essenziale tra il comportamento delle sostanze ferromagnetiche e le altre: per le sostanze ferromagnetiche la forza è proporzionale a B, per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche la forza è proporzionale al quadrato di B.

Un elettrone che ruota attorno al nucleo di un atomo si comporta come una corrente che circola in una spira microscopica e pertanto **possiede un momento magnetico orbitale**; in più ha un **momento magnetico di spin** dovuto alla rotazione dell'elettrone attorno al proprio asse. Se la somma vettoriale dei momenti magnetici degli elettroni di un atomo (una molecola) è diversa da zero, l'atomo (la molecola) possiede un **momento magnetico proprio**. Questo significa che l'atomo (la molecola) si comporta come un microscopico ago magnetico che genera nello spazio circostante un campo magnetico microscopico. Se la somma vettoriale dei momenti

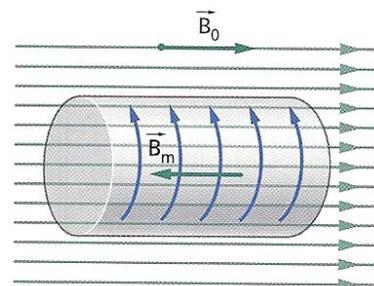
magnetici degli elettroni di un atomo (una molecola) è il vettore nullo, allora l'atomo (la molecola) non possiede un **momento magnetico proprio** e non genera nello spazio circostante nessun campo magnetico microscopico. Il momento magnetico di una molecola è uguale alla somma vettoriale dei momenti magnetici di tutti gli atomi che la costituiscono, cioè dei momenti orbitali e di spin degli elettroni presenti nella molecola.

SOSTANZE DIAMAGNETICHE

Sono caratterizzate dalla costanza della permeabilità magnetica μ_r e da $\mu_r < 1$, $\chi > 0$. In queste sostanze le **correnti di polarizzazione** circolano in verso opposto a quelle che generano il campo magnetico.

In assenza di campo magnetico esterno \vec{B}_0 , gli atomi (molecole) di una sostanza diamagnetica non hanno un momento magnetico proprio. L'azione del campo magnetico esterno \vec{B}_0 produce una modificazione delle rotazioni elettroniche (**precessione di Larmor**) equivalente ad una corrente indotta che è la causa della comparsa di un momento magnetico atomico (molecolare) non nullo. Il momento magnetico così prodotto risulta proporzionale al modulo del vettore \vec{B}_0 che lo ha causato, ad esso parallelo ma diretto in verso opposto a \vec{B}_0 . Questo significa che il vettore \vec{M} , **intensità di magnetizzazione**, ha la stessa direzione di \vec{B}_0 , ma verso opposto. Il campo magnetico totale \vec{B} ha modulo minore del campo magnetico esterno \vec{B}_0 .

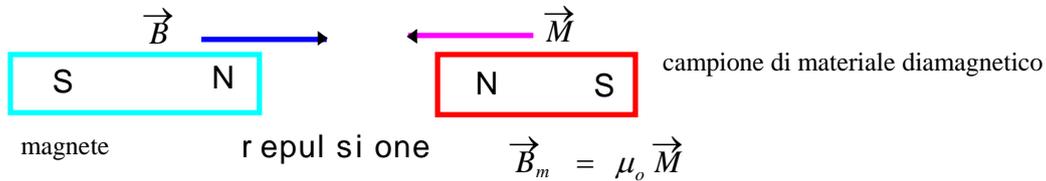
Sostanze diamagnetiche: in condizioni normali le loro molecole hanno **momenti magnetici elementari nulli** in quanto al loro interno gli effetti magnetici dovuti ai singoli elettroni si compensano. Un campo magnetico esterno \vec{B}_0 che agisce sugli elettroni in movimento, disturba questo equilibrio e genera un



momento magnetico debole, ma con verso opposto a quello di \vec{B}_0 . Così il campo magnetico totale $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$ ha modulo di poco minore del modulo del campo magnetico esterno \vec{B}_0 . Le linee del campo magnetico tendono ad essere espulse, anche se di poco, dal materiale diamagnetico.

Si potrebbe pensare che tutte le sostanze siano diamagnetiche. In effetti è così, ma l'intensità della magnetizzazione, dovuta alla **precessione di Larmor**, è così piccola che viene osservata solo in quelle sostanze le cui molecole non possiedono un momento magnetico proprio. Anche le sostanze le cui molecole sono dotate di un momento magnetico proprio subiscono la **precessione di Larmor**, ma tale fenomeno rimane in questi casi completamente mascherato dalla **polarizzazione magnetica per orientamento** che dà luogo ad un momento magnetico molecolare medio avente la stessa direzione e lo stesso verso di \vec{B}_0 .

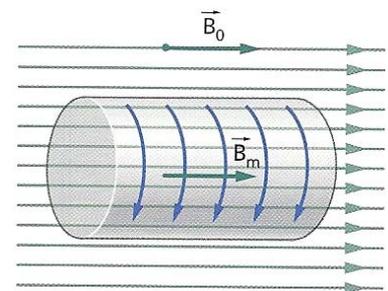
Ora possiamo renderci conto del motivo per cui un campione di materiale diamagnetico è respinto quando viene avvicinato al polo di un magnete. Se si tratta di un **polo Nord**, vicino ad esso esiste un campo magnetico \vec{B}_0 avente verso uscente dal polo. Se ad esso si avvicina una **sostanza diamagnetica** (ad esempio bismuto) la magnetizzazione \vec{M} che viene indotta in essa sarà diretta verso il polo Nord N, cioè avrà verso opposto a quello di \vec{B}_0 .



SOSTANZE PARAMAGNETICHE

Sono caratterizzate dalla **costanza della permeabilità magnetica** μ_r e da $\mu_r > 1, \chi > 0$. In queste sostanze le correnti di polarizzazione circolano nello stesso verso delle correnti che generano il campo magnetico. Gli atomi (le molecole) delle sostanze paramagnetiche possiedono un **momento magnetico proprio**. In assenza di un campo magnetico esterno \vec{B}_0 la sostanza non presenta un **momento magnetico proprio** in quanto, a causa dell'agitazione termica, i singoli momenti magnetici sono orientati a caso e quindi è nulla la somma vettoriale dei momenti magnetici di tutti gli atomi. L'azione del campo magnetico esterno \vec{B}_0 si traduce in un orientamento dei momenti magnetici \vec{M} dei singoli atomi. La sostanza acquista un **momento magnetico complessivo** avente la stessa direzione e lo stesso verso di \vec{B}_0 . Questo significa che i vettori \vec{B}_0 e \vec{M} hanno la stessa direzione e lo stesso verso.

Sostanze paramagnetiche: hanno **momenti magnetici elementari piuttosto deboli**. Il loro allineamento nella direzione e nel verso di \vec{B}_0 genera una debole magnetizzazione della sostanza paramagnetica, cioè genera un campo magnetico \vec{B}_m il cui modulo è piuttosto piccolo.

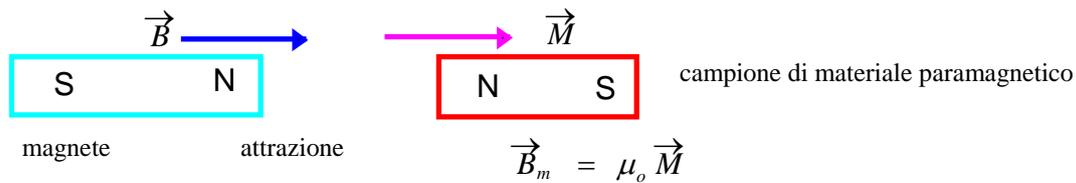


Così il campo magnetico totale $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$ ha modulo di poco maggiore del modulo del campo magnetico esterno \vec{B}_0 . L'addensamento delle linee del campo magnetico \vec{B}_m all'interno del materiale paramagnetico è trascurabile.

Tuttavia il processo di allineamento è fortemente disturbato dagli urti fra gli atomi se l'insieme considerato è un aeriforme, e dalle vibrazioni termiche se l'insieme considerato è un solido.

In queste sostanze la **polarizzazione dovuta alla precessione di Larmor è trascurabile rispetto alla polarizzazione per orientamento**.

Si spiega così l'attrazione delle sostanze paramagnetiche rispetto ad una calamita.

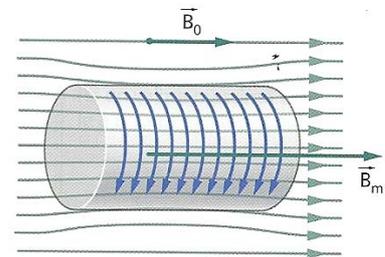


SOSTANZE FERROMAGNETICHE

In queste sostanze μ_r non è costante ma varia al variare della corrente i che attraversa il solenoide e che genera il campo magnetico \vec{B}_o . Anche per le **sostanze ferromagnetiche** valgono delle relazioni formalmente uguali a quelle delle sostanze **paramagnetiche** e **diamagnetiche**, cioè: $\vec{M} = \chi \vec{H}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, però in questo caso χ e μ non sono più delle costanti ma delle funzioni (a più valori) di \vec{H} .

In queste sostanze le **correnti di polarizzazione** circolano nello stesso verso delle correnti che generano il campo magnetico esterno \vec{B}_o . Gli atomi (le molecole) delle sostanze paramagnetiche possiedono un **momento magnetico proprio**. In queste sostanze μ_r non è costante ma varia al variare della corrente i che attraversa il solenoide e che genera il campo magnetico esterno \vec{B}_o .

Sostanze ferromagnetiche: possiedono **momenti magnetici elementari piuttosto intensi** (che subiscono fortemente l'effetto del campo magnetico esterno \vec{B}_o e generano un campo magnetico \vec{B}_m intenso).



\vec{B}_o e \vec{B}_m hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Il campo magnetico totale $\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}_m$ può essere molto più intenso del campo magnetico esterno \vec{B}_o . Per questo motivo, anche se \vec{B}_o è uniforme, \vec{B} è più intenso all'interno del materiale ferromagnetico: in tale zona le linee del campo magnetico totale si addensano.

ISTERESI MAGNETICA

Nei materiali ferromagnetici il campo magnetico totale \vec{B} non è direttamente proporzionale al campo magnetico esterno \vec{B}_o , come avviene per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche. Per spiegare questa proprietà avvolgiamo un solenoide attorno ad un lungo cilindro fatto da una

sostanza ferromagnetica. Questo solenoide fornisce il campo magnetico esterno \vec{B}_0 , il cui modulo è

dato dalla formula: $B_0 = \mu_0 \cdot \frac{N}{\ell} \cdot i$ e quindi può essere variato a piacere mutando l'intensità

della corrente i lasciando fissi il numero N di spire e la lunghezza ℓ del solenoide.

L'**isteresi magnetica** è il fenomeno presentato dalle sostanze ferromagnetiche caratterizzate dall'aver la permeabilità magnetica variabile. Il fenomeno consiste in un ritardo nella magnetizzazione e nella smagnetizzazione della sostanza ferromagnetica. Circondando la sostanza ferromagnetica con un solenoide percorso dalla corrente elettrica di intensità i , si nota che μ_r varia al variare di i .

La forma del **ciclo di isteresi magnetica** dipende, oltre che dalla natura chimica del materiale, dalla sua temperatura e dai processi di magnetizzazione e smagnetizzazione.

Si chiama **curva di magnetizzazione** una delle curve aventi equazione $B = f(H)$ oppure $M = f(H)$ oppure $B = f(B_0)$ relative ad un dato campione. La più importante è la curva $M = f(H)$. Poiché risulta $H = ni$, le curve precedenti possono benissimo essere sostituite dalle curve aventi rispettivamente equazioni $B = f(i)$, $M = f(i)$ dove i è la corrente che circola nel solenoide, \vec{B} è il campo magnetico all'interno del solenoide riempito da una sostanza ferromagnetica, \vec{M} è l'intensità di magnetizzazione della sostanza ferromagnetica.

Partendo da un campione non magnetizzato la curva OP è detta **curva di prima magnetizzazione**. $M(B)$ cresce rapidamente al crescere di H (i) fino a raggiungere un valore di saturazione M_s (B_s).

Se, dopo avere ottenuto una curva di prima magnetizzazione OP, si fa diminuire progressivamente H (la corrente i) fino al valore zero, rimane nella sostanza una **magnetizzazione residua** M_r (B_r), che si può eliminare solo ponendo la sostanza ferromagnetica in un campo (corrente) avente verso opposto a quello che ha prodotto la magnetizzazione.

Il valore assoluto H_c del campo che ha prodotto la smagnetizzazione rappresenta quello che si chiama **campo coercitivo**. Se H continua ad aumentare, con verso opposto, allora M ha segno opposto e si otterrà quello che viene detto **ciclo di isteresi magnetica**. Per la sua importanza pratica, si considera, di solito, un ciclo di isteresi magnetica descritto fra due valori uguali ed opposti del vettore **eccitazione magnetica**, $-H_m$ e $+H_m$.

Tale ciclo ha una forma simmetrica rispetto all'origine. In generale si osserva che il valore di B non è funzione ad un solo valore di i , cioè la **permeabilità magnetica non è costante**, ma varia con i e per ogni valore di i non è univocamente determinata.

Essa dipende dalle precedenti condizioni di magnetizzazione alle quali il campione è stato sottoposto. Ricordiamo infine che i processi interni collegati alla magnetizzazione ed alla smagnetizzazione comportano sempre un lavoro contro resistenze passive e quindi determinano uno sviluppo di calore. L'area del ciclo di isteresi risulta proporzionale all'energia dissipata nell'unità di volume del materiale ferromagnetico per effetto dell'isteresi.

$\mu_0 =$ **permeabilità magnetica del vuoto**

$\mu_r =$ **permeabilità magnetica relativa al mezzo considerato**

$\chi = \mu_r - 1 =$ **suscettività magnetica**

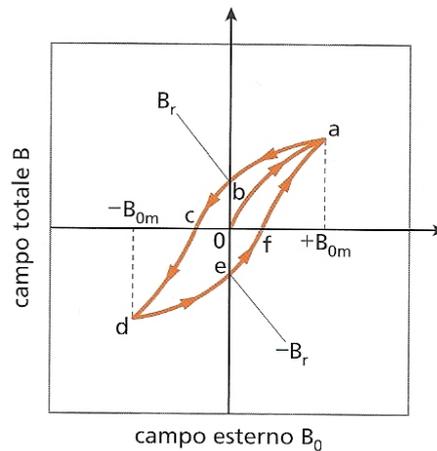
χ si legge : << chi >>

Se in ascissa riportiamo i valori di H ed in ordinata i valori di B , per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche la curva di equazione $B = \mu H$ è una retta passante per l'origine , per le sostanze ferromagnetiche è una curva a più valori piuttosto complessa.

La figura mostra la curva che descrive come varia il modulo del campo magnetico totale \vec{B} al variare del modulo del campo magnetico \vec{B}_o

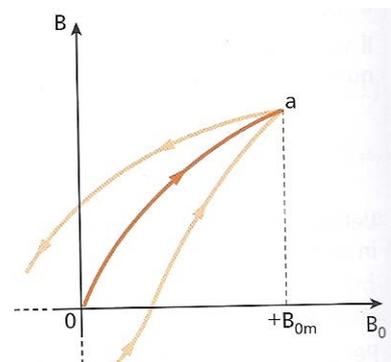
Curva di prima magnetizzazione

(tratto *oa*) e **ciclo d'isteresi magnetica** di un materiale ferromagnetico



La curva sperimentale che realizza il ciclo di isteresi magnetica parte dall'origine degli assi cartesiani: prima di fare fluire corrente nel solenoide sia \vec{B} che \vec{B}_o sono nulli.

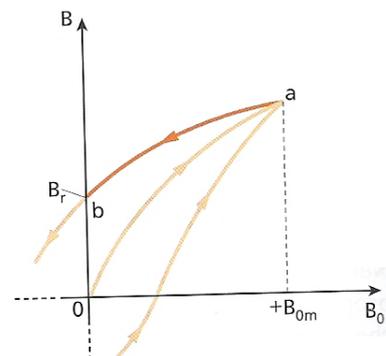
Nel tratto *Oa*, al crescere di \vec{B}_o aumenta anche \vec{B} , ma la curva che descrive la relazione che li lega non è una retta. Ciò significa che per le sostanze ferromagnetiche la permeabilità magnetica relativa μ_r (che può assumere valori molto elevati) non è una costante, ma varia al variare di \vec{B}_o . Giunti nella zona del punto a della curva di prima magnetizzazione il valore di \vec{B}



Aumenta di poco fino a raggiungere un **valore limite di saturazione**. Ciò accade perché tutti i momenti magnetici presenti all'interno del materiale ferromagnetico si sono orientati.

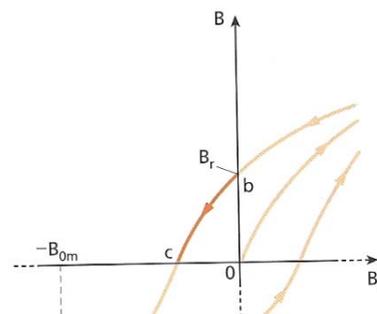
Giunti a questo punto, si riduce la corrente i nel solenoide in modo da fare diminuire il modulo del vettore \vec{B}_o . Così facendo, il sistema magnetico non ripercorre a ritroso il comportamento osservato in precedenza, ma descrive la curva che va da **a** a **b**.

Quando B_o si annulla, nel cilindro ferromagnetico rimane un

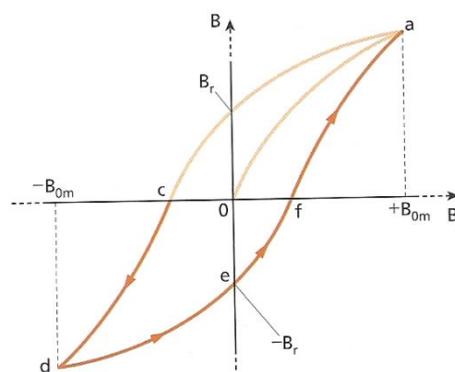


campo magnetico residuo di intensità B_r (punto b del grafico).

Per eliminare questa magnetizzazione residua è necessario invertire il segno di B_o (cioè invertire il verso della corrente che circola nel solenoide). In questo modo si giunge al punto c dove B è nullo ma B_o ha un valore negativo.



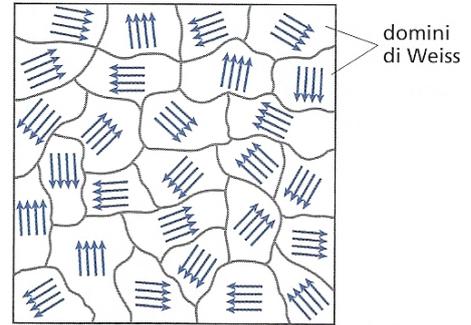
Facendo in modo che B_o diminuisca ancora, fino a raggiungere il valore $-B_{mo}$ per poi tornare a crescere fino al valore $+B_{mo}$, si ottiene la curva della figura che prende il nome di **curva di isteresi magnetica**. Si nota che questa curva non passa più per l'origine degli assi cartesiani (che corrisponde allo stato iniziale nel quale sia B_o che B erano uguali a zero).



Nelle **sostanze ferromagnetiche** esistono delle regioni (dette **domini di Weiss**) piccolissime rispetto agli oggetti macroscopici ma sufficientemente grandi da contenere un numero enorme di atomi e molecole (almeno $\sim 10^{15}$). I momenti magnetici degli atomi che si trovano in ogni dominio hanno lo stesso orientamento per cui ogni **dominio di Weiss** possiede un proprio momento magnetico anche in assenza di un campo magnetico esterno \vec{B}_o . Tuttavia una **sostanza ferromagnetica** non presenta magnetizzazione in quanto la somma vettoriale di tutti i momenti magnetici dei singoli domini di Weiss (a causa del loro diverso orientamento) è nulla. Il processo di magnetizzazione consiste nel portare l'intensità di magnetizzazione \vec{M} relativa a tutti i domini di Weiss (o almeno a molti di essi) nella stessa direzione e nello stesso verso del campo magnetico esterno \vec{B}_o , mentre non viene sensibilmente modificato il modulo dell'intensità di magnetizzazione \vec{M}_w di ogni singolo dominio.

I domini di Weiss

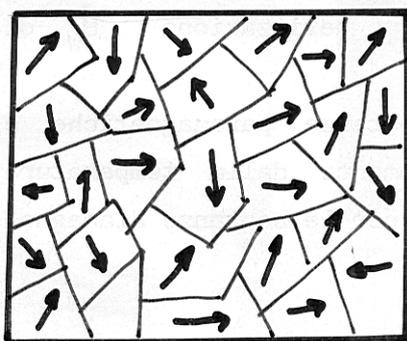
Un campione di materiale ferromagnetico è composto di domini, all'interno dei quali i momenti magnetici permanenti dei singoli atomi sono allineati fra loro per dare un **momento magnetico risultante** relativamente elevato. In assenza di un campo magnetico esterno **(a)** i momenti magnetici dei diversi domini sono orientati casualmente.



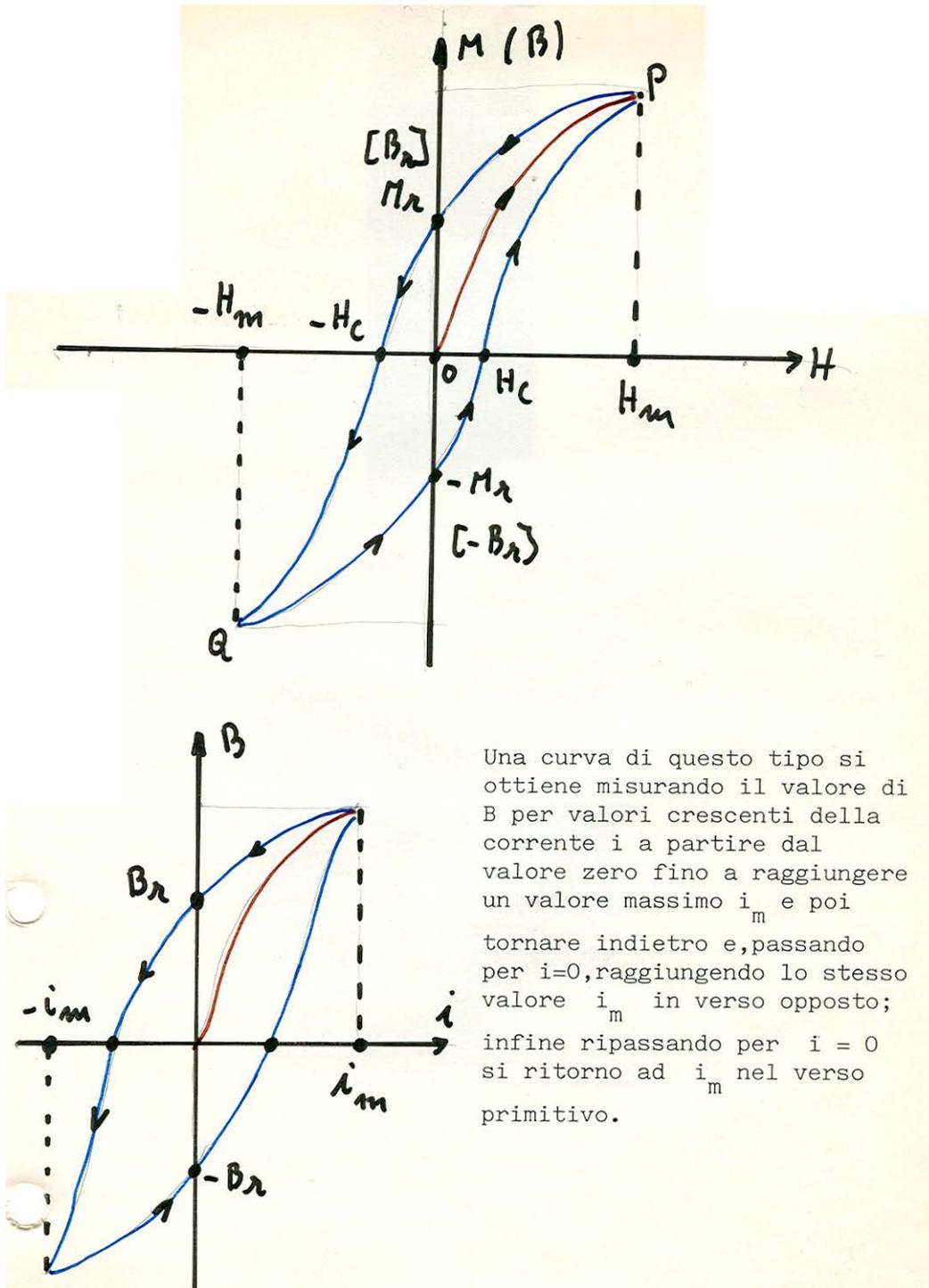
Quando è applicato un campo magnetico esterno (b), i domini che hanno momenti magnetici orientati come il campo magnetico esterno si ingrandiscono. In condizione di saturazione (c), nel materiale permane un unico dominio, nel quale tutti i momenti magnetici atomici sono allineati col campo magnetico esterno.

La magnetizzazione delle sostanze paramagnetiche e ferromagnetiche dipende fortemente dalla temperatura T , al contrario di quanto accade per le sostanze diamagnetiche. Aumentando la temperatura nelle sostanze ferromagnetiche si può raggiungere un valore della temperatura (detto **punto** o **temperatura di Curie** caratteristico di ogni sostanza) per cui la sostanza cambia il suo comportamento da quello tipico di una **sostanza ferromagnetica** a quello di una **sostanza paramagnetica**. In tal caso non si ha più magnetismo residuo né **ciclo di isteresi**. Nelle sostanze ferromagnetiche ha luogo una speciale forma di interazione, chiamata **accoppiamento di scambio**, che consiste nell'accoppiamento dei momenti magnetici degli atomi adiacenti in un rigido parallelismo. L'accoppiamento di scambio, che è un effetto puramente quantistico, non può essere spiegato con i concetti della fisica classica.

Se si innalza la temperatura al di sopra di un valore critico, chiamato **temperatura di Curie**, l'accoppiamento di scambio cessa improvvisamente e i materiali diventano **paramagnetici**. Per il ferro la temperatura di Curie è $1403\text{ }^{\circ}\text{K}$. *Il ferromagnetismo è una proprietà non solo degli atomi ma anche dell'interazione di ciascun atomo con i suoi vicini nel reticolo cristallino del solido.*



I diversi domini magnetici in un materiale ferromagnetico non magnetizzato, sono orientati in modo che producano un effetto esterno trascurabile.



La magnetizzazione permanente

Nei punti **b** ed **e** il materiale ha acquistato una **magnetizzazione permanente**. La sostanza ferromagnetica considerata diventa un **magnete permanente**. Questa magnetizzazione si mantiene nel tempo e non è più necessario sottoporre la sostanza ad un campo magnetico esterno.

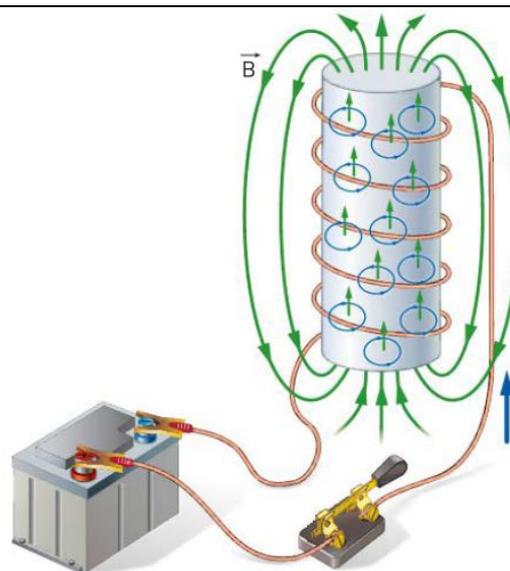
La temperatura di Curie

Anche un materiale ferromagnetico può essere smagnetizzato, basta portarlo al di sopra di una certa temperatura caratteristica della sostanza considerata detta **temperatura di Curie**. Al di sopra della **temperatura di Curie** ogni sostanza ferromagnetica diventa paramagnetica e perde la propria magnetizzazione residua.

Elettrocalamita o elettromagnete

Gli **elettromagneti** (o **elettrocalamite**) sono strumenti che servono a realizzare nell'aria intensi campi magnetici, oppure hanno il compito di produrre lo spostamento di armature (**ancore**) o di portare dei pesi. Si basano sul fatto che i campi magnetici prodotti da solenoidi attraversati da corrente possono essere resi assai più intensi avvolgendo i solenoidi attorno a nuclei di materiale ferromagnetico. Infatti il passaggio della corrente determina la magnetizzazione di tale nucleo e, quindi, un notevolissimo rafforzamento del campo di induzione magnetica prodotto. Generalmente il nucleo di una **elettrocalamita** (o **elettromagnete**) è costituito da una sbarra di ferro dolce opportunamente sagomata. Si può costruire un'elettrocalamita (rettilenea) avvolgendo su un cilindro di ferro dolce (**nucleo dell'elettrocalamita**) un solenoide. Inviando una corrente nel solenoide si crea un campo magnetico ed il nucleo si magnetizza per orientamento. L'intensità di magnetizzazione che così si ottiene, se la corrente è sufficientemente intensa, può essere di gran lunga superiore a quella dei magneti naturali. Si ha così nelle vicinanze dell'elettrocalamita un campo magnetico molto intenso. Interrompendo la corrente che circola nel solenoide il nucleo di ferro si smagnetizza quasi completamente per cui il campo magnetico praticamente scompare.

Avvolgendo un solenoide attorno ad un nucleo di ferro dolce otteniamo un **elettromagnete**. Quando nel solenoide circola corrente, il nucleo di ferro dolce genera un campo magnetico che può essere diverse centinaia di volte più intenso di quello che si sarebbe potuto creare nel solenoide posto nell'aria. Non appena la corrente si interrompe, il nucleo si smagnetizza quasi completamente. Un elettromagnete si comporta come una calamita che entra in azione a comando, azionando un opportuno interruttore.



Unità Didattica N ° 29: Campo magnetico variabile

- 1) Il flusso del vettore \vec{B}**
- 2) Esperienze di Faraday sulle correnti indotte**
- 3) Legge di Faraday-Newmann-Lenz**
- 4) Correnti di Foucault**
- 5) Il fenomeno dell'autoinduzione**
- 6) Extracorrente di chiusura e di apertura in un circuito elettrico**
- 7) Mutua induzione**
- 8) Rocchetto di Ruhmkorff**

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Flusso del vettore \vec{B}

- Il flusso del vettore \vec{B} attraverso una superficie S è definito in maniera del tutto analoga a quanto è stato fatto per il flusso del vettore \vec{E} . Sia S una superficie piana ed \vec{n} un versore ad essa perpendicolare immersa in un campo magnetico uniforme \vec{B} .

$$\Phi_S(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} \cdot \vec{n} = B \cdot S \cdot \cos \vartheta = B_n \cdot S$$

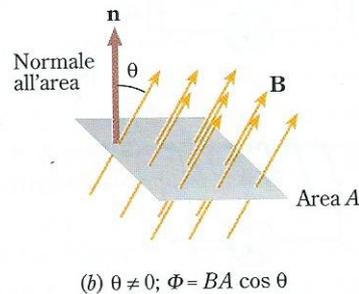
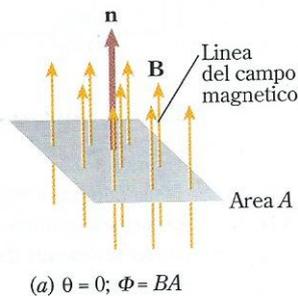
Il **flusso massimo** si ottiene per $\vartheta = 0$ e vale:

$$\Phi_{\max} = B \cdot S$$

Nel caso in cui \vec{B} risulta variabile nei punti di una superficie S avremo:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \sum \vec{B} \times \vec{n} \cdot \Delta S$$

essendo ΔS un'area così piccola da potersi ritenere costante in direzione, verso e modulo in ogni suo punto il vettore \vec{B} . La stessa formula si applica quando dobbiamo calcolare il flusso del vettore \vec{B} attraverso una superficie S qualsiasi. Basta suddividere S in n parti ΔS così piccole da soddisfare le condizioni della definizione che presuppone la superficie piana ed il campo magnetico \vec{B} costante su di essa.



- In termini differenziali abbiamo : $d\Phi_{ds}(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{n} \cdot dS = B \cdot \cos \vartheta \cdot dS$ $\Phi_S(\vec{B}) = \int \vec{B} \times \vec{n} \cdot dS$

$$\{\Phi(\vec{B})\} = \text{weber} = Wb = \{B\} \cdot \{S\} = \text{tesla} \cdot \text{metroquadrato}$$

Il **weber** (W_b)[§] è il flusso di un campo magnetico generato da un campo magnetico uniforme ed unitario (cioè di **1 tesla**) attraverso una superficie piana di $1m^2$ posta perpendicolarmente alla direzione di \vec{B}

$$1 \text{ tesla} = \frac{1 \text{ weber}}{1 \text{ metroquadrato}}$$

[§] Weber (1804-1891) fisico tedesco

$$[\Phi(\vec{B})] = [B] \cdot [S] = [M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1} \cdot L^2] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}]$$

Il teorema di Gauss per il magnetismo

- Le linee di campo del vettore campo magnetico \vec{B} sono sempre **linee chiuse** e quindi prive di punti di inizio e di fine, ossia il vettore \vec{B} non ha sorgenti né positive né negative. Ciò significa che, se si considera una superficie chiusa (**s.c.**) qualsiasi entro un campo magnetico, il numero delle linee di campo del vettore \vec{B} che entrano in essa è sempre uguale al numero delle linee di campo che ne escono. Quindi: **Il flusso del vettore \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo.** $\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$ $\Phi_{s.c.}(\vec{B})=0$ [^] Questo risultato esprime il

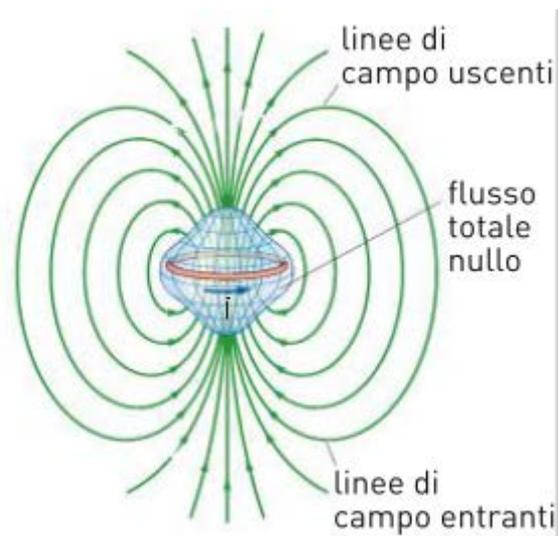
teorema di Gauss per il magnetismo. Si esprime questa circostanza dicendo che il vettore \vec{B} è **solenoidale** in tutti i punti dello spazio.

In termini differenziali si scrive:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Il **teorema di Gauss** per il magnetismo ha la seguente interpretazione in termini di linee di campo: ad ogni linea di campo entrante nella superficie gaussiana chiusa (contributo negativo al flusso) ne corrisponde sempre una uscente (contributo positivo al flusso); ne consegue che il flusso totale del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Il numero delle linee del campo magnetico che entrano in una superficie chiusa è sempre uguale al numero di quelle che escono da essa.



Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

- Studiamo ora una importante conseguenza del fatto che il campo magnetico \vec{B} è **solenoidale**.

Consideriamo una linea orientata ℓ tracciata in un campo magnetico \vec{B} e sia S' una delle infinite superfici che hanno la linea ℓ come contorno. Dalla [^] si vede subito che il flusso $\Phi_{S'}(\vec{B})$ del vettore \vec{B} attraverso S' è sempre lo stesso qualunque sia la forma della superficie S' che si appoggia ad ℓ .

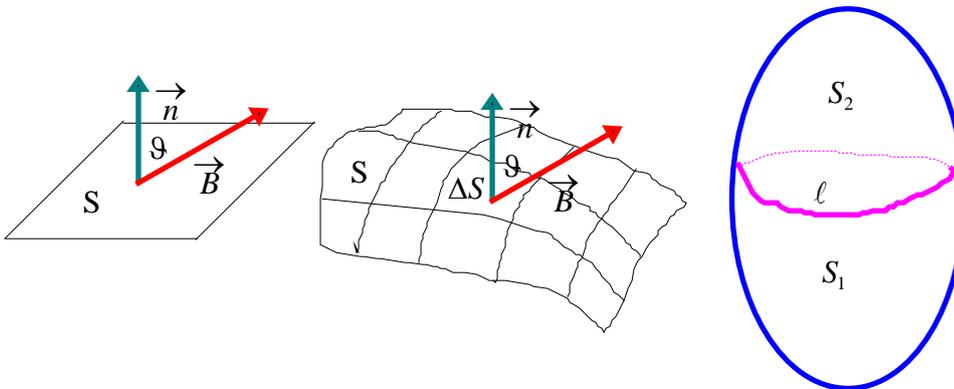
Una superficie S chiusa che ha come contorno una linea chiusa ℓ può essere considerata come la somma di due superfici S_1 ed S_2 che si appoggiano ad ℓ .

Se il flusso del vettore \vec{B} attraverso S_1 è positivo quello attraverso S_2 è negativo e viceversa.

Quindi la [^] diventa: $\Phi_S(\vec{B}) = \Phi_{S_1}(\vec{B}) - \Phi_{S_2}(\vec{B}) = 0$ $\Phi_{S_1}(\vec{B}) = \Phi_{S_2}(\vec{B})$ cioè:

Il flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie che si appoggia ad una linea chiusa dipende dalla forma della curva e non dalla superficie scelta.

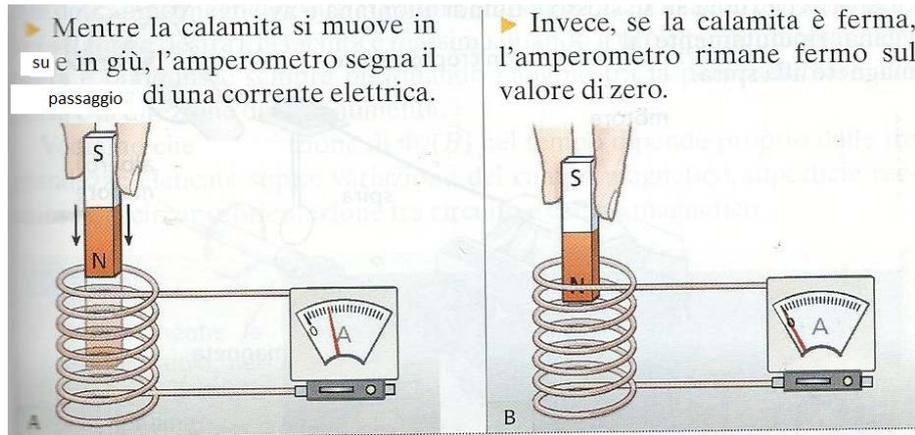
Si potrà quindi parlare di **flusso di \vec{B} concatenato** con una linea chiusa, intendendo con ciò il flusso di \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie S che ha la linea ℓ come contorno.



Induzione elettromagnetica

- **L'induzione elettromagnetica** è quel fenomeno scoperto da Faraday nel 1831 in base al quale una variazione nel tempo del flusso del vettore \vec{B} concatenato con un circuito genera in esso una **corrente indotta**. Flusso del vettore \vec{B} concatenato con un circuito significa flusso attraverso una qualsiasi superficie che ha come contorno il circuito.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile



Nel primo caso una variazione di flusso del vettore \vec{B} concatenato col circuito genera una corrente elettrica, nel secondo caso il flusso del vettore \vec{B} concatenato col circuito rimane costante e non c'è passaggio di corrente.

L'**induzione elettromagnetica** è governata da due leggi: la **legge di Faraday-Newman** e la **legge di Lenz**. La **legge di Faraday-Newman** afferma che la **f.e.m.** indotta è direttamente proporzionale alla variazione di flusso del vettore \vec{B} $[\Delta\Phi(\vec{B})]$ concatenato col circuito ed inversamente proporzionale al tempo Δt in cui tale variazione si verifica:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La **legge di Lenz** afferma che la corrente indotta $I = \frac{\varepsilon}{R}$ produce un campo magnetico che si oppone alla causa che ha generato la corrente stessa. Questo significa che se la f.e.m. indotta ε è generata da un **aumento (diminuzione)** del $\Phi(\vec{B})$ concatenato col circuito, la **corrente indotta \mathcal{J}** genera un campo magnetico indotto \vec{B}_i che fa **diminuire (aumentare)** il $\Phi(\vec{B})$.

Le due leggi scritte contemporaneamente assumono la forma:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = - \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = \frac{\Phi_i(\vec{B}) - \Phi_f(\vec{B})}{t_f - t_i} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

che rappresenta la legge di **Lenz-Faraday-Newmann**.

La corrente indotta I genera, a sua volta, un **campo elettrico** \vec{E}_i che **non è conservativo**.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

La variazione del flusso del vettore \vec{B} può essere ottenuto in diverse maniere.

1) variando le reciproche posizioni del circuito dove si genera la corrente indotta e di un magnete permanente (o di una elettrocalamita)

2) sostituendo il magnete con un circuito percorso da corrente elettrica.

Tutti i procedimenti possibili per ottenere **corrente indotta** si possono suddividere in due gruppi:

a) nel primo gruppo si ottiene **corrente indotta** in un circuito indotto muovendo l'induttore o l'indotto o entrambi

b) nel secondo, senza ricorrere ad alcun movimento, si varia il $\Phi(\vec{B})$ variando le correnti elettriche che generano il campo magnetico \vec{B} .

• Se il **circuito indotto** ha resistenza R abbiamo:
$$\mathcal{J} = \frac{\varepsilon}{R} = - \frac{\Delta \Phi(\vec{B})}{R \Delta t} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

mentre la quantità di elettricità indotta attraverso una sezione del circuito indotto è data da:

$$dq = i \cdot dt = -\frac{1}{R} \cdot d\Phi(\vec{B}) \quad q = \int_{t_1}^{t_2} i \cdot dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} d\Phi(\vec{B}) = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

Se la corrente indotta i attraversa un circuito costituito da N spire allora la **f.e.m. indotta** ε è

data da:
$$\varepsilon = -N \cdot \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{dN \cdot \Phi(\vec{B})}{dt} = -N \cdot \frac{\Delta \Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Origine fisica della forza elettromotrice indotta

Dopo le scoperte di Oersted, Ampère, Biot e Savart venne spontaneo ai fisici dell'epoca porsi la seguente domanda: <<**Se le correnti elettriche producono campi magnetici, è possibile che campi magnetici possano produrre campi elettrici?**>>

La risposta a tale domanda è **positiva** se si verificano certe condizioni. Nel 1831 Faraday dimostrò sperimentalmente che **un campo elettrico variabile produce un campo magnetico anch'esso variabile e viceversa**.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

La scoperta di Faraday è nota come **induzione elettromagnetica**. Affinché un circuito sia sede di una **corrente indotta** è necessario che il flusso del vettore \vec{B} concatenato col circuito sia variabile nel tempo. Tale flusso concatenato può variare per diversi motivi:

- 01)** quando c'è un moto relativo tra il circuito ed il magnete che crea il campo \vec{B}
- 02)** facendo variare l'intensità della corrente su un altro circuito
- 03)** deformando il circuito stesso
- 04)** immergendo il circuito in un campo magnetico variabile nel tempo.

Esaminiamo ora come si realizza una variazione di flusso nel tempo.

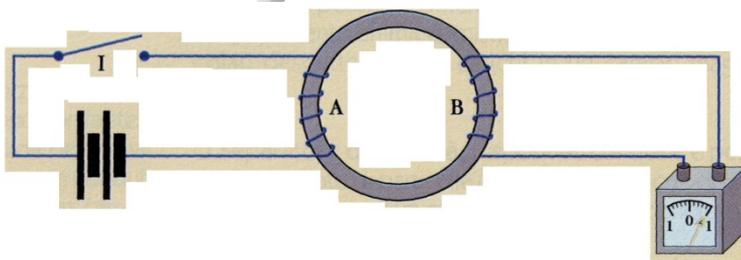
a) Consideriamo un **circuito indeformabile** che compie un moto rigido in una regione dove esiste un **campo magnetico \vec{B} costante** nel tempo. Se il moto è soltanto traslatorio ed il campo magnetico è uniforme non si ha variazione di flusso. Se il campo magnetico non è uniforme il flusso attraverso il circuito cambia al variare della posizione del circuito stesso ed in questo caso nasce una **f.e.m. indotta**. Quindi, a parte il caso di moto traslatorio in un campo magnetico uniforme, si ha sempre una **f.e.m. indotta** in un circuito indeformabile che si muova in un campo magnetico.

b) Una seconda possibilità è che il circuito venga deformato. Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica avviene sia in campo magnetico uniforme che in campo non uniforme.

c) Il flusso attraverso un circuito può cambiare nel tempo anche quando si mantiene il circuito fisso e si sposta la sorgente del campo magnetico. Si ha una **f.e.m. indotta** in tutti i casi eccettuato quello di moto traslatorio di un campo magnetico uniforme.

d) Si ha variazione di flusso attraverso il circuito se il campo magnetico varia nel tempo a causa della variazione nel tempo dell'intensità della corrente che lo genera.

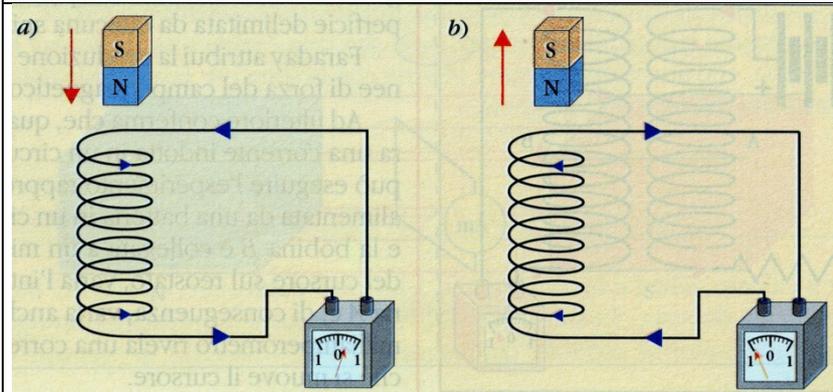
Prima esperienza di Faraday: **conduttore fermo**, campo magnetico variabile



Chiudendo o **aprendo** l'interruttore I del circuito che alimenta la bobina A, si produce una **corrente indotta** nella bobina B

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

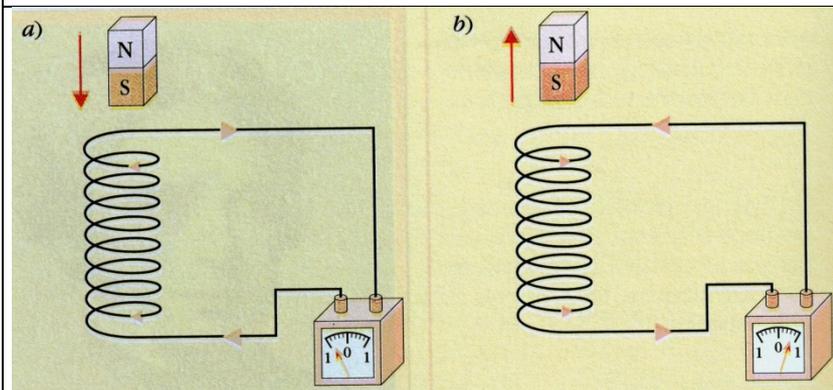
Seconda esperienza di Faraday: conduttore fermo, magnete in moto



a) Mentre si avvicina una calamita alla bobina si produce una **corrente indotta**

b) Allontanando la calamita si genera una **corrente indotta** di verso opposto

Seconda esperienza di Faraday: conduttore fermo, magnete in moto

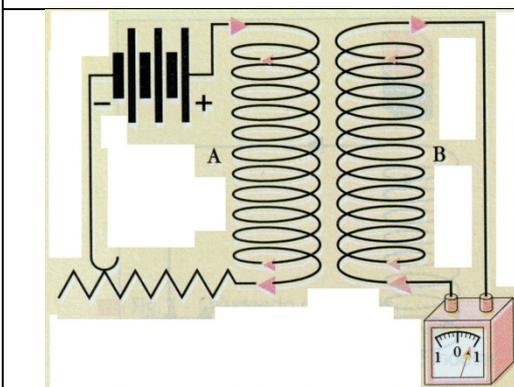


I versi delle correnti indotte sono l'opposto di quelli del circuito precedente, se si avvicina

(a) o si allontana

(b) il polo Sud di un magnete anziché il polo Nord

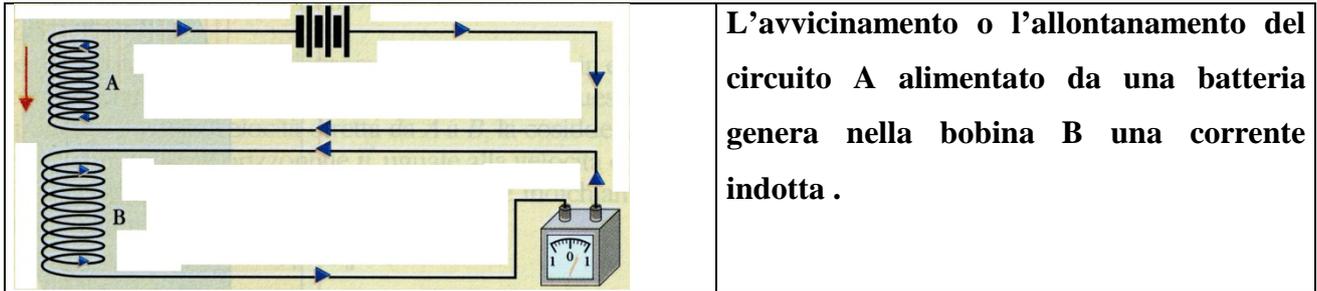
Il campo magnetico variabile è creato da una corrente elettrica variabile



Spostando il cursore sul reostato inserito nel circuito che alimenta la bobina A, si produce una corrente indotta nella bobina B

Moto relativo tra due circuiti

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

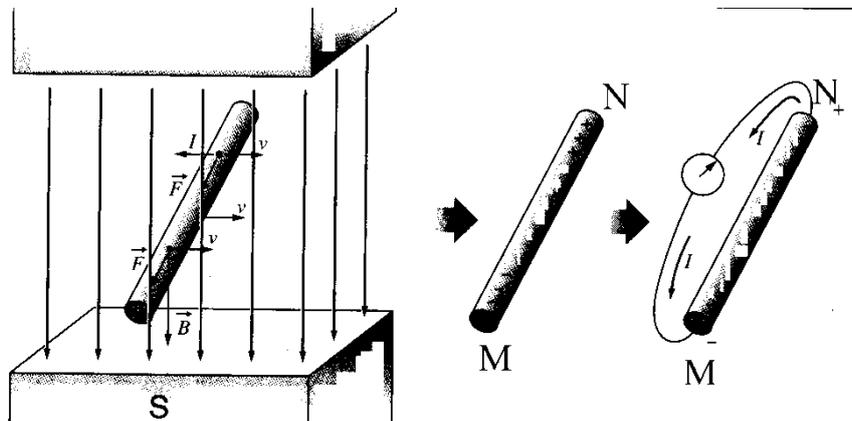


L'avvicinamento o l'allontanamento del circuito A alimentato da una batteria genera nella bobina B una corrente indotta.

Dimostriamo la **legge di Faraday-Newman** $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$

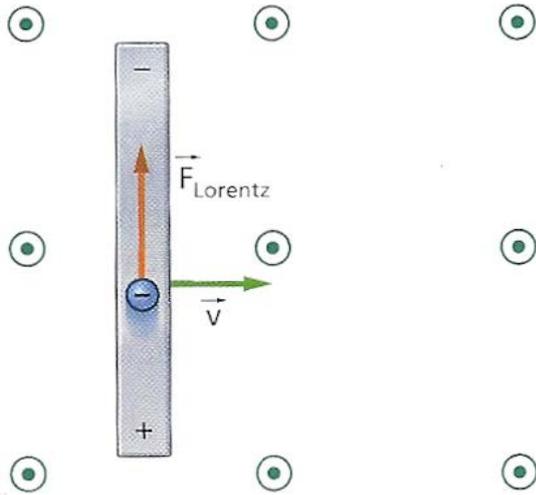
Da un punto di vista microscopico la legge di **Faraday-Newman** può essere spiegata come una conseguenza della **forza di Lorentz**. Un filo conduttore rettilineo, lungo ℓ , si muova perpendicolarmente ad un campo magnetico \vec{B} con velocità vettoriale \vec{v} .

Su ogni elettrone di conduzione agisce la **forza di Lorentz** $F = e v B$. Gli elettroni si spostano e, quindi, nel conduttore si creano eccessi di cariche positive e negative agli estremi finché il campo elettrico E che così si crea riesce ad equilibrare la forza magnetica: $e \cdot E = e \cdot v \cdot B$. Agli estremi del conduttore si è creata una **f.e.m.** indotta ε .

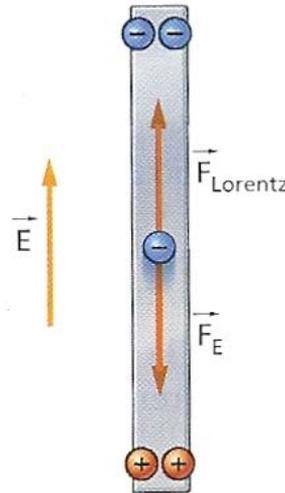


Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

► La forza di Lorentz agisce sugli elettroni di conduzione nella sbarra e li spinge verso l'alto, mentre in basso si accumula carica positiva.

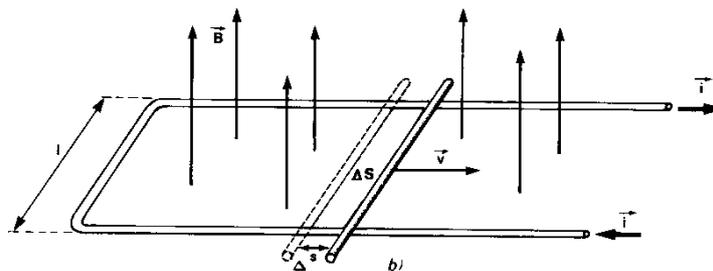


► La separazione delle cariche crea nella sbarra un campo elettrico che tende a spostare gli elettroni verso il basso.



Se il campo magnetico è uniforme e la sbarra continua a muoversi a velocità costante, tra i suoi estremi si genera una differenza di potenziale dovuta alle cariche positive e negative presenti ai suoi estremi. La differenza di potenziale rimane costante quando la forza elettrica uguaglia la forza magnetica di Lorentz. La situazione cambia se facciamo muovere la sbarra a contatto con un filo conduttore a forma di **U**, fermo nel campo magnetico.

Se ora disponiamo questo filo rettilineo in contatto sopra un filo conduttore piegato ad U, la f.e.m. indotta ϵ farà circolare una corrente indotta I . Consideriamo, adesso, un circuito rettangolare come quello indicato in figura dove il tratto di destra è costituito da una sbarretta conduttrice mobile di lunghezza ℓ e resistenza R . Tale circuito è posto in un campo magnetico \vec{B} uniforme e costante, ortogonale al piano contenente il circuito. Supponendo che la sbarretta MN si muova di moto traslatorio con velocità vettoriale \vec{v} perpendicolare il campo magnetico \vec{B} e nel verso indicato in figura, vogliamo calcolare la **f.e.m.** ϵ e la corrente I indotte nel circuito.



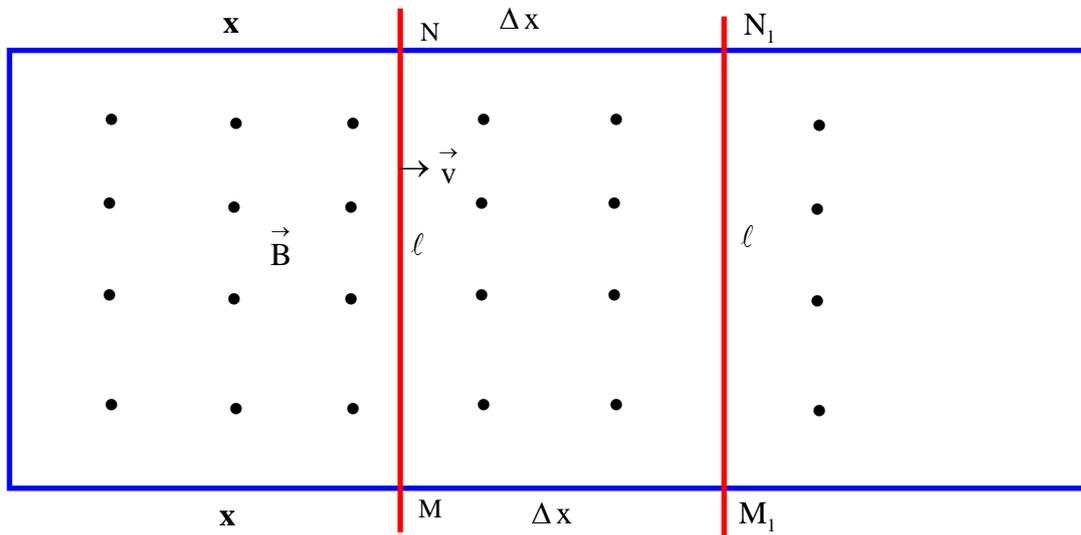
Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Su ogni elettrone di conduzione del tratto mobile agisce la forza di Lorentz. Detta q la carica complessiva degli elettroni di conduzione, la forza ($\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$) esercitata su di essa dal campo magnetico \vec{B} è: $F = qvB \cdot \sin \frac{\pi}{2} = qvB$. Quando la carica q passa dalla posizione **M** alla posizione **N** si compie su di essa un lavoro pari a: $L = F \cdot \ell = qvB\ell$.

Tale lavoro è la conseguenza della $f \cdot e \cdot m \cdot$ indotta (uguale alla $d \cdot d \cdot p \cdot$ esistente agli estremi del

conduttore mobile del circuito): $\varepsilon = \frac{L}{q} = \frac{F\ell}{q} = \frac{qvB\ell}{q} = vB\ell$

Quindi la f.e.m. indotta ε , che nel circuito privo di generatore determina la corrente indotta I , è data da: $\varepsilon = vB\ell$



La velocità \mathbf{v} posseduta dal tratto mobile del circuito può essere espressa come il rapporto tra lo spostamento Δx effettuato dalla sbarretta MN nella direzione di \vec{v} ed il tempo Δt impiegato:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} \quad \varepsilon = \frac{\mathbf{B} \ell \Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} \quad [1]$$

Il flusso del vettore \vec{B} attraverso la superficie S delimitata dal circuito quando il tratto mobile occupa la posizione MN, cioè il flusso di \vec{B} attraverso S all'istante iniziale $t_0 = 0$ vale:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{n} S = BS = B \cdot \ell \cdot x$$

Dopo Δt secondi, quando il tratto mobile occupa la posizione M_1N_1 , il flusso vale:

$$\Phi_{S_1}(\vec{B}) = B \cdot \ell \cdot (x + \Delta x) \quad \Delta \Phi = B \cdot \ell \cdot \Delta x \quad \text{La [1] diventa: } \varepsilon = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Questa relazione prende il nome di **legge di Faraday-Newman**, perché fu Faraday il primo a scoprire, nel 1831, l'esistenza delle correnti indotte e fu il tedesco **Franz Ernst Newman** a studiarne il comportamento traducendolo in termini matematici. E' necessario precisare che è sola la sbarretta MN che si muove nel campo magnetico, non tutta la spira.

Si può immaginare che la barretta sia poggiata su una guida orizzontale conduttrice a forma di U e che la spira si formi dal contatto tra la barretta e la guida metallica .

Questa legge , determinata matematicamente nel caso particolare del moto di una spira in un campo magnetico , ha una validità del tutto generale , nel senso che in qualunque circuito , immerso in un campo magnetico , ogni volta che il flusso $\Phi_s(\vec{B})$ del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito varia nel tempo, si genera una **f.e.m.** indotta data dalla relazione:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La legge di Lenz

Abbiamo visto che una variazione di flusso magnetico concatenato con un circuito genera in esso una corrente indotta **i** proporzionale alla variazione di flusso. Non è superfluo ricordare che la corrente indotta \mathcal{J} , a sua volta, genera un campo magnetico indotto \vec{B}_i , la cui intensità B_i è direttamente proporzionale alla corrente **i**. Nel 1834, appena tre anni dopo la formulazione della legge da parte di Faraday, il russo **Emilij Christianovic Lenz**, professore di Fisica a **Pietroburgo**, enunciò la seguente regola (nota come **legge di Lenz**) per stabilire la direzione della corrente indotta nella spira. <<**Il verso della corrente indotta **i** è tale che il suo effetto magnetico si oppone alla causa che ha generato la corrente indotta \mathcal{J}** >>

Con parole diverse possiamo dire che << **il verso della corrente indotta \mathcal{J} è tale da opporsi a mezzo del campo magnetico indotto \vec{B}_i da essa prodotto alla causa che ha determinato la corrente indotta \mathcal{J} , cioè alla variazione del flusso $\Phi_s(\vec{B})$ concatenato col circuito stesso**>> Inoltre il verso della **f.e.m.** indotta ε coincide col verso della corrente indotta \mathcal{J} . La causa che genera la corrente indotta \mathcal{J} può essere un movimento del circuito inducente oppure una variazione nel tempo della corrente **i** del circuito inducente. Queste due cause determinano, in ogni caso, una variazione di flusso magnetico concatenato col circuito.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

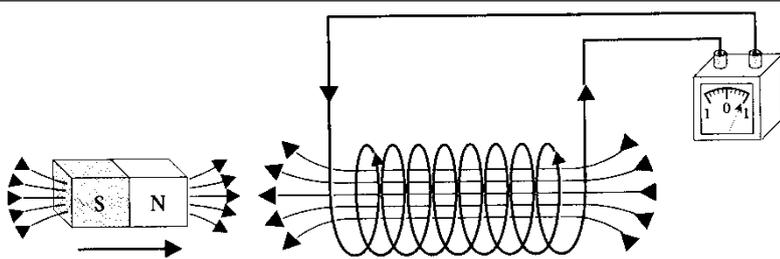
Per evidenziare che l'effetto della corrente indotta è quello di opporsi alla causa che ha generato il fenomeno, è opportuno introdurre un segno negativo davanti al valore della **f.e.m. indotta** e la legge di **legge di Faraday-Newman** dimostrata in precedenza diventa la **legge di Faraday-Newman-Lenz**: la $f \cdot e \cdot m \cdot$ indotta in un circuito da un campo magnetico è proporzionale alla velocità con cui varia il flusso magnetico concatenato col circuito e tende ad

opporsi a tale variazione:
$$\varepsilon = - \frac{\Delta \Phi(\vec{B})}{\Delta t} = - \frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La ε è una conferma del **principio di conservazione dell'energia**.

Infatti, se il segno della corrente indotta, non fosse quello attribuitole dalla legge di Lenz, dopo una spesa iniziale di energia per produrre una piccola variazione di flusso del campo magnetico, la corrente indotta invece di opporsi, alimenterebbe la variazione di flusso (e quindi se stessa), producendo continuamente energia elettrica senza spesa di altra forma di energia.

Avvicinamento del **polo NORD** di un magnete ad una bobina

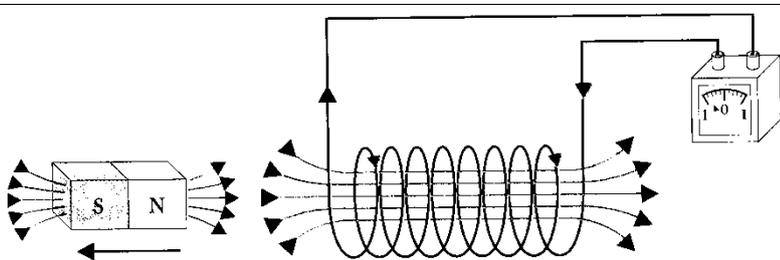


La calamita si avvicina

La bobina deve respingerla . Per fare ciò deve mostrare la faccia Nord. La corrente I che circola nella bobina è quella indicata in figura, che si ottiene applicando la regola della mano destra.

• Il flusso magnetico entrante aumenta; la corrente indotta \mathcal{J} crea un campo magnetico indotto \vec{B}_i che fa diminuire il numero delle linee di campo magnetico entranti.

Allontanamento del **polo Nord** di una calamita da una bobina



La calamita si allontana

La bobina deve attrarla . Per fare ciò deve mostrare la faccia SUD. La corrente I che circola nella bobina è quella indicata in figura , che si ottiene applicando la regola della mano destra.

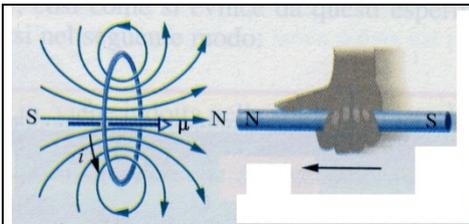
Il flusso magnetico entrante diminuisce; la **corrente indotta** \mathcal{J} crea un campo magnetico indotto \vec{B}_i che fa aumentare il numero delle linee di campo magnetico entranti.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Opposizione al movimento del magnete

Con l'avvicinamento del magnete il flusso magnetico concatenato con la spira aumenta e quindi nella spira circola una corrente indotta \mathcal{J} , che genera un campo magnetico \vec{B}_i che trasforma la spira in un dipolo magnetico (lamina magnetica con una faccia che rappresenta il polo NORD e l'altra faccia che rappresenta il polo SUD). \vec{B}_i è diretto dal polo Sud al polo NORD.

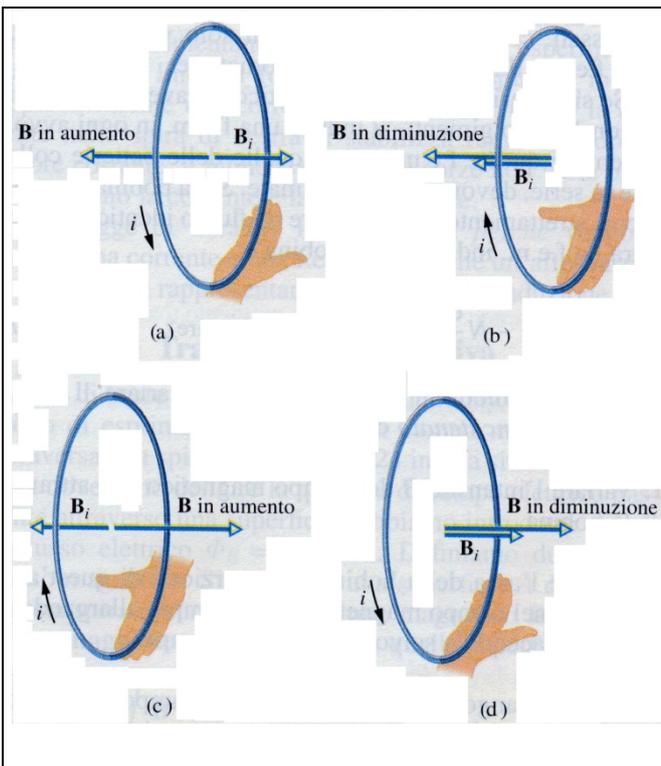
Per opporsi alla crescita del flusso magnetico concatenato con la spira e dovuto alla calamita, il polo **NORD** della spira deve essere diretto contro il polo **NORD** del magnete in avvicinamento, in modo da respingerlo. Se il magnete si allontana dalla spira si ha la seguente situazione: il polo SUD della spira deve essere diretto contro il polo **NORD** del magnete in allontanamento in modo da attrarli. Questa volta la corrente indotta I circola nella spira in senso orario.



Applicazione della legge di Lenz

Quando il magnete viene spinto verso la spira, si induce una corrente antioraria \mathcal{J} nella spira, generando in questo modo un campo magnetico \vec{B}_i che si oppone al moto del magnete.

Opposizione alla variazione di flusso



Il flusso del campo magnetico \vec{B}_i si oppone sempre alla variazione di flusso del campo magnetico \vec{B} concatenato con la spira, ma questo non significa che \vec{B}_i è sempre opposto a \vec{B} .

- a) il polo **NORD** del magnete si avvicina alla spira
- b) il polo **NORD** del magnete si allontana dalla spira
- c) il polo **SUD** del magnete si avvicina alla spira
- d) il polo **SUD** del magnete si allontana dalla spira

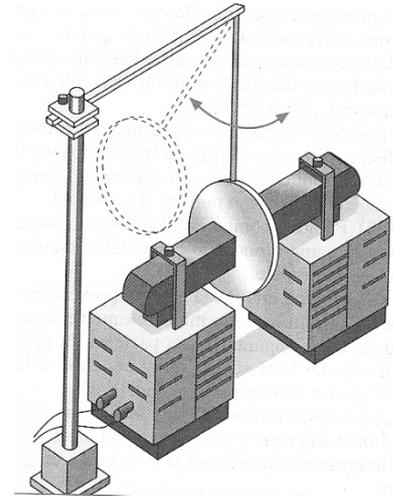
Le correnti di Foucault

Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica si manifesta non solo nelle spire e nelle bobine realizzate con fili conduttori di piccolo spessore, ma anche all'interno di conduttori massicci. Nel conduttori massicci, la cui resistenza è piuttosto piccola, le correnti indotte che si generano al loro interno sono particolarmente intense. Quando un conduttore esteso si muove in un campo magnetico, nel suo interno si producono delle correnti elettriche indotte, dette **correnti di Foucault** o **correnti parassite**. Nel moto relativo tra il campo magnetico e la piastra metallica si genera una variazione di flusso del campo magnetico concatenato con la piastra. Per la legge di **Faraday-Newman-Lenz** nascono, all'interno della piastra metallica delle correnti indotte che si oppongono alla causa che hanno generate. Gli elettroni di conduzione che circolano nella piastra dando vita alla corrente indotta non seguono un percorso forzato come nel caso del conduttore filiforme che costituisce la spira. Essi percorrono una traiettoria chiusa entro il materiale che costituisce la piastra, come se roteassero in una sorta di mulinello. Le correnti di Foucault sono messe in evidenza nel pendolo di **Walthenhofen**. Il pendolo di **Walthenhofen** è costituito da una piastra di rame posta all'estremità di un'asta, che viene fatta oscillare liberamente tra le espansioni polari di un'elettrocalamita. In assenza di campo magnetico (il circuito dell'elettrocalamita è aperto), il pendolo oscilla liberamente. Quando si chiude il circuito, l'elettromagnete entra in funzione e genera un campo magnetico il cui flusso attraverso la piastra di rame varia nel tempo a causa del moto pendolare. Nel rame del pendolo si generano delle correnti indotte che, interagendo con il campo magnetico, provocano una forza molto intensa che frena ed arresta quasi subito le oscillazioni del pendolo. La causa che genera le correnti indotte è l'oscillazione del pendolo; le correnti indotte debbono opporsi a tale causa e debbono generare un campo magnetico indotto che frena il movimento del pendolo.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

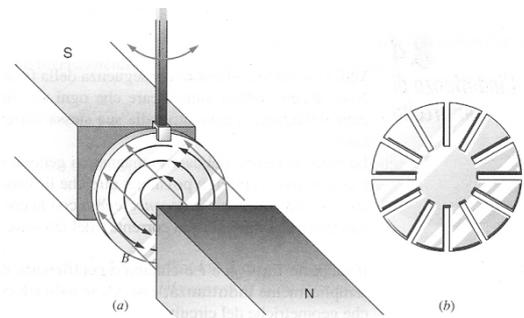
Pendolo di **Walthenhofen**

Le **correnti di Foucault** sono correnti indotte che si formano nei conduttori massicci sottoposti ad un campo magnetico variabile. L'esistenza di queste correnti viene messa in evidenza col **pendolo Walthenhofen**. Si faccia oscillare tra i poli di una elettrocalamita una piastra di rame. Quando si eccita l'elettrocalamita la piastra si arresta come se fosse bruscamente frenata. Il fenomeno si spiega osservando che nella piastra di rame si formano delle **correnti indotte** che, per la **legge di Lenz**, tendono ad opporsi al movimento che le genera, e quindi frenano la piastra. Si osserva un notevole riscaldamento della piastra dovuto alla perdita di energia cinetica che si trasforma in calore per effetto Joule.



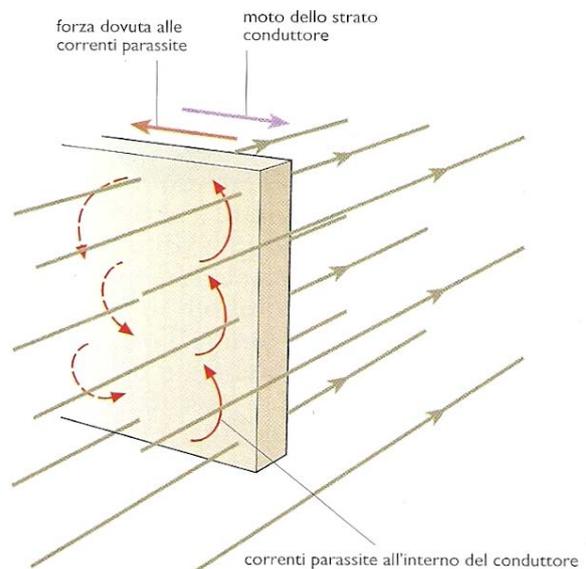
(a) Correnti di Foucault capaci di frenare le oscillazioni di un disco di rame. Durante il moto oscillatorio, a causa della circolazione delle correnti indotte, l'energia meccanica della piastra si dissipa per effetto Joule, convertendosi in energia interna e producendo un riscaldamento della piastra.

(b) Il pendolo continua ad oscillare se è costituito da un disco con tagli in direzione radiale, cioè perpendicolari alle correnti di Foucault, che impediscono a queste di circolare.



In una piastra conduttrice, come in un filo conduttore, si crea una corrente indotta se essa si muove rispetto alle linee del campo magnetico. Queste correnti sono dette parassite o di Foucault.

La direzione ed il verso delle correnti parassite sono tali da produrre una forza che si oppone al moto del conduttore.



Conclusione

Da quanto abbiamo dimostrato siamo portati alle seguenti conclusioni. Quando un elemento di materiale conduttore si muove in un campo magnetico fisso al suo interno avviene una separazione di cariche dovuta al **campo elettromotore** che **ha origine nella forza di Lorentz**. Se i singoli elementi formano un circuito chiuso questo diventa sede di una **f.e.m.** indotta ε che di norma è diversa da zero ed in esso circola una corrente indotta \mathcal{J} data da:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{\Phi_i(\vec{B}) - \Phi_f(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

cioè la **f.e.m.** indotta ε è uguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso magnetico concatenato col circuito. Nei casi considerati il **fenomeno dell'induzione elettromagnetica viene ricondotta alla forza di Lorentz ed alla conservazione dell'energia**.

Passiamo ora a considerare la seconda causa di induzione elettromagnetica e cioè la variazione del campo magnetico vista da un circuito fisso. Essendo nulla la velocità degli elementi di circuito sugli elettroni ora non agisce la **forza di Lorentz** $\vec{F} = -e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$. Poiché la forza che agisce una carica elettrica è data, in generale, da $\vec{F} = -e \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, la presenza della **f.e.m.** indotta si spiega con la presenza di un campo elettrico \vec{E} : dobbiamo cioè supporre che in una regione in cui il campo magnetico varia nel tempo venga indotto un campo elettrico.

Il legame locale tra la variazione nel tempo del campo magnetico e del campo elettrico indotto è

$$\text{dato dalla relazione : } \mathbf{C}_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{\Delta t} = \varepsilon$$

Riassumendo, la legge generale dell'induzione elettromagnetica espressa dalla relazione

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{\Phi_i(\vec{B}) - \Phi_f(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

si applica a tutte le situazioni in cui una linea chiusa sia interessata da una variazione di flusso magnetico concatenato. Localmente, il campo elettrico da cui calcoliamo la **f.e.m.** indotta può essere dovuto al moto in campo magnetico oppure alla variazione temporale del campo magnetico : questo secondo fenomeno è un fatto assolutamente nuovo che si aggiunge alle proprietà dei campi studiate fino ad ora.

Induttanza di un circuito ed autoinduzione elettromagnetica

L'**autoinduzione** è quel fenomeno per cui in un circuito elettrico, ad ogni variazione di corrente elettrica e quindi di flusso magnetico concatenato con esso, si produce una **f.e.m.** indotta ε_i che si oppone alla variazione di flusso magnetico che l'ha generata. Un circuito indeformabile percorso dalla corrente i genera nello spazio circostante un campo magnetico \vec{B} le cui linee di campo (che sono sempre linee chiuse) sono concatenate col circuito stesso. Se la corrente i che percorre il circuito varia col passare del tempo, varia l'**autoflusso** $\Phi(\vec{B})$ concatenato col circuito, dando luogo, in base alla legge di **Faraday-Newmann-Lenz** ad una **f.e.m.** autoindotta ε_i che genera, a sua volta, la corrente autoindotta \mathcal{J} . \mathcal{J} ha **stesso verso (verso opposto)** di i se i **diminuisce (aumenta)**. Se il circuito è indeformabile e la permeabilità magnetica relativa μ_r del mezzo in cui è immerso è costante, l'**autoflusso** $\Phi(\vec{B})$ è proporzionale ad i : $\Phi(\vec{B}) = L \cdot i$

dove L è una **costante** caratteristica del circuito (che dipende dalla forma geometrica del circuito e dalla permeabilità magnetica relativa del mezzo in cui esso è immerso) che si chiama **induttanza** o **coefficiente di autoinduzione** del circuito.

Nel S.I. l' **induttanza** si misura in **henry** che è l'induttanza di un circuito in cui la corrente di

un ampere produce il flusso di un weber: $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$

Nel caso di un **solenoid** abbiamo: $L = \mu \frac{N^2 \cdot S}{l} = \mu \cdot n^2 \cdot l \cdot S$ con $n = \frac{N}{l}$

N = **numero di spire del solenoide**, l = **lunghezza del solenoide** ,

S = **area del solenoide**

μ = **permeabilità magnetica** della sostanza posta all'interno del solenoide

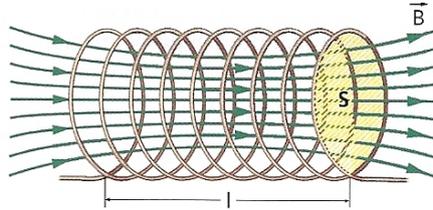
- Un **elettromagnete** o **elettrocalamita** è un magnete artificiale che si ottiene grazie al campo magnetico generato da una corrente. Esso è, generale, utilizzato per ottenere azioni meccaniche a distanza.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

L'induttanza di un solenoide

Consideriamo un solenoide di lunghezza ℓ e composto da N spire di area S , posto nel vuoto. Il

campo magnetico \vec{B} all'interno del solenoide vale: $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \frac{Ni}{\ell}$



ed è perpendicolare a ciascuna spira. La superficie attraverso cui si calcola il flusso $\Phi(\vec{B})$ del

vettore \vec{B} è N volte l'area S di una spira. Otteniamo: $\Phi(\vec{B}) = NBS = N\mu_0 \frac{Ni}{\ell} S = \mu_0 \frac{N^2 i}{\ell} S$

Sapendo che $\Phi(\vec{B}) = Li$ possiamo calcolare l'induttanza L del solenoide, che vale:

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

Circuito, in corrente continua, con induttanza e resistenza: circuiti RL

Extracorrente di chiusura e apertura di un circuito elettrico

Quando ad un circuito applichiamo una **f.e.m.** esterna ε_o , in esso si produce una variazione di corrente i^1 , per cui nel circuito si genera una **f.e.m.** ε **autoindotta** che tende ad opporsi alla causa che l'ha determinata. La corrente raggiungerà, di conseguenza, il suo **valore finale** o di **regime** dopo un certo intervallo di tempo. (**extracorrente di chiusura**). In modo analogo, una corrente stazionaria non può annullarsi istantaneamente, per esempio quando si apre un interruttore e si interrompe il flusso di corrente (**extracorrente di apertura**). Analizziamo meglio questo fenomeno. Qualunque circuito presenta una certa induttanza ed una certa resistenza al passaggio della corrente elettrica. Quando il circuito è alimentato mediante una tensione continua (ad esempio da una **f.e.m.** ε_o), l'effetto dell'autoinduzione si manifesta solamente nel momento della chiusura e dell'apertura del circuito, cioè quando la corrente comincia a circolare o finisce di circolare.

¹ Che va dal valore iniziale zero al valore finale o di regime i_o

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

In regime stazionario (cioè quando la corrente elettrica i si mantiene costante nel tempo) non si manifesta alcun effetto di autoinduzione ($\frac{di}{dt} = 0$)

Per analizzare l'effetto dovuto all'**autoinduzione** è utile schematizzare il circuito come formato da una bobina, in cui si pensano concentrati tutti gli effetti di autoinduzione distribuiti lungo il circuito, con in serie un resistore in cui si pensa concentrata la resistenza R distribuita lungo il circuito. Si ottiene il cosiddetto circuito **LR (induttanza-resistenza)** in serie, schematizzato in figura. Quando l'interruttore S viene chiuso, l'aumento della corrente, dal valore iniziale nullo al valore di regime previsto dalla legge di Ohm ($i = \frac{E}{R}$), è contrastata dalla forza elettromotrice indotta ε e la corrente impiega un tempo apprezzabile a raggiungere il valore di regime i_o .

All'istante t la corrente nel circuito è i , la **f.e.m.** indotta è $-L\frac{di}{dt}$ e quindi la **f.e.m.** totale nel circuito è $\varepsilon - L\frac{di}{dt}$. Per il secondo **principio di Kirchhoff** possiamo scrivere:

$$\varepsilon - L \cdot \frac{di}{dt} = Ri \quad [*]$$

che rappresenta l'equazione del circuito [§] e la cui soluzione ci fornisce la relazione che lega l'intensità di corrente al tempo. Nel caso di **chiusura del circuito** si può dimostrare che

l'integrale generale dell'equazione differenziale [*] assume la forma: $i = \frac{\varepsilon_o}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = i_o \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$

La differenza tra i e i_o prende il nome di **extracorrente di chiusura** e rappresenta la

corrente generata dalla **f.e.m.** indotta. Essa vale: $i_c = i - i_o = -\frac{\varepsilon_o}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ [**]

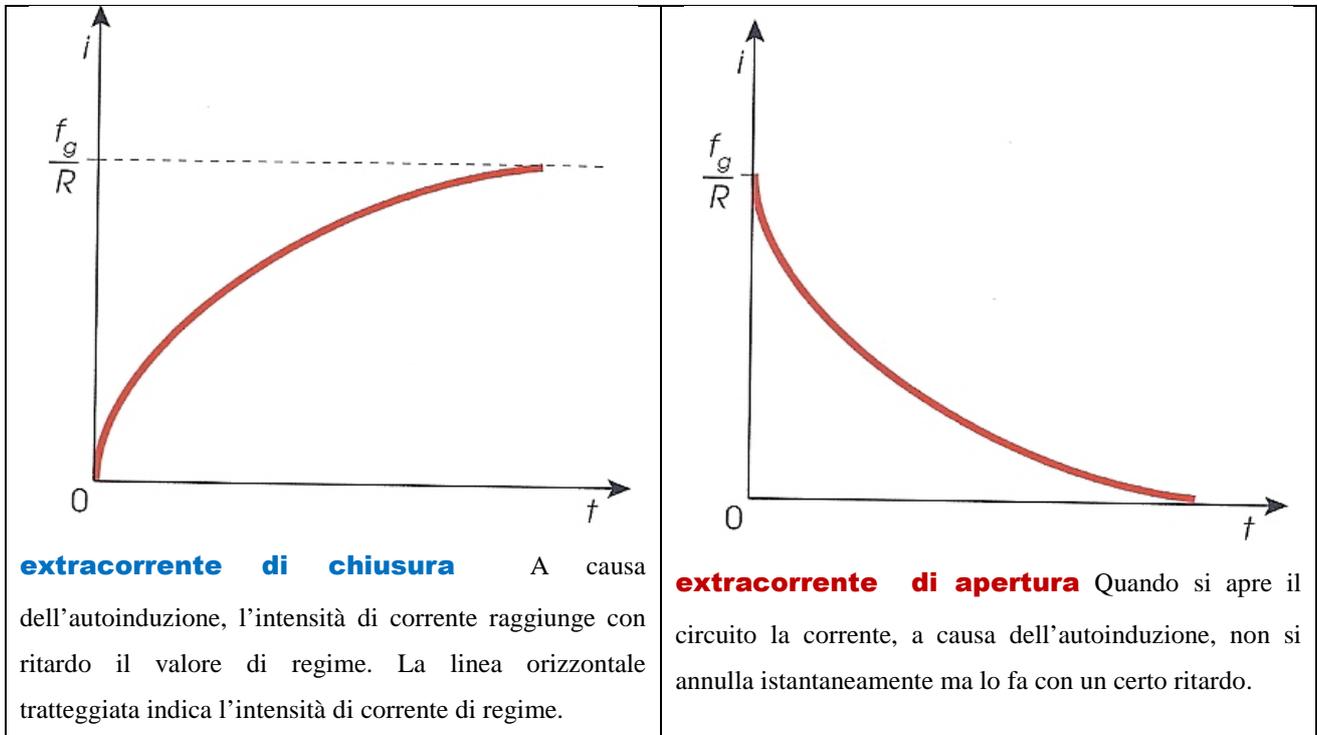
Il valore negativo di i_c sta a significare che l'extracorrente di chiusura è di verso opposto alla corrente i che attraversa il circuito. Nel caso in cui la corrente abbia raggiunto il suo valore di regime $i_o = \frac{E}{R}$ quando si apre il circuito, essendo $\varepsilon = 0$ l'equazione [*] del circuito diventa:

$$-L \cdot \frac{di}{dt} = Ri \quad \text{ed ha come soluzione} \quad i_a = \frac{\varepsilon}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad [***]$$

[§] si tratta di una equazione differenziale del primo ordine la cui soluzione prende il nome di integrale generale dell'equazione differenziale proposta .

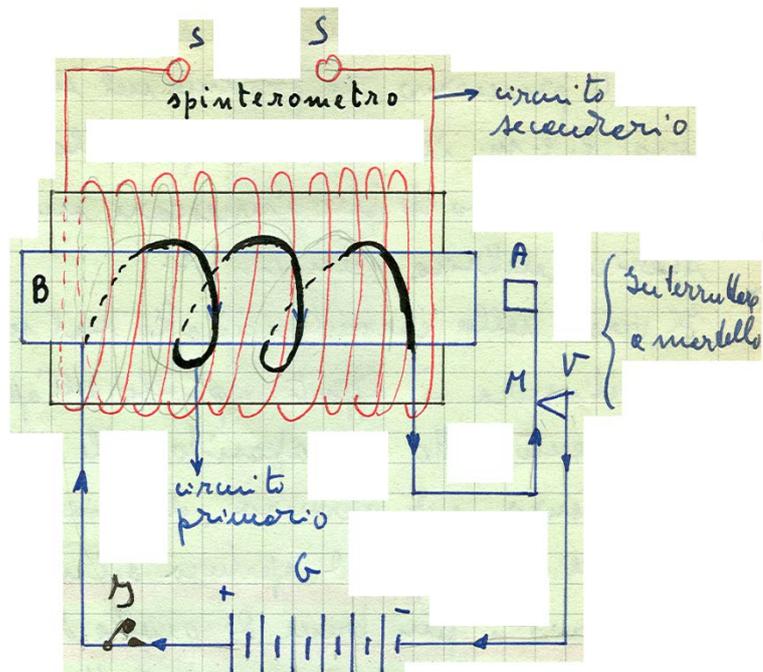
Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Dalla [***], essendo $i_a > 0$, si deduce che l'**extracorrente di apertura** ha lo stesso verso della corrente i che circolava nel circuito e quindi si somma ad essa. La corrente che continua a circolare, dovuta alla **f.e.m.** indotta, è detta **extracorrente di apertura** (i_a).



Rocchetto di Ruhmkorff

Il rocchetto di **Ruhmkorff** o **rocchetto di induzione** è un dispositivo ideato dal fisico tedesco **Ruhmkorff** nel 1864 per ottenere d.d.p. molto elevate. In alcuni tipi, grazie a particolari accorgimenti, si possono raggiungere valori addirittura superiori a **40.000 V**. Il rocchetto di **Ruhmkorff** si riduce sostanzialmente al caso dell'esperienza sulle correnti indotte di apertura e di chiusura, con la sola differenza che l'apertura e la chiusura avvengono in modo automatico.



Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Il **rocchetto di Ruhmkorff** è essenzialmente costituito dalle seguenti parti :

a) Un **circuito primario** con un generatore **G** ed un solenoide formato da qualche centinaio di spire di filo di rame grosso di qualche millimetro di diametro ed avvolto attorno ad un nucleo di ferro dolce ; generalmente il nucleo non è compatto , ma costituito da tante lamine separate da vernice isolante , in modo da ridurre l'effetto delle **correnti di Foucault**.

b) Un **interruttore automatico** a martello costituito da un'asta flessibile **M** , che termina superiormente con un'ancora di ferro dolce **A** e da una vite **V**, la quale, quando il **circuito primario è chiuso**, tocca con la punta l'asta flessibile **M**.

c) Un **circuito secondario** costituito da qualche migliaio di spire di filo più sottile di qualche decimo di **mm** di diametro avvolte intorno ad un nucleo molto più grande del primo .

Le estremità del circuito secondario sono collegate con due sferette **S** , oppure con due punte, le quali costituiscono lo **spinterometro**.

Il **rocchetto di Ruhmkorff** funziona così: il **circuito primario**, alimentato dal generatore **G**, è attraversato da una intensa corrente che magnetizza il nucleo **B** il quale attira l'ancora **A** ed apre il circuito **V**. Di conseguenza il nucleo **B** si smagnetizza e l'ancora **A**, per la reazione elastica dell'asta **M**, si stacca dal nucleo e torna nella sua posizione di riposo. La punta della vite **V** torna così a toccare l'asta **M** ed il circuito primario si richiude . In tal modo il fenomeno si ripete continuamente.

Ogni volta che si chiude o si apre il **circuito primario**, si produce nel secondario una **f.e.m.** indotta ai capi dello spinterometro che può innescare una scarica elettrica ben visibile. Il verso della corrente indotta nel secondario alla chiusura è opposto a quello dell'apertura. Per quanto detto a proposito delle **extracorrenti di chiusura e di apertura**, dobbiamo tenere presente che la **fase di apertura del circuito primario è più breve di quella di chiusura**.

Di conseguenza la **f.e.m.** indotta nel secondario è molto più grande in corrispondenza dell'apertura che della chiusura del primario. Nel rocchetto di **Ruhmkorff**, inserito in parallelo all'interruttore, troviamo il condensatore **C**. Esso ha una duplice funzione: **1)** evita le scintille che si formano sull'interruttore all'apertura del primario **2)** fa aumentare la **f.e.m.** nel secondario durante l'apertura del primario.

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

A metà del diciannovesimo secolo si possono considerare ben definiti i seguenti principi fondamentali, che noi abbiamo studiato nelle unità didattiche precedenti.

(1) L'esistenza della carica positiva e di quella negativa e della forza di Coulomb tra le cariche elettriche. Queste ultime sono riconosciute come sorgenti di un campo elettrico, di verso uscente dalle cariche positive ed entrante in quelle negative.

(2) Le cariche in movimento, ossia le correnti elettriche, sono riconosciute come sorgenti di un campo magnetico. L'interazione fra campo magnetico e correnti è descritta dalla legge di Ampere.

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \mathbf{i}$$

(3) Le linee del campo magnetico sono chiuse, non hanno un inizio o una fine. In altre parole, non esistono monopoli magnetici, ma solo dipoli **nord-sud**.

(4) Un campo elettrico può essere prodotto da un campo magnetico variabile, come espresso dalla

legge di induzione di Faraday.
$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{\Phi_f(\vec{B}) - \Phi_i(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{\Phi_i(\vec{B}) - \Phi_f(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Nel **1873** Maxwell dimostrò che tutte le proprietà dell'elettricità, del magnetismo e dell'elettromagnetismo possono essere spiegate utilizzando soltanto quattro equazioni dette equazioni di Maxwell. Nella tabella sono elencate le formule che le rappresentano sia per i campi elettrici e magnetici costanti nel tempo, sia per i campi elettrici e magnetici variabili nel tempo.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto	
Campi elettrici e magnetici costanti nel tempo	Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo
$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$ Legge di Gauss	$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$ Legge di Gauss
$\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$ teorema di Gauss per il magnetismo	$\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$ teorema di Gauss per il magnetismo
$C_{l.c.}(\vec{E}) = 0$ La circuitalità del campo elettrico lungo un percorso chiuso è nulla	$C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{\Phi_i(\vec{B}) - \Phi_f(\vec{B})}{t_f - t_i} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ La circuitalità del campo elettrico lungo un percorso chiuso è uguale al rapporto tra la variazione $\Delta\Phi(\vec{B})$ del flusso e il tempo Δt

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

$\mathbf{C}_{l.c.}(\vec{\mathbf{B}}) = \mu_0 \mathbf{i}$ <p>Legge di Ampere</p>	$\mathbf{C}_{l.c.}(\vec{\mathbf{B}}) = \mu_0 \left(\mathbf{i} + \epsilon_0 \frac{\Delta \Phi(\vec{\mathbf{E}})}{\Delta t} \right) \text{ dove}$ $\mathbf{i}_s = \epsilon_0 \frac{\Delta \Phi(\vec{\mathbf{E}})}{\Delta t}$
--	---

Nel caso statico vi sono due equazioni che descrivono il comportamento del campo elettrico e altre due che regolano i fenomeni magnetici. Nel caso generale, invece, nella terza e quarta equazione compaiono entrambi i campi $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$. Ciò implica che non è più possibile studiare uno dei due in modo isolato, ignorando l'altro. Si capisce che essi sono due aspetti diversi di un unico ente fisico: il campo elettromagnetico. Il campo elettrostatico e il campo magnetico statico sono casi particolari del campo elettromagnetico e si ottengono, rispettivamente se si hanno cariche ferme e correnti elettriche continue.

Le proprietà locali dei campi elettrici e magnetici costanti nel tempo, che abbiamo studiato nei capitoli precedenti, sono descritte nel vuoto dalle quattro equazioni di Maxwell:

Prima equazione di Maxwell

La prima equazione di Maxwell è una conseguenza della legge di Coulomb dell'elettrostatica, ma è formulata più convenientemente in termini della **legge di Gauss**:
$$\Phi_{s.c.}(\vec{\mathbf{E}}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$$

Il flusso del campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie diviso la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 .

Nella legge di Gauss è implicito che tutte le linee di un campo elettrico debbono iniziare e terminare su cariche elettriche. Per convenzione queste linee sono scelte con **inizio su cariche positive** e **termine su cariche negative**. Le cariche elettriche sono i **poli** del campo elettrico.

Seconda equazione di Maxwell

La seconda equazione di Maxwell mette in evidenza la differenza essenziale tra le linee del campo magnetico e le linee del campo elettrico. Le **linee del campo magnetico**, che sono dovute a correnti elettriche, non partono o si fermano nello spazio ma formano delle linee continue chiuse. Le **linee del campo magnetico** si chiudono sempre su se stesse perché non esiste l'equivalente magnetico di una carica elettrica isolata; **non esistono monopoli magnetici**. La seconda legge di Maxwell si identifica con la **legge di Gauss per il magnetismo** la quale afferma

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

quanto segue: Il **flusso del campo magnetico** \vec{B} **attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.** $\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$

Terza equazione di Maxwell

La terza equazione di Maxwell stabilisce semplicemente che un campo magnetico \vec{B} variabile nel tempo genera nello spazio circostante un campo elettrico \vec{E} . Essa si identifica con la **legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Newmann-Lenz** la quale stabilisce che un flusso magnetico variabile nel tempo genera una *f.e.m.* indotta.

In simboli abbiamo:

$$C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{\Delta t} = \varepsilon$$

la circuitazione del campo elettrico lungo un circuito è uguale al rapporto, cambiato di segno, tra la variazione del flusso del campo magnetico \vec{B} concatenato col circuito e l'intervallo di tempo in cui è avvenuta tale variazione.

Quarta equazione di Maxwell

La quarta equazione di Maxwell si basa sulla **legge della circuitazione** di Ampere espressa

dalla relazione

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k$$

Abbiamo scritto le equazioni fondamentali di Maxwell per il **campo elettromagnetico**.

Queste quattro equazioni, insieme con le due equazioni che forniscono le definizioni operative dei campi elettrico e magnetico, ci permettono di risolvere tutti i problemi dell'elettromagnetismo.

Abbiamo già introdotto queste due equazioni:

$$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{e}$$

$$\vec{f}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Esse ci dicono semplicemente che si può ottenere l'intensità del campo elettrico \vec{E} e del campo magnetico \vec{B} misurando la forza che questi campi esercitano rispettivamente su una carica q in quiete o in moto con velocità \vec{v} . **Il campo elettrostatico** \vec{E} , **conservativo**, è generato dalle **cariche elettriche fisse** ed il **campo magnetico statico** \vec{B} , **non conservativo**, è generato dalle **cariche elettriche in moto stazionario**. A parte questo fatto che le sorgenti dei campi statici sono sempre le cariche elettriche, non esiste in un dato sistema di riferimento inerziale nessun'altra connessione tra i fenomeni elettrici e magnetici statici e le relative coppie di equazioni possono essere risolte separatamente. Esperimenti condotti da Faraday in Inghilterra e indipendentemente da Henry negli Stati Uniti misero in evidenza una diversa connessione tra elettricità e magnetismo: un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo che in opportuni dispositivi può dare luogo ad una forza

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

elettromotrice e ad una corrente in un circuito chiuso. Un fenomeno analogo si ottiene in casi di moto relativo tra un circuito ed un campo magnetico costante. Successivamente Maxwell dimostrò che per rendere compatibili le equazioni dei fenomeni variabili con la legge di conservazione della carica nella sua forma più generale occorre postulare che un campo elettrico variabile nel tempo desse origine ad un campo magnetico. Maxwell arrivò così ad una forma più generale delle equazioni che regolano i fenomeni elettrici e magnetici variabili, la quale contiene le formule scritte in precedenza come caso limite per fenomeni statici.

Quando generalizziamo la legge della circuitazione di Ampere considerando sia le correnti reali che le correnti di spostamento otteniamo la **quarta equazione di Maxwell** che, in termini matematici, assume la forma:

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t} \quad [*]$$

La circuitazione del campo magnetico \vec{B} lungo un percorso chiuso è uguale al prodotto della permeabilità magnetica del vuoto μ_0 per la somma della corrente effettiva e di quella di spostamento. Questa è la quarta equazione di Maxwell, basata sulla sua brillante intuizione che un campo magnetico può essere generato non solo da una corrente elettrica ordinaria ma anche da un campo elettrico variabile. Fu questo il passo cruciale necessario per introdurre la simmetria fra i campi elettrico e magnetico rendendo così completa la **teoria elettromagnetica**. La grande utilità della **corrente di spostamento di Maxwell** sta nel fatto che essa ci aiuta sia a prevedere che a capire la propagazione delle onde elettromagnetiche nello spazio. **Caratteristica fondamentale è che un campo elettrico ed un campo magnetico variabili non possono esistere separatamente, ma vanno riuniti sotto il concetto più generale di campo elettromagnetico. Inoltre la soluzione delle equazioni di Maxwell prevede che il campo elettromagnetico possa propagarsi con velocità che risulta uguale a quella della luce: quest'ultima viene pertanto identificata come un fenomeno elettromagnetico rapidamente variabile.**

Se guardiamo attentamente il secondo addendo dell'equazione $C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$,

notiamo che il termine $\epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ deve avere le dimensioni di una corrente. Anche se non vi è

alcun moto di cariche e quindi l'appellativo non ha apparente giustificazione, è vantaggioso dare a questo termine il nome storico di corrente di spostamento ed indicarlo col simbolo i_s .

Unità Didattica N° 29: Campo magnetico variabile

Cioè:
$$i_s = \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt}$$
 (corrente di spostamento)

Si può dire che un campo magnetico può essere generato sia da una corrente di conduzione i sia da una corrente di spostamento i_s e possiamo scrivere l'equazione [*] come:

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^n i_k + \mu_o \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt} = \mu_o \left(\sum_{k=1}^n i_k + \varepsilon_o \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt} \right) = \mu_o (i_{l.c.} + \varepsilon_o \cdot i_{s,l.c.})$$

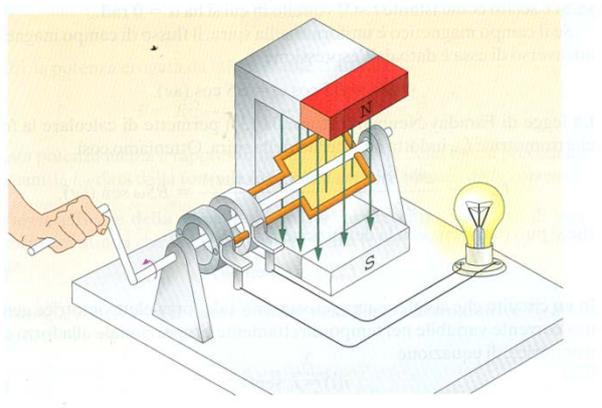
(Legge di Ampère-Maxwell)

In cui $i_{s,l.c.}$ è la **corrente di spostamento** racchiusa entro la linea della circuitazione. Si riprende l'idea della continuità della corrente (**corrente di conduzione + corrente di spostamento**). **La corrente di spostamento implica un campo elettrico variabile e non un trasporto di carica.**

L'alternatore

L'alternatore è un dispositivo che trasforma energia cinetica in energia elettrica.

In linea di principio un **alternatore** è costituito da una spira che viene fatta ruotare con velocità angolare costante all'interno di un campo magnetico. La diversa orientazione della spira rispetto alle linee del campo magnetico \vec{B} fa sì che il flusso magnetico vari continuamente generando una corrente indotta.



Alternatore è un qualsiasi dispositivo capace di creare una **corrente alternata**, cioè **una corrente che varia nel tempo sinusoidalmente**. Il più semplice alternatore risulta costituito da:

- 1) una **calamita** NS (detta **induttore**) capace di creare un campo magnetico \vec{B} uniforme
- 2) una **spira** (detta **indotto**), ad esempio rettangolare, di area S ruotante attorno ad un asse perpendicolare a \vec{B} . Gli estremi della spira sono saldati a due anelli isolati tra loro e sui quali strisciano le spazzole M_1 ed M_2 . A questa parte del dispositivo si dà il nome di **collettore di corrente**.
- 3) Un circuito esterno collega le spazzole M_1 ed M_2 e che contiene un galvanometro G che ci servirà a stabilire se nel circuito passa corrente. Una volta orientata la normale alla spira mediante il versore \vec{n} , il flusso del campo magnetico \vec{B} concatenato con la spira vale:

$$\Phi_s(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = S \cdot \vec{B} \cdot \cos \vartheta = S \cdot B \cdot \cos \omega t \quad \omega = \frac{\vartheta}{t} \quad \vartheta = \omega t$$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \Phi_s(\vec{B}) = 0$ cioè il flusso è nullo quando la spira è parallela alle linee del campo magnetico \vec{B} , cioè quando il versore \vec{n} è parallelo ed equiverso col campo magnetico \vec{B} .

$$\vartheta = 0 \Rightarrow \Phi_s(\vec{B}) = \text{massimo} \quad \vartheta = \pi \Rightarrow \Phi_s(\vec{B}) = \text{minimo}$$

Seguendo il movimento della spira il flusso del campo magnetico \vec{B} concatenato con la spira varia secondo le seguenti modalità: **(a)** all'inizio è **massimo** **(b)** è uguale a **zero** a 90° **(c)** diventa **minimo** a 180° , dove il flusso è negativo **(d)** si **annulla** di nuovo a 270° **(e)** torna **massimo** a

360° nella posizione di partenza. L'alternatore genera una **tensione alternata**, che cambia continuamente valore, ma si ripete sempre uguale dopo un periodo **T**, che il tempo impiegato dalla spira a fare un giro completo.

Calcolo della forza elettromotrice alternata

Facciamo ruotare la spira di moto rotatorio uniforme attorno al suo asse con velocità angolare ω costante. Supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ la spira sia ortogonale al campo \vec{B} e che \vec{n} sia parallela ed equiversa con \vec{B} . Risulta: $\vartheta = \omega t$ per cui possiamo scrivere:

$$\Phi_s(\vec{B}) = \vec{B} \times \vec{S} \cdot \vec{n} = S \cdot B \cdot \cos \vartheta = S \cdot B \cdot \cos \omega t$$

Tale relazione mostra che il flusso concatenato con la spira varia nel tempo, così che agli estremi della spira stessa, per la legge di Faraday-Newmann-Lenz, si genera una **f.e.m. indotta**, data da:

$$f_{em} = - \frac{d\Phi}{dt} = SB\omega \sin \omega t = SB\omega \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = f_o \cdot \sin \omega t \quad f_o = SB\omega$$

cioè la **f.e.m.** che si genera ai capi del circuito varia nel tempo con legge sinusoidale ed è sfasata di $\pi/2$ rispetto al flusso magnetico. $f_{max} = f_o \Rightarrow \sin \omega t = 1 \Rightarrow f_{max} = f_o = SB\omega$

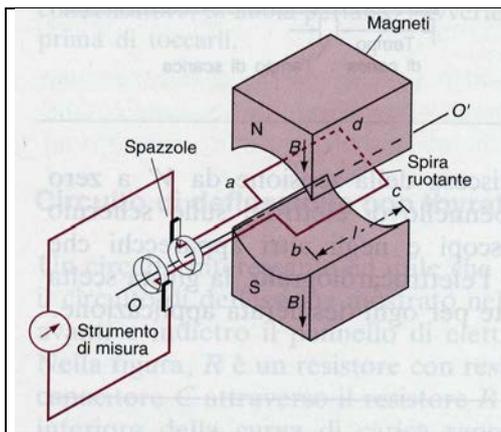
Se il circuito è chiuso ed ha una resistenza R, la corrente i che vi circola è data da:

$$i = \frac{f_{em}}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t = i_m \cdot \sin \omega t = i_o \cdot \sin \omega t \quad i_m = i_o = \frac{BS\omega}{R} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Si tratta di una corrente alternata che varia nel tempo con legge sinusoidale.

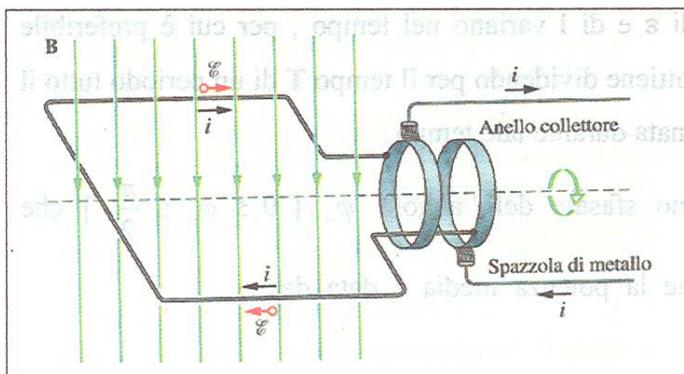
Il dispositivo descritto è un **alternatore monofase** o **dinamo a corrente alternata**.

Nella pratica il **circuito induttore** è disposto sulla parte ruotante (**rotore**) ed il **circuito indotto** è disposto sulla parte fissa (**statore**)

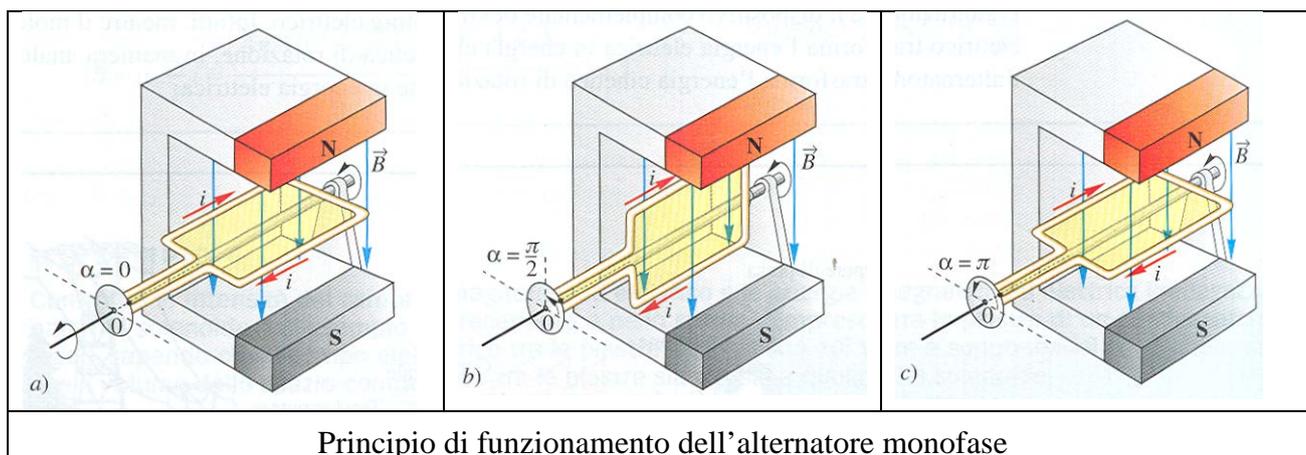


a) Una spira rettangolare è posta tra i rebbi di una calamita. I suoi terminali sono collegati separatamente a due anelli, isolati uno dall'altro. Le spazzole a contatto strisciante sono connesse al circuito esterno.

b) La spira viene fatta ruotare attorno al suo asse OO' nel campo magnetico \vec{B} generato dal magnete. Ai morsetti, collegati alle spazzole, viene generata una **f.e.m. alternata**.

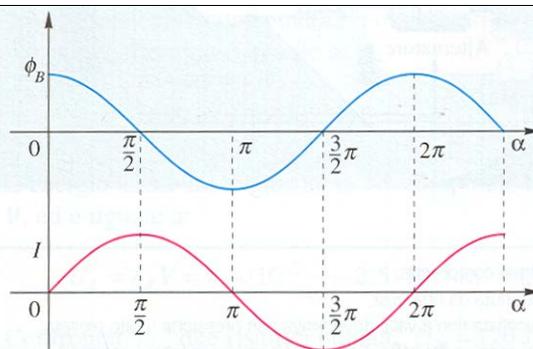


Il principio di funzionamento di un generatore di c.a. è costituito da una spira ruotante immersa in un campo magnetico \vec{B} esterno. La spira è collegata, mediante anelli rotanti saldati a ciascuna estremità, a delle spazzole conduttrici che strisciano sugli anelli e connettono la spira al resto del circuito.



Principio di funzionamento dell'alternatore monofase

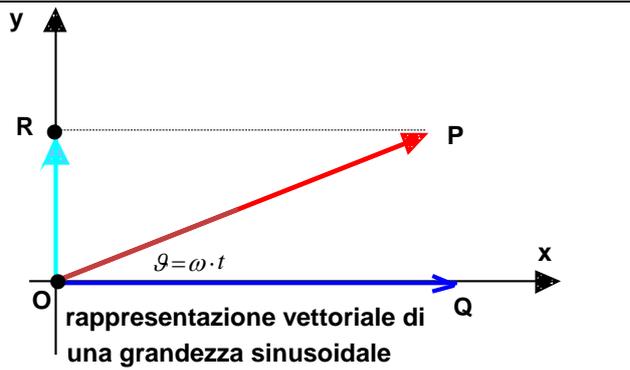
Andamento del flusso $\Phi_s(\vec{B}) = S \cdot B \cdot \cos \omega t$
concatenato con la spira dell'alternatore monofase
e della corrente indotta $i = \frac{f_{em}}{R} = i_m \cdot \sin \omega t$ che
circola nella spira



La corrente alternata

La corrente alternata è la corrente la cui intensità varia nel tempo sinusoidalmente, cambiando continuamente verso. Una corrente alternata è generata da una forza elettromotrice alternata. Infatti la forza elettromotrice $f=f_0 \cdot \sin \omega t$ genera la corrente alternata $i=i_0 \cdot \sin(\omega t-\varphi)$, dove f_0 rappresenta l'**ampiezza** della forza elettromotrice (cioè il **valore massimo** della forza elettromotrice) ed i_0 rappresenta l'**ampiezza** della corrente alternata (cioè il **valore massimo** della corrente). Il nostro scopo è quello di trovare l'ampiezza i_0 della corrente e la costante di fase φ .

Rappresentazione vettoriale di una grandezza alternata mediante i vettori di fase

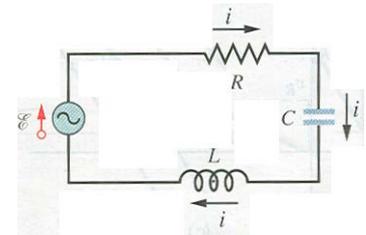
<p>Una grandezza alternata, il cui grafico è una sinusoide, può essere rappresentata graficamente anche mediante un vettore \overline{OP}, orientato da O verso P e di lunghezza proporzionale (in particolare uguale) al valore massimo (f_0, i_0) della grandezza considerata.</p>	
--	---

Per convenzione, si stabilisce che detto vettore, **detto vettore di fase**, ruoti con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante, avente modulo uguale alla pulsazione $\frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ della grandezza alternata. Gli angoli vanno considerati positivamente se la rotazione avviene in senso antiorario e negativamente nel caso contrario. Utilizzando tale convenzione le proiezioni del vettore \overline{OP} su un asse fisso (per esempio l'asse verticale delle ordinate), rappresentano tutti i valori istantanei che la grandezza sinusoidale assume durante un periodo **T**. Ad esempio, l'andamento nel tempo della grandezza sinusoidale $f_{em} = f_0 \cdot \sin \omega t$ Viene rappresentato mediante un vettore di modulo f_0 , ruotante con velocità angolare ω costante. All'istante $t=0$ il vettore assume, per convenzione, la posizione orizzontale OQ . Dopo t secondi esso ha ruotato dell'angolo $\vartheta = \omega t$. La sua proiezione OR sull'asse verticale y dà il valore $f_{em} = f_0 \cdot \sin \omega t$ della grandezza sinusoidale all'istante t .

Tre circuiti semplici

Esamineremo in seguito un circuito RLC in serie come quello indicato in figura connesso con un generatore di forza elettromotrice alternata. E ricaveremo le espressioni dell'ampiezza i_o e della costante di fase φ per una corrente oscillante sinusoidalmente in funzione dell'ampiezza f_o e della **pulsazione** ω della forza elettromotrice esterna.

Un circuito a maglia singola contenente una **resistenza**, un **conduttore** ed una **induttanza**. Un generatore, rappresentato da un'ondina all'interno di un circoletto, produce una **forza elettromotrice alternata** che stabilisce una **corrente alternata**. I versi della corrente e della forza elettromotrice sono segnati per un certo istante.



Prima, però, analizzeremo circuiti più semplici del circuito RLC .

Circuiti in corrente alternata

Analizziamo il comportamento dei diversi tipi di circuiti alimentati da una corrente alternata contemplando i casi in cui nel circuito siano presenti:

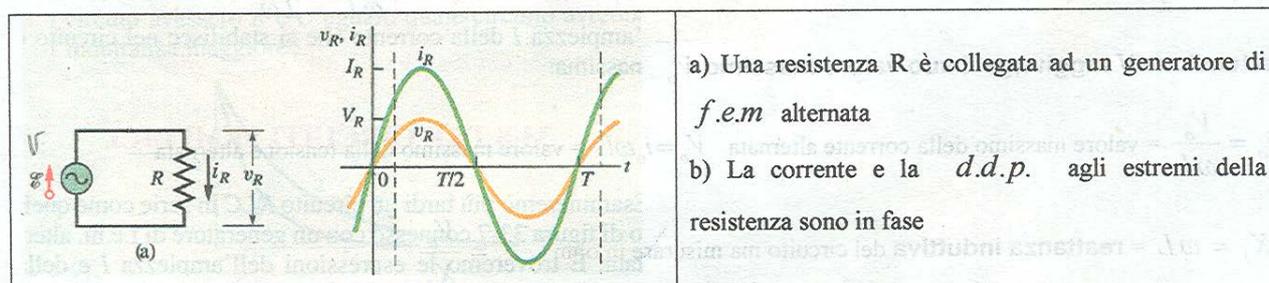
- (1) la sola resistenza ohmica **R** (Circuito **R** o circuito puramente ohmico)
- (2) la sola induttanza **L**, essendo trascurabile la resistenza ohmica (Circuito **L** o circuito puramente induttivo)
- (3) la sola capacità **C** (Circuito **C** o circuito capacitivo)
- (4) la resistenza **R** e l'induttanza **L** (Circuito **R L**)
- (5) la resistenza **R** e la capacità **C** (Circuito **R C**)
- (6) la resistenza **R**, l'induttanza **L**, la capacità **C** (Circuito **R L C**)

N.B. $\varepsilon = f_{em}$ = forza elettromotrice alternata che genera la corrente alternata

- In un circuito a corrente continua il moto delle cariche elettriche è generalmente ostacolato solo dalla **resistenza ohmica**. Nel caso della corrente alternata il fenomeno è più complesso, perché l'ostacolo al moto delle cariche elettriche dipende dalle caratteristiche del circuito che può contenere **resistenza ohmica, induttanze, condensatori** sia in serie che in parallelo.
- In un generico circuito percorso da corrente alternata la resistenza complessiva dalle cariche che generano la corrente alternata prende il nome di **impedenza**.

Definizione: Dicesi **resistenza apparente** o **impedenza Z** il rapporto tra la **f.e.m.** massima ε_m e l'intensità di corrente massima i_m , cioè: $Z = \frac{\varepsilon_m}{i_m}$. **Z** ha le dimensioni di una **resistenza**.

Corrente alternata attraverso una resistenza R: circuito puramente ohmico o circuito R o circuito resistivo



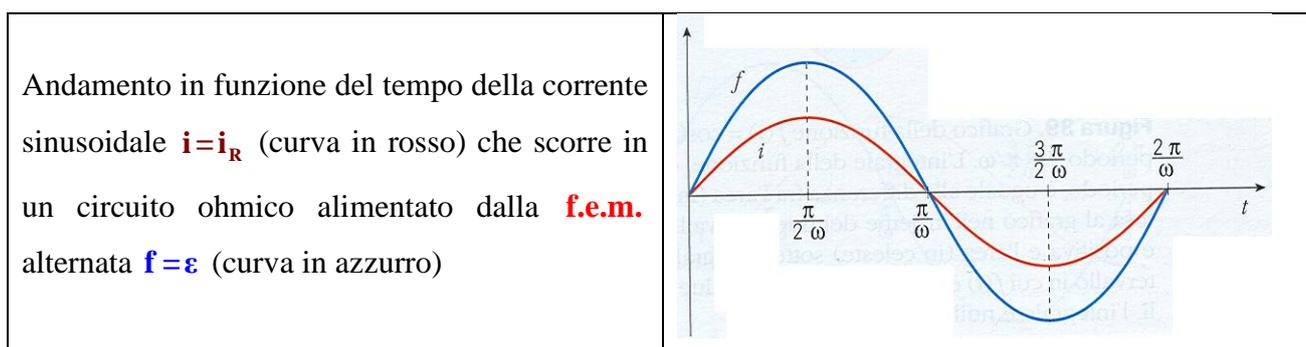
$f = \varepsilon = V_R = f_0 \cdot \sin \omega t =$ **d.d.p.** esistente agli estremi della resistenza **R**

$i(t) = i_R = \frac{f(t)}{R} = \frac{f_0}{R} \cdot \sin \omega t =$ corrente alternata che circola nella resistenza **R** $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

$i_0 = \frac{f_0}{R} =$ **valore massimo** della corrente alternata

$f_0 = i_0 \cdot R =$ **tensione massima** esistente agli estremi della resistenza **R**

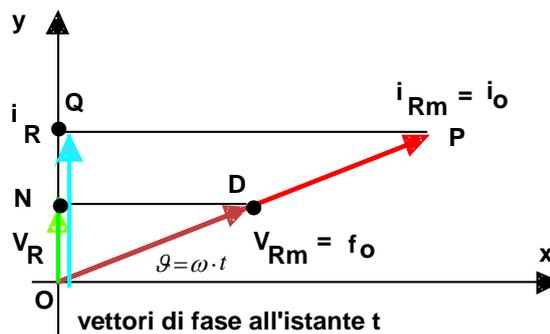
In un circuito puramente resistivo circola una corrente alternata avente la stessa frequenza e la stessa fase della tensione alternata applicata. Questo significa che le grandezze variabili nel tempo V_R ed i_R sono in **fase**.



Le grandezze variabili V_R ed i_R possono essere rappresentate geometricamente ricorrendo ai **vettori di fase**, detti anche **fasori**. I **fasori** sono vettori ruotanti attorno ad una comune origine O. In figura sono riportati i vettori di fase che rappresentano la **corrente** che circola attraverso la resistenza e la **tensione** ai suoi estremi ad un certo istante.

Diagramma dei vettori di fase

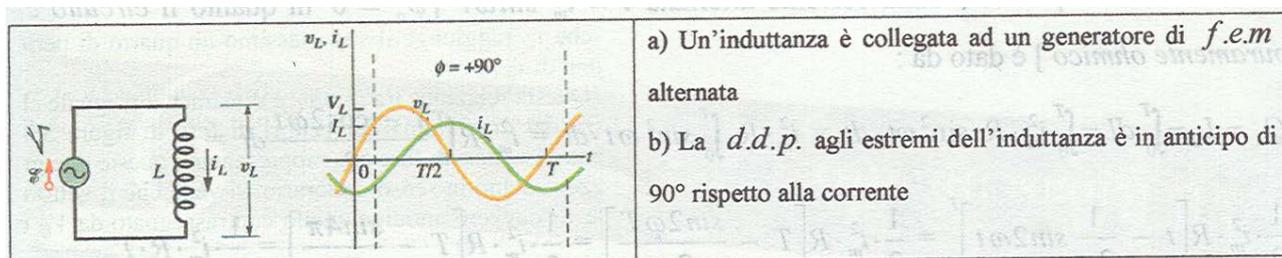
il segmento orientato $D-O$ è il vettore di fase che rappresenta la **d.d.p.** agli estremi della resistenza R , il segmento orientato $P-O$ è il vettore di fase che rappresenta la **corrente** che attraversa la resistenza R



Questi vettori di fase presentano le seguenti proprietà:

- **Velocità angolare:** Entrambi i vettori ruotano in senso antiorario attorno all'origine O con velocità angolare uguale alla pulsazione ω di V_R e di i_R .
- **Lunghezza:** La lunghezza di ciascun vettore di fase rappresenta l'ampiezza della grandezza alternata: f_o per la tensione ed i_o per la corrente.
- **Proiezione:** La proiezione di ciascun vettore sull'asse verticale delle y rappresenta il valore della grandezza alternata all'istante t: V_R per la **tensione** e i_R per la **corrente**.
- **Angolo di rotazione:** L'angolo di rotazione di ciascun vettore di fase è uguale alla fase della grandezza alternata all'istante t. In figura la tensione e la corrente sono in fase. I loro vettori di fase hanno la stessa fase $\omega \cdot t$ e lo stesso angolo di rotazione $\vartheta = \omega \cdot t$; perciò ruotano insieme.
- **Forza elettromotrice** alternata e **corrente alternata** hanno la **stessa fase**

Corrente alternata attraverso una induttanza L: circuito puramente induttivo o circuito L



Un **circuito induttivo** è un circuito contenente una induttanza L alimentata da una tensione alternata espressa da $f = f_o \cdot \sin \omega t$. Si tratta di un circuito contenente una bobina di resistenza ohmica trascurabile. La corrente che fluisce nel circuito è: $i = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

La d.d.p. agli estremi della bobina è: $V_L = -L \cdot \frac{di_L}{dt}$

L'equazione del circuito è $\varepsilon + V_L = Ri = 0$ essendo $R=0$ e $V_L = -L \cdot \frac{di_L}{dt}$ abbiamo:

$$\varepsilon - L \cdot \frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad \text{Risolvendo questa equazione differenziale otteniamo la corrente}$$

alternata che fluisce in un circuito puramente induttivo: $i_L(t) = -\frac{f_o}{L\omega} \cdot \cos \omega t = \frac{f_o}{L\omega} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$i_o = \frac{f_o}{\omega L} = \frac{f_o}{2\pi\nu L} = \text{valore massimo della corrente alternata} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

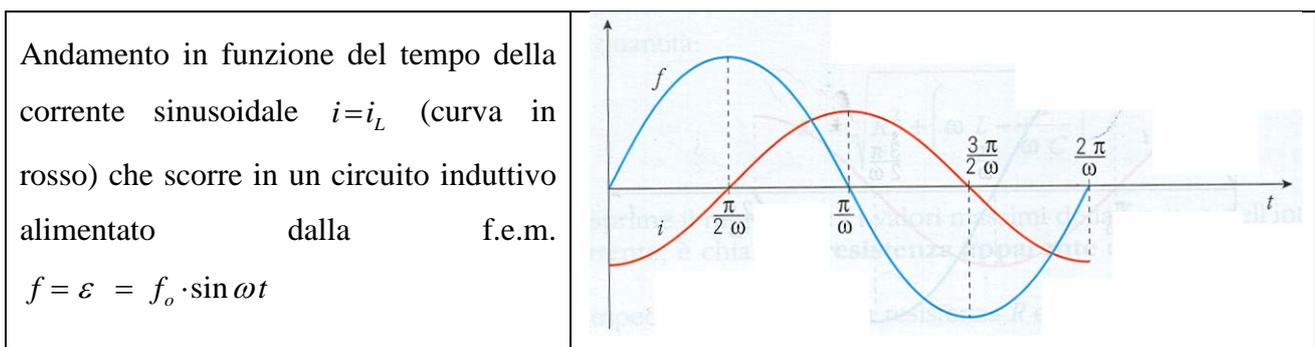
In un **circuito induttivo** circola una **corrente alternata** avente la stessa frequenza (e quindi lo stesso periodo) della **tensione alternata** applicata, ma in **ritardo di fase** rispetto a questa di un quarto di periodo ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), cioè la corrente i raggiunge il suo valore massimo (che è

$\frac{f_o}{\omega L}$) dopo $\frac{\pi}{2\omega}$ secondi dopo che la tensione ε raggiunge il suo valore massimo f_o .

L'impedenza Z_L del circuito induttivo vale; $Z_L = X_L = \frac{f_o}{i_o} = \frac{f_o}{\frac{f_o}{\omega L}} = \omega L$

In questo caso l'impedenza induttiva Z_L prende il nome di **reattanza induttiva** e viene

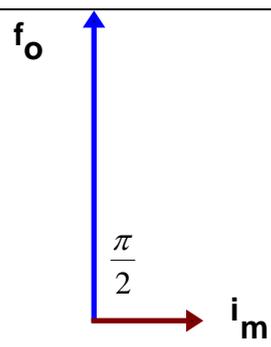
indicata col simbolo X_L . $\frac{f_o}{i_o} = X_L \Rightarrow i_o = \frac{f_o}{X_L} \quad f_o = X_L \cdot i_o$



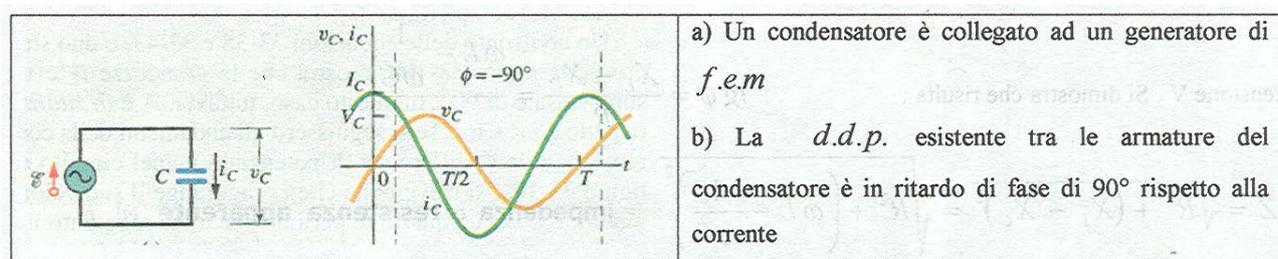
La **corrente alternata è in ritardo di fase** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla forza elettromotrice

alternata perché si annulla dopo $t = \frac{T}{4}$ secondi rispetto a quanto si annulla la tensione alternata.

Rappresentazione vettoriale della corrente alternata e della forza elettromotrice alternata

<p>In un elemento di circuito puramente induttivo la corrente alternata è sfasata in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione.</p> <p>$f_o = \text{tensione massima}$</p> <p>$i_m = i_o = \text{corrente alternata massima}$</p>	
---	---

Corrente alternata attraverso una capacità: circuito puramente capacitivi o circuito C



Consideriamo un circuito contenente un condensatore di capacità **C**, privo di induttanza **L**, alimentato da una **f.e.m.** $f = \varepsilon = f_o \cdot \sin \omega t$ nel caso ideale di resistenza ohmica nulla. La corrente che fluisce nel circuito è: $i = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

L'equazione del circuito è: $f_{em} = \varepsilon = \frac{q(t)}{C} = V_C \quad q(t) = C \cdot f = C \cdot f_o \cdot \sin \omega t$

$$i_c = \frac{dq}{dt} = C \cdot f_o \cdot \omega \cdot \cos \omega t = C \cdot f_o \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = C \cdot f_o \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

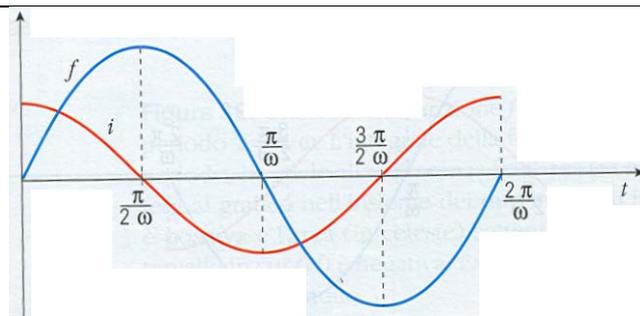
$$i_c = i_o \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = C \cdot f_o \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Con $i_o = C \cdot f_o \cdot \omega = \text{valore massimo della corrente}$ $f_o = \frac{i_o}{C \cdot \omega}$

In un circuito puramente capacitivo la corrente alternata è in anticipo di fase di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione $\varepsilon = \varepsilon_m \cdot \sin \omega t$ che la genera.

$$f_o = \frac{i_o}{C \cdot \omega} = \text{valore massimo della tensione}$$

Andamento in funzione del tempo della corrente sinusoidale i (curva in rosso) che scorre in un circuito capacitivo alimentato dalla f.e.m. alternata $\varepsilon = \varepsilon_m \cdot \sin \omega t$ (curva in azzurro)



Se la forza elettromotrice è alternata, nel circuito fluisce una **corrente elettrica** alternata che **anticipa** di un quarto di periodo rispetto alla **forza elettromotrice**.

$Z_C = \frac{\varepsilon_m}{i_m} = \frac{\varepsilon_m}{C \cdot \omega \cdot \varepsilon_m} = \frac{1}{C \cdot \omega} = X_C =$ **impedenza** del circuito capacitivo detta anche **reattanza capacitiva**

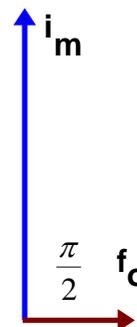
Rappresentazione vettoriale della corrente alternata e della forza elettromotrice alternata

In un elemento di circuito puramente **capacitivo** la

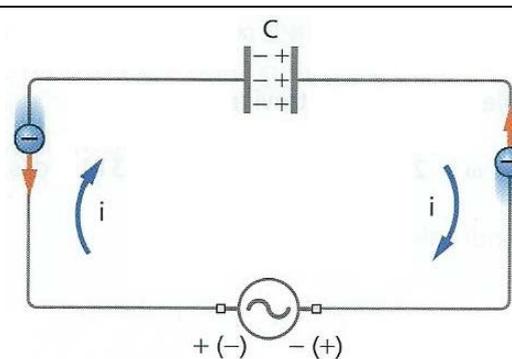
corrente alternata è sfasata in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione.

ε_o = tensione massima

$i_m = i_o$ = corrente alternata massima



In un circuito capacitivo che contiene un generatore di corrente continua si ha una breve corrente di carica del condensatore, dopo la quale il sistema si porta in equilibrio e la corrente si interrompe. Se, invece, la tensione è alternata molto presto la polarità del generatore si inverte ed entrambe le armature del condensatore dapprima si scaricano per poi



caricarsi del segno opposto. Si genera la corrente alternata $i(t) = C \cdot f_o \cdot \omega \cdot \cos \omega t$

Circuito RL

Un circuito induttivo non è mai completamente privo di resistenza ohmica e, quindi, rappresenta un circuito RL . V_R = d.d.p. ai capi della resistenza **R** quando il circuito è attraversato dalla corrente alternata V_L = d.d.p. ai capi dell'induttanza **L** quando il circuito è attraversato dalla corrente alternata. V_R e V_L sono rappresentati da due vettori rotanti \vec{V}_R che precede \vec{V}_L di $\frac{\pi}{2}$, come indicato in figura.

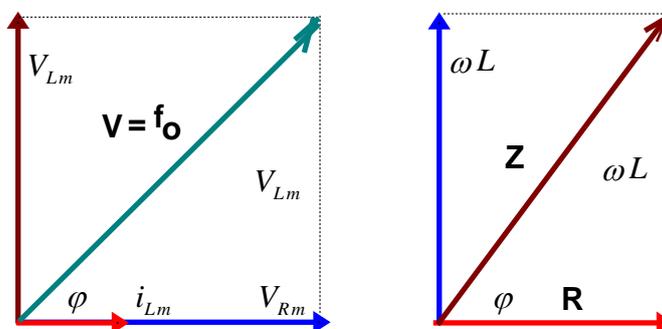
In questa figura il vettore rotante che rappresenta la corrente alternata è parallelo ed equiverso col vettore rotante \vec{V}_R . La somma vettoriale $\vec{V}_R + \vec{V}_L$, tensione ai capi della serie **RL**, è data dal vettore risultante $\vec{f} = \vec{V}_R + \vec{V}_L$. Il circuito è alimentato dalla tensione $f = f_o \cdot \sin \omega t$ e genera la corrente $i = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Dobbiamo calcolare i_o e φ . Dal modello vettoriale delle reattanze ricaviamo:

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 = R^2 + \omega^2 L^2 \quad Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \omega L = R \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} \quad 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$$

Dal modello vettoriale delle tensioni ricaviamo: $f_o^2 = V_{Rm}^2 + V_{Lm}^2 = i_o^2 \cdot R^2 + i_o^2 \cdot X_L^2 = i_o^2 \cdot (R^2 + X_L^2)$

$f_o = i_o \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2} =$ cui **valore massimo** della tensione alternata

$$i_o = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{f_o}{Z} \quad i = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{f_o}{Z} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$



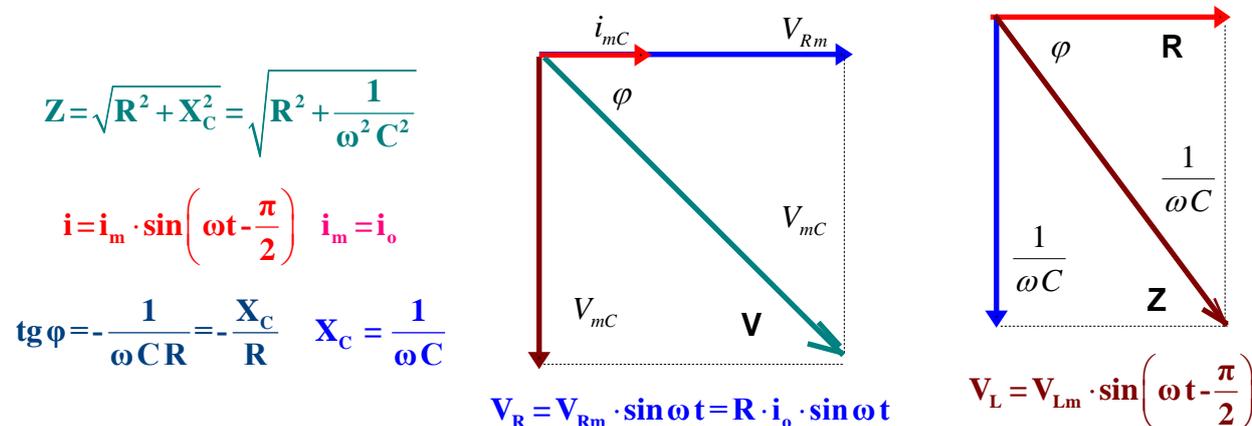
$$V_R = V_{Rm} \cdot \sin \omega t = R \cdot i_o \cdot \sin \omega t \quad V_L = V_{Lm} \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Circuito RC

Analogamente a quanto accade nel circuito RL la d.d.p. complessiva V è la somma di:

- $V_R = I \cdot R$ ai capi della resistenza R (in fase con la corrente) e di
- $V_{Cm} = \frac{i_{Cm}}{C \cdot \omega} = i_{Cm} \cdot X_C$ tra

le armature del condensatore (in ritardi di fase di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla corrente)



$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$i = i_m \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad i_m = i_o$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C R} = -\frac{X_C}{R} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$V_R = V_{Rm} \cdot \sin \omega t = R \cdot i_o \cdot \sin \omega t$$

$$V_L = V_{Lm} \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Circuito LC

Il circuito è alimentato dalla tensione $f = f_o \cdot \sin \omega t$ e genera la corrente $i = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

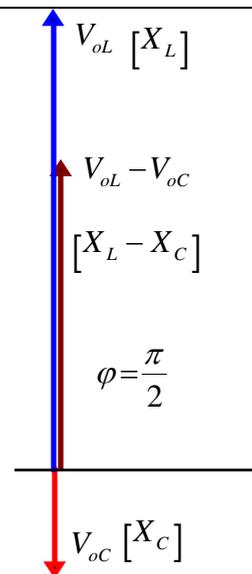
Dobbiamo calcolare i_o e φ . $\vec{f}_o = \vec{V}_{oL} + \vec{V}_{oC}$ $V_{oL} = i_o \cdot X_L$ $V_{oC} = i_o \cdot X_C$

$$X_L > X_C \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$f_o = V_{oL} - V_{oC} = i_o \cdot X_L - i_o \cdot X_C = i_o \cdot (X_L - X_C) = i_o \cdot Z \Rightarrow$$

$$i_o = \frac{f_o}{Z} = \frac{f_o}{X_L - X_C} = \frac{f_o}{L\omega - \frac{1}{\omega C}}$$

$$i = \frac{f_o}{L\omega - \frac{1}{\omega C}} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

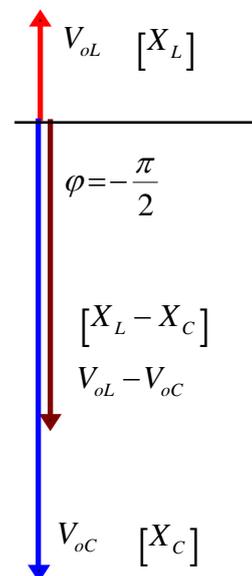


$$X_L < X_C \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$f_o = V_{oL} - V_{oC} = i_o \cdot X_C - i_o \cdot X_L = i_o \cdot (X_C - X_L) = i_o \cdot Z \Rightarrow$$

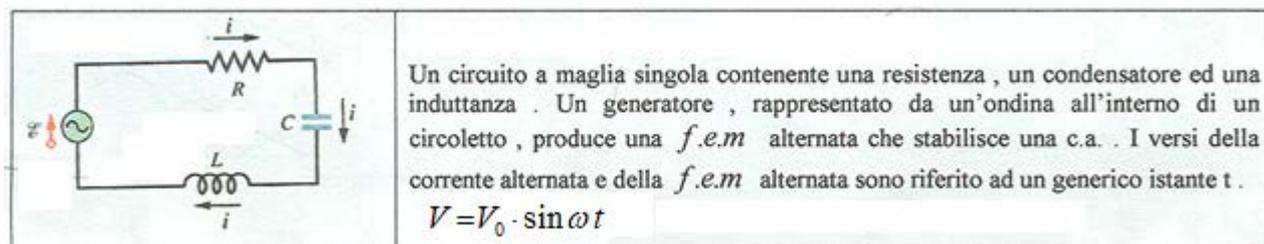
$$i_o = \frac{f_o}{Z} = \frac{f_o}{X_C - X_L} = \frac{f_o}{\frac{1}{\omega C} - L\omega}$$

$$i = \frac{f_o}{\frac{1}{\omega C} - L\omega} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad i = \frac{f_o}{\frac{1}{\omega C} - L\omega} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$V_L = V_{Lm} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad V_C = V_{Cm} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Corrente alternata in un circuito ohmico-induttivo-capacitivo o circuito RLC



Consideriamo un circuito *RLC* contenente una **resistenza**, un'**induttanza** ed una **capacità** collegate in serie, alimentato da una **f.e.m.** alternata espressa da:

$$f_{em} = \varepsilon = \varepsilon_m \cdot \sin \omega t = f_0 \cdot \sin \omega t$$

Il circuito è attraversato da una corrente alternata di tipo sinusoidale avente la stessa frequenza della **f.e.m.** $f_{em} = \varepsilon = f$ avente la forma: $i = i_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Il nostro scopo è quello di trovare l'ampiezza i_0 della corrente e la costante di fase φ . Il compito è semplificato dall'uso dei vettori di fase.

Per conoscere la corrente che circola in un circuito **RLC** occorre calcolare la resistenza complessiva (**impedenza**) del circuito. Per questo motivo occorre analizzare il comportamento di **C**, **R**, **L** in regime alternato.

La **corrente** i_c è **sfasata** di un angolo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in **anticipo** rispetto alla tensione V_c . Il condensatore presenta una **resistenza apparente**, detta **reattanza**

capacitiva, indicata col simbolo X_c e che vale: $X_c = \frac{1}{\omega \cdot C}$. La resistenza **R**, sia in corrente

continua che in corrente alternata, lascia passare sempre la corrente e non sfasa la corrente rispetto alla tensione applicata. L'**intensità di corrente** i_R che attraversa la resistenza in regime di

corrente alternata è ancora una funzione sinusoidale del tempo, **non sfasata rispetto alla**

tensione $V_R = V_{Rm} \cdot \sin \omega t$. L'induttanza **L**, che in corrente continua lascia passare la corrente, in

regime di corrente alternata lascia passare meno corrente dovendo una parte servire per creare il

campo magnetico. **La corrente** i_L è **sfasata di un angolo** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **in ritardo rispetto alla**

tensione V_L . L'induttanza oppone alla corrente alternata una **resistenza apparente**, detta

reattanza induttiva, indicata col simbolo X_L , direttamente proporzionale alla pulsazione ω ed all'induttanza **L**. In formule abbiamo: $X_L = \omega L$.

Per la legge delle maglie applicata al circuito RLC all'istante t risulta: $\varepsilon = V_R + V_L + V_C$

Se scegliamo la fase della corrente come fase iniziale di riferimento, esprimendo l'intensità istantanea nella forma $i = i_m \cdot \sin \omega t$, valgono le seguenti considerazioni:

a) per la resistenza ohmica **R** la tensione agli estremi di **R** e la corrente che vi circola sono in **fase**. $i_R = i_m \cdot \sin \omega t = i_o \cdot \sin \omega t$ $V_R = V_{Rm} \cdot \sin \omega t = R \cdot i_o \cdot \sin \omega t$ con $V_{Rm} = R \cdot i_m$

b) la corrente che circola nell'induttanza **L** è in **anticipo di fase** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione

esistente ai suoi estremi $i_L = i_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $V_L = V_{Lm} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ con $V_{Lm} = L \cdot \omega \cdot i_m$

(Tensione in **ritardo** di fase rispetto alla corrente)

c) la corrente che circola nella capacità è in **ritardo di fase** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione

esistente ai suoi estremi $i_C = i_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $V_C = V_{Cm} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ con $V_{Cm} = \frac{i_m}{\omega \cdot C}$

(Tensione in **anticipo** di fase rispetto alla corrente)

$$f = V_R + V_L + V_C \Rightarrow [\rho] \quad \mathbf{f = V_{Rm} \cdot \sin \omega t + V_{Lm} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + V_{Cm} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\mathbf{f = R \cdot i_o \cdot \sin \omega t + L \omega i_o \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{i_o}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Ricordando che: $X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $V_R = i_o \cdot R$ ed applicando il teorema di Pitagora al triangolo

rettangolo *OAB* otteniamo: $f_o^2 = V_{oR}^2 + (V_{oL} - V_{oC})^2 = i_o^2 R^2 + (i_o X_L - i_o X_C)^2 = i_o^2 [R^2 + (X_L - X_C)^2]$

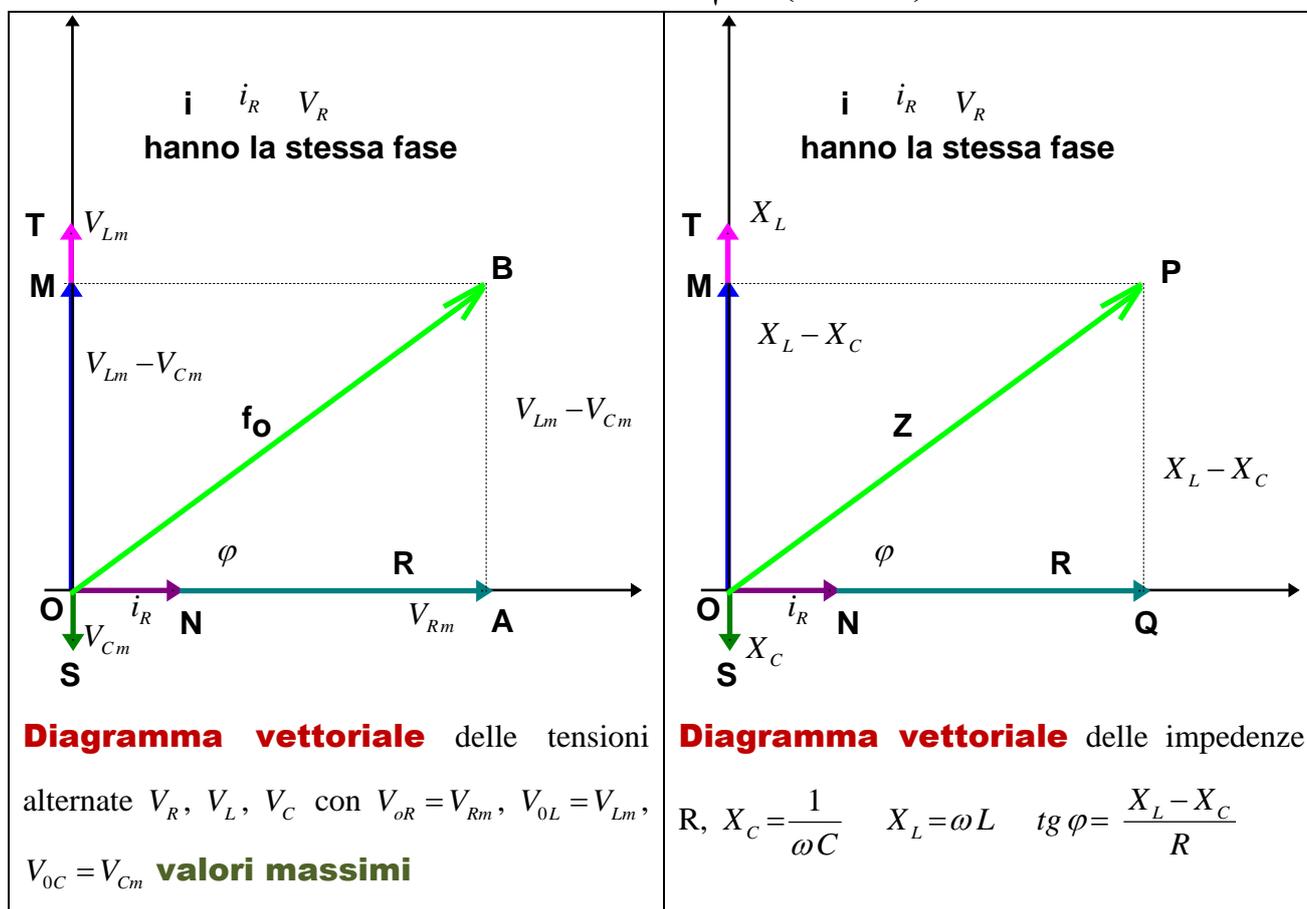
$$i_o = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad f_o = i_o \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = i_o \cdot \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$Z = \frac{f_o}{i_o} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$i_{eff} = \frac{f_{eff}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{f_{eff}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad f_{eff} = i_{eff} \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = i_{eff} \cdot \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

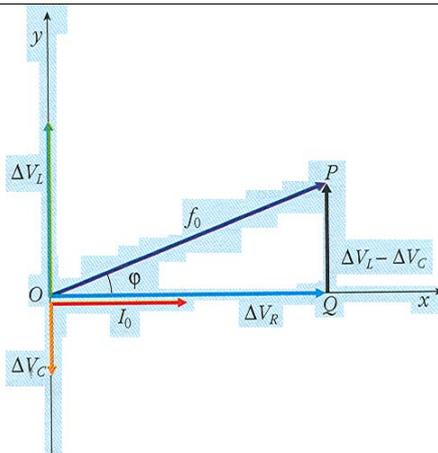
$$PQ = OQ \cdot \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{PQ}{OQ} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$i(t) = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{f_o}{Z} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$



La d.d.p V_R ai capi della resistenza è rappresentato dal modulo del vettore $A-O$ posto sull'asse x;
 La corrente i_R , che è in **fase** con V_R è rappresentato dal modulo del vettore $N-O$ posto pure
 sull'asse x. La d.d.p V_L ai capi della bobina di induttanza L ci viene fornito dal modulo del vettore
 $T-O$ avente la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse y in quanto **tale tensione è in
 anticipo di fase** di $\frac{\pi}{2}$. La d.d.p V_C ai capi del condensatore è rappresentato dal vettore $S-O$
 orientato secondo il semiasse negativo delle y in quanto **tale tensione è in ritardo di fase**
 di $\frac{\pi}{2}$.

Rappresentazione vettoriale delle tensioni ΔV_R (in azzurro) ai capi del resistore, ΔV_L (in verde) ai capi dell'induttore e ΔV_C (in arancione) ai capi del condensatore di un circuito RLC. La somma vettoriale delle tre tensioni (Vettore $P-O$ in blu) rappresenta la **f.e.m.** di alimentazione, di ampiezza ε_m

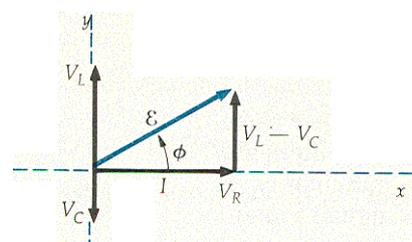


Tutti i vettori, tracciati in un certo istante t in cui la corrente assume il valore massimo I_0 (vettore in rosso parallelo all'asse x), al variare di t ruotano in senso antiorario intorno ad O con velocità angolare ω costante.

Relazioni di fase tra le tensioni in un circuito RLC in serie.

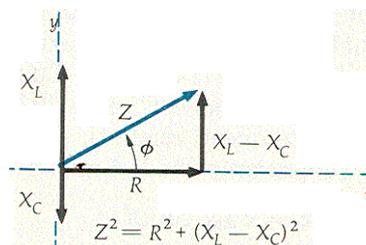
La tensione V_R ai capi del resistore R è in fase con la corrente ed è rappresentata come un vettore lungo l'asse x .

La tensione V_L ai capi dell'induttanza L è in anticipo di 90° sulla corrente, e quindi è rappresentata lungo l'asse y .



La tensione V_C ai capi del condensatore C è in ritardo di fase di 90° sulla corrente, e quindi è rappresentata come un vettore orientato secondo il semiasse negativo delle ordinate. La somma dei vettori che rappresentano queste tensioni è un vettore che forma un angolo φ con la corrente e rappresenta la forza elettromotrice applicata al circuito. Nel caso mostrato qui, V_L è maggiore di V_C e la forza elettromotrice è in anticipo di φ sulla corrente.

Modello vettoriale che permette di mettere in relazione la reattanza capacitiva e quella induttiva, la resistenza, l'impedenza e la differenza di fase in un circuito LCR .



Il circuito RLC e le tensioni ai capi della resistenza R , dell'induttanza Z e della capacità C

La tensione alternata $f = f_0 \cdot \sin \omega t$ genera, nel circuito RLC, la corrente alternata

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_0 \cdot \sin \omega t = \text{tensione ai capi della resistenza ohmica}$$

con $\varphi=0$ fase tra la tensione ohmica e la corrente alternata \mathbf{i}

$$V_L = Z_L \cdot \sin(\omega t - \varphi) = L \cdot \omega \cdot i_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \text{tensione ai capi dell'induttanza } L$$

con $\varphi = \frac{\pi}{2}$ fase tra la tensione induttiva e la corrente alternata i

$$V_C = Z_C \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{i_0}{\omega \cdot C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \text{tensione ai capi della capacità } C$$

con $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ fase tra la tensione capacitiva e la corrente alternata i $f = V_R + V_L + V_C$

Ogni elemento (R,L,C) del circuito è attraversato dalla corrente $i = i_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

La corrente $i(t)$, che attraversa il circuito:

- la **stessa fase** della tensione ohmica

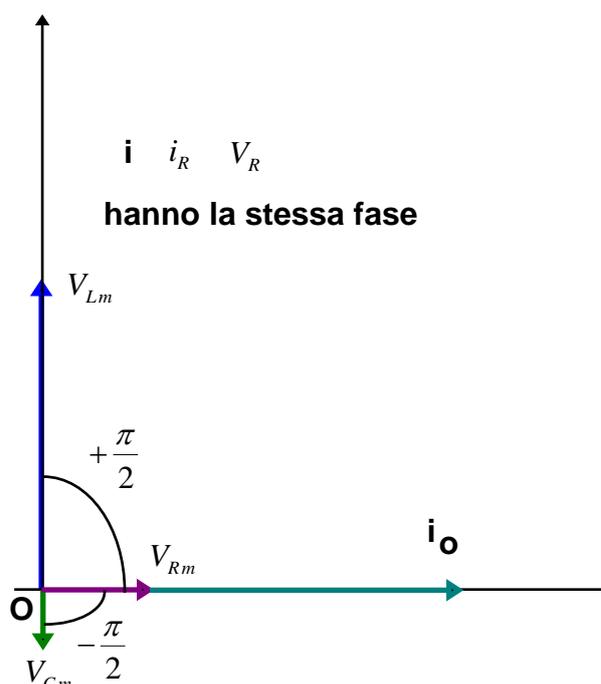
$$V_R(t)$$

- è in **anticipo di fase** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla

tensione induttiva $V_L(t)$

- è in **ritardo di fase** di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla

tensione capacitiva $V_C(t)$



La risonanza nei circuiti RLC in serie

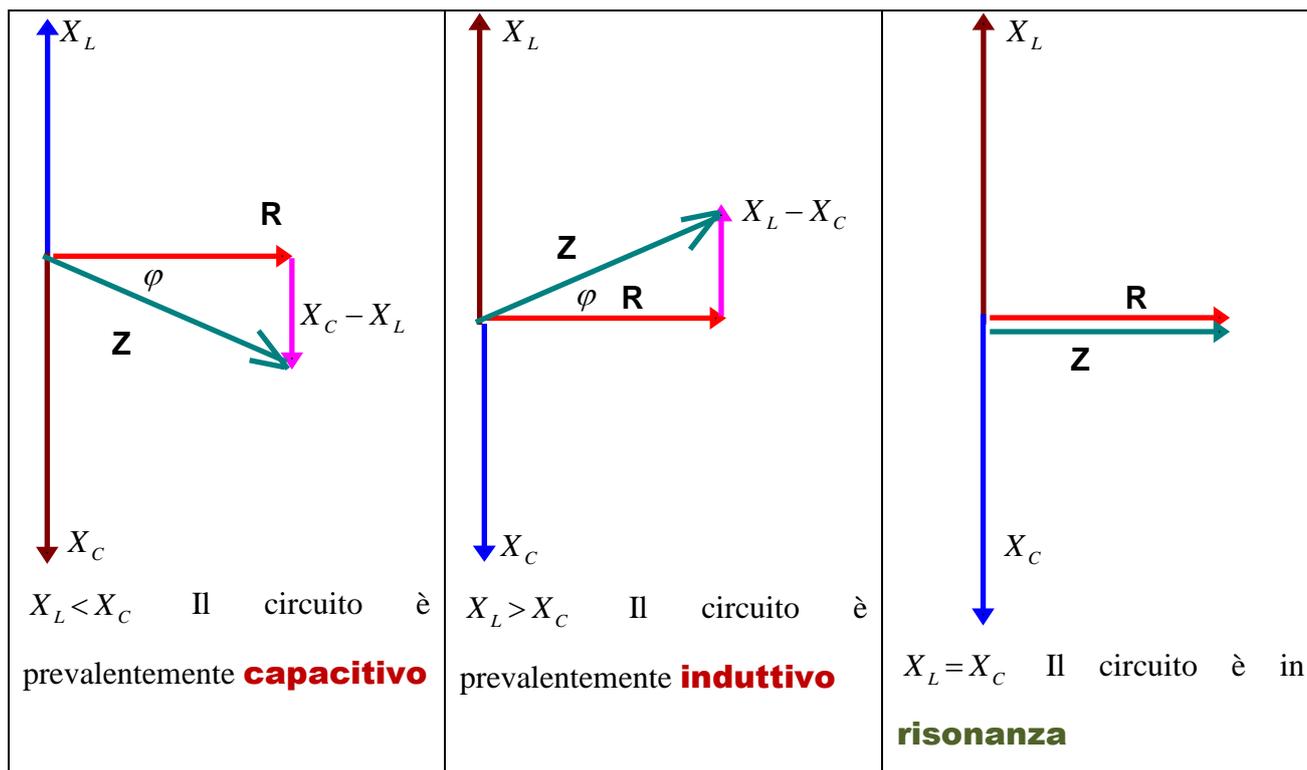
Quando in un circuito RLC la reattanza induttiva uguaglia la reattanza capacitiva ($L \cdot \omega = \frac{1}{\omega \cdot C}$)

allora gli effetti dell'induttanza L e della capacità C si compensano. Il circuito RLC si comporta come una resistenza ohmica e si dice che il **circuito è in risonanza**.

$$L \cdot \omega = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \text{la corrente } i \text{ è in fase con la tensione } \varepsilon$$

Valgono le seguenti formule: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $T = 2\pi\sqrt{LC}$ $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ è detta

frequenza di risonanza in quanto rappresenta la frequenza che deve avere la f.e.m. alternata ε che alimenta il circuito RLC perché in esso circoli una corrente alternata in fase con la tensione alternata. “



$\omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0$ la **corrente** $i = i_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ è in **ritardo** rispetto

alla **tensione** $\varepsilon = \varepsilon_m \cdot \sin \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

$\omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi < 0 \Rightarrow \varphi < 0$ la **corrente** $i = i_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ è in **anticipo** rispetto

alla **tensione** $\varepsilon = \varepsilon_m \cdot \sin \omega t$

$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ la **corrente** $i = i_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ è in **fase** con la **tensione**

$\varepsilon = \varepsilon_m \cdot \sin \omega t$. Siamo in presenza della **risonanza del circuito**.

Il segno dello sfasamento φ dipende dai valori di **L, C** e dalla pulsazione ω della tensione $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Dal caso generale di un circuito **RLC** in corrente alternata scaturiscono i seguenti casi particolari:

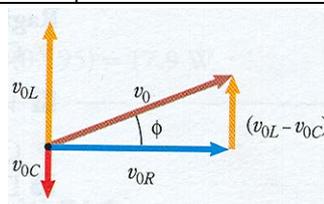
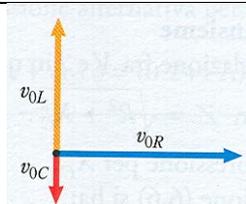
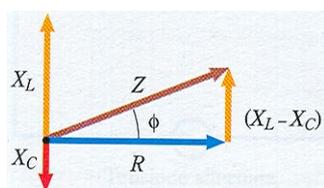
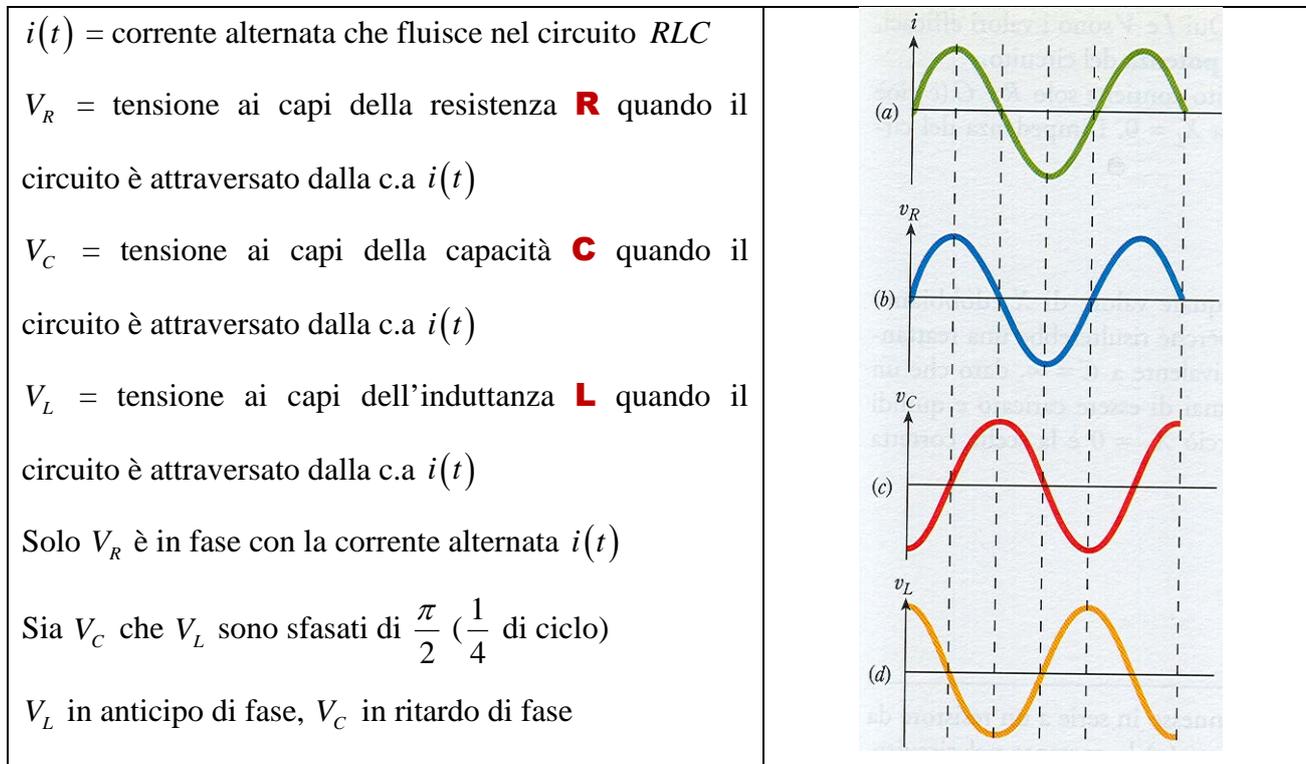
a) Circuito RL: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{X_L}{R} \quad i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad Z = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$

b) Circuito RC: $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{R\omega C} = -\frac{X_C}{R} \quad i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

c) **Circuito L:** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $i_m = \frac{\varepsilon_m}{\omega L}$ $Z = \omega L$ d) **Circuito C:** $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $i_m = \omega C \varepsilon_m$ $Z = \frac{1}{\omega C}$

e) **Circuito R:** $\varphi = 0$ $i_m = \frac{\varepsilon_m}{R}$



L'effetto dell'elemento attraversato dalla corrente è espresso dall'**impedenza** Z_o e dallo **sfasamento** φ .

Negli elementi singoli abbiamo trovato:

R	$Z_o = R$	$\varphi = 0$
L	$Z_o = \omega L$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
C	$Z_o = \frac{1}{\omega L}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Impedenza e sfasamento per elementi R, L, C, RLC in serie		
	Impedenza Z_o	Fase φ
R	R	0
L	$L \cdot \omega$	$\frac{\pi}{2}$
C	$\frac{1}{\omega \cdot C}$	$-\frac{\pi}{2}$
RL	$\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}$	$\text{tg } \varphi = \frac{L \cdot \omega}{R}$
RC	$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}}$	$\text{tg } \varphi = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$
LC	$L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\pm \frac{\pi}{2}$
RLC	$\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$	$\text{tg } \varphi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$

Valori efficaci della corrente alternata e della tensione alternata e la potenza in un circuito RLC

Dicesi **valore efficace** dell'intensità di una corrente alternata l'intensità che dovrebbe avere una corrente continua per produrre, nelle stesse condizioni di resistenza (**impedenza**) e nello stesso tempo, una uguale quantità di calore. Risulta: $i_o = i_m = i_{eff} \cdot \sqrt{2}$ $f_o = f_m = f_{eff} \cdot \sqrt{2} = \varepsilon_{eff} \cdot \sqrt{2}$

Anche per le correnti alternate vale la legge di Ohm pur di prendere i valori efficaci di i, f, V e come **resistenza** l'**impedenza Z**. Gli strumenti di misura a corrente alternata, come gli amperometri ed i voltmetri, sono generalmente tarati per leggere $i_{eff}, f_{eff}, V_{eff}$. Così se inseriamo un voltmetro in una presa elettrica di casa ed esso legge 220V, questa è una tensione efficace. Il valore massimo della differenza di potenziale nella presa è: $V_o = V_m = V_{eff} \cdot \sqrt{2} = 220 \cdot \sqrt{2} \approx 310V$

In un circuito ohmico abbiamo: $f_{eff} = i_{eff} \cdot R$

In un circuito induttivo abbiamo $f_{eff} = i_{eff} \cdot Z_L$

In un circuito capacitivo abbiamo $f_{eff} = i_{eff} \cdot Z_C$

In un circuito *RL* abbiamo $f_{eff} = i_{eff} \cdot Z = i_{eff} \cdot \sqrt{R^2 + Z_L^2}$

In un circuito RC abbiamo $f_{eff} = i_{eff} \cdot Z = i_{eff} \cdot \sqrt{R^2 + Z_C^2}$

In un circuito LC abbiamo $f_{eff} = i_{eff} \cdot Z = i_{eff} \cdot (Z_L - Z_C) = i_{eff} \cdot \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)$

In un circuito RLC abbiamo $f_{eff} = i_{eff} \cdot Z = i_{eff} \cdot \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = i_{eff} \cdot \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}$

In un circuito alimentato da una corrente continua la potenza W erogata dal generatore avente

f.e.m. costante ε è data da: $W_{c.c.} = \varepsilon i = \frac{\varepsilon^2}{R} = R i^2$

In un circuito in corrente alternata i valori di ε e di i variano nel tempo, per cui è preferibile calcolare la potenza media, il cui valore si ottiene dividendo per il tempo T di un periodo tutto il lavoro eseguito dal generatore di corrente alternata durante tale tempo.

Se la corrente i e la **f.e.m.** ε alternate sono sfasate dell'angolo φ_o [$0 \leq \varphi_o \leq \frac{\pi}{2}$], angolo che dipende da **R, L, C** ed ω , si dimostra che la potenza media è data da:

$$W_m = \varepsilon_{eff} \cdot i_{eff} \cdot \cos \varphi_o \quad \text{Formula di Galileo Ferraris}$$

dove $\cos \varphi_o$ è detto **fattore di potenza**. Il prodotto $\varepsilon_{eff} \cdot i_{eff}$ è detto **potenza apparente**, mentre il prodotto $\varepsilon_{eff} \cdot i_{eff} \cdot \cos \varphi_o$ è detto **potenza reale**. Per un circuito puramente ohmico è $\varphi_o = 0$ $\cos \varphi_o = 1$ e quindi $W_m = \varepsilon_{eff} \cdot i_{eff}$.

Trasformazione delle tensioni alternate e trasporto dell'energia: trasformatore elettrico

Quando si trasporta energia elettrica su grandi distanze, è conveniente usare alta tensione e bassa intensità di corrente, in modo da rendere minima la perdita di energia per effetto Joule nelle linee di trasmissione. Però l'utilizzazione dell'energia avviene a bassa tensione. Occorre un dispositivo in grado di **aumentare** (o **diminuire**) la tensione alternata senza comportare una perdita apprezzabile di potenza elettrica. Nei sistemi di distribuzione dell'energia elettrica è auspicabile avere a che fare con d.d.p. relativamente basse sia nell'impianto di generazione (la centrale elettrica), sia all'estremità opposta, cioè presso l'utente (abitazione privata o azienda). Quanto detto mette in evidenza una contraddizione tra la richiesta di un efficiente trasporto ad alta tensione e la necessità di una bassa tensione di sicurezza all'atto della generazione e del consumo. Occorre un dispositivo con il quale **aumentare** (per il trasporto) e **diminuire** (per il consumo) la d.d.p. in un circuito, **mantenendo costante il prodotto corrente-tensione**. I dispositivi che assolvono a questa funzione sono i **trasformatori**.

Trasformatore elettrico ideale

Trasformatore elettrico è una macchina elettrica statica (cioè priva di organi in movimento) che converte una **d.d.p.** alternata ε_1 di data frequenza in una **d.d.p.** ε_2 maggiore (**Elevatore di Tensione Alternata**) o minore (**Riduttore di Tensione Alternata**) di uguale frequenza. Tale conversione avviene per effetto di una induzione elettromagnetica fra due circuiti. **Scopo del trasformatore** è sfruttare in regime di corrente alternata il fenomeno dell'induzione elettromagnetica per aumentare la tensione e diminuire simultaneamente la corrente o viceversa. Infatti una corrente alternata in un circuito induce una **f.e.m.** anch'essa alternata in un circuito vicino. Il **Trasformatore** più semplice è quello **monofase** a due avvolgimenti, che nelle sue parti essenziali è composto da:

- 1) un **nucleo di ferro F**, chiuso su se stesso e formato da un insieme di lamine, separate l'una dall'altra da materiale isolante, in modo da ridurre le correnti di **Foucault**
- 2) un **circuito primario P**, costituito da un filo conduttore avvolto intorno ad un lato del nucleo di ferro. Agli estremi di tale circuito viene applicata la **f.e.m.** ε_1 alternata che si vuole trasformare, cioè in esso circola la **corrente d'ingresso** i_1 .
- 3) un **circuito secondario S**, costituito da un filo conduttore avvolto attorno al lato opposto a quello sul quale è avvolto il primario. Dalle estremità del **secondario** (dove esiste la **f.e.m.** ε_2) si preleva la corrente i_2 trasformata, detta **Corrente d'uscita**.

Funzionamento del trasformatore

Quando ai capi del circuito primario viene applicata la **f.e.m.** alternata ε_1 , le spire di tale circuito vengono percorse da una corrente d'intensità periodicamente variabile. A causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica del ferro rispetto al vuoto le linee del campo magnetico passano tutte all'interno del ferro. Le spire del circuito secondario vengono quindi attraversate da un flusso magnetico variabile periodicamente, per cui ai capi del secondario si origina una **f.e.m.** ε_2 indotta variabile periodicamente, cioè una **f.e.m.** alternata. Indicando con N_1 il numero di spire del circuito primario e con Φ_1 il flusso del campo magnetico concatenato con una singola spira, per la legge di **Faraday-Newmann** la d.d.p. $\varepsilon_1(t)$ ai capi dell'avvolgimento abbiamo:

$$\varepsilon_1(t) = -N_1 \cdot \frac{D\Phi_1}{dt}$$

Analogamente, ai capi dell'avvolgimento secondario, formato da N_2 spire attraversate ciascuna da un flusso Φ_2 , si genera la d.d.p. $\varepsilon_2(t)$ (**f.e.m.** indotta): $\varepsilon_2(t) = -N_2 \cdot \frac{D\Phi_2}{dt}$

La presenza del nucleo di ferro fa sì che tutte, o quasi, le linee del campo magnetico passanti all'interno dell'avvolgimento primario attraversino anche il secondario. Per questo motivo possiamo ritenere che i flussi Φ_1 e Φ_2 siano uguali.

Dalle due relazioni precedenti, eseguendo il rapporto membro a membro, otteniamo:

$$\frac{\varepsilon_2(t)}{\varepsilon_1(t)} = \frac{-N_2 \cdot \frac{D\Phi_2}{dt}}{-N_1 \cdot \frac{D\Phi_1}{dt}} \Rightarrow \frac{\varepsilon_2(t)}{\varepsilon_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \varepsilon_2(t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot \varepsilon_1(t) \quad (\text{trasformazione della d.d.p.})$$

Il rapporto $\tau = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon_2(t)}$ si chiama **rapporto di trasformazione**

Nel caso ideale nel quale non si abbia alcuna dissipazione di energia elettrica negli avvolgimenti o nel nucleo, se i_1 e i_2 sono le intensità di corrente in entrata ed in uscita, la potenza elettrica $i_1 \cdot \varepsilon_1(t)$ immessa nel primario è uguale alla potenza $i_2 \cdot \varepsilon_2(t)$ prelevata dal secondario. Questo ci consente di

scrivere: $i_1 \cdot \varepsilon_1(t) = i_2 \cdot \varepsilon_2(t)$ e dedurre: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{\varepsilon_2(t)}{\varepsilon_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$

Se il trasformatore riduce la tensione di un certo fattore, fa aumentare l'intensità di corrente dello stesso fattore e, viceversa, se accresce la tensione, fa diminuire dello stesso fattore l'intensità di corrente

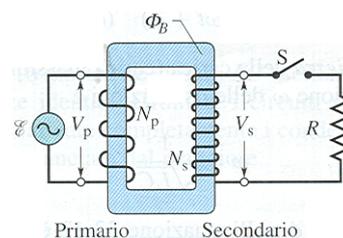
i_1 , $\varepsilon_1(t)$, i_2 , $\varepsilon_2(t)$ possono anche essere intesi come **valori efficaci** delle correnti e delle tensioni esistenti rispettivamente ai capi del primario e del secondario.

$N_2 > N_1 \Rightarrow \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ il trasformatore è detto **elevatore**,

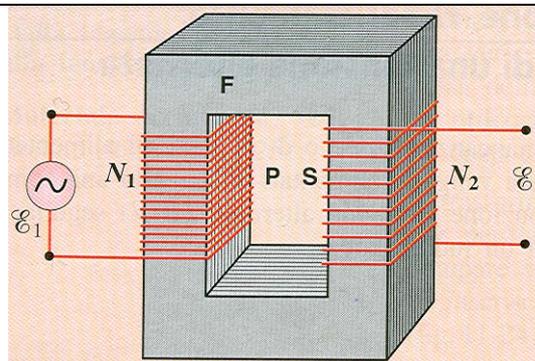
$N_2 < N_1 \Rightarrow \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ il trasformatore è detto **riduttore**,

Un trasformatore non può funzionare in corrente continua: infatti una tensione continua costante che dovesse alimentare il primario non indurrebbe alcuna **f.e.m.** nel secondario, perché il flusso concatenato con entrambi gli avvolgimenti sarebbe costante nel tempo.

Un **trasformatore ideale** è costituito da 2 bobine avvolte su un nucleo di ferro, inserito in un circuito di trasformazione. Un generatore di **c.a.** lancia una corrente nella bobina di sinistra (il **primario**). La bobina di destra (il **secondario**) è collegata al carico resistivo R quando si chiude l'interruttore S.



Trasformatore. Alimentando il circuito primario con una **f.e.m. alternata** $\varepsilon_1(t)$, nel secondario si genera, per induzione elettromagnetica, una **f.e.m. alternata** $\varepsilon_2(t)$ avente la stessa frequenza



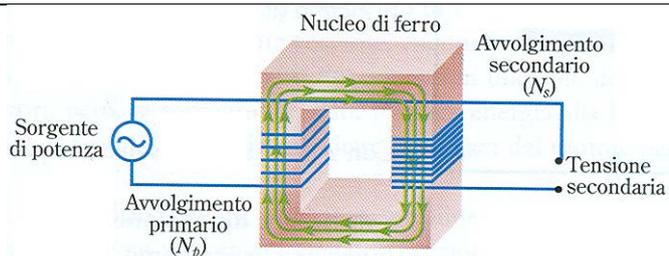
Trasformatore

$$N_2 > N_1 \Rightarrow \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

il trasformatore è detto **elevatore**

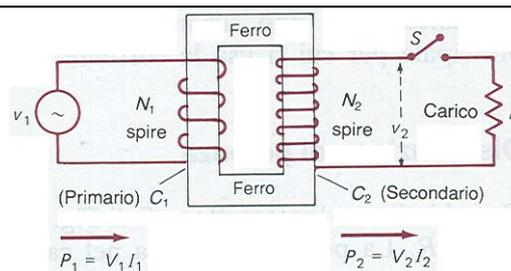
$$N_2 < N_1 \Rightarrow \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

il trasformatore è detto **riduttore**



Una versione semplificata di un **trasformatore monofase**. Per tale trasformatore valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\varepsilon_2(t)}{\varepsilon_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$



Problema (Silva Montalbetti pagina 260)

Fra i due poli A e B di una presa di corrente alternata della rete di distribuzione esiste una differenza di potenziale istantanea $f = f_o \cdot \sin \omega t$. La frequenza di rete è $\nu = 50 \text{ Hz}$.

1) Fra A e B si inserisce una resistenza ohmica $R = 100 \Omega$. Un amperometro per corrente alternata ci indica che l'intensità efficace della corrente che attraversa il circuito è $i_{eff} = 2,2 \text{ A}$. Scrivere l'espressione della differenza di potenziale istantanea ai capi A e B.

$$i = i_o \cdot \sin \omega t \quad f = f_o \cdot \sin \omega t \quad \omega = 2\pi\nu = 6,28 \cdot 50 = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$i = i_{eff} \cdot \sqrt{2} = 2,2 \cdot \sqrt{2} = 3,1 \text{ A} \quad f_o = R \cdot i_o = 100 \cdot 3,1 = 310 \text{ V} = 220\sqrt{2} \text{ V}$$

$$f = 220\sqrt{2} \cdot \sin 100\pi t = 220\sqrt{2} \cdot \sin 314 t = 310 \cdot \sin 314 t$$

2) Si toglie la resistenza R e si inserisce tra A e B una bobina di induttanza L della quale si trascura la resistenza ohmica. L'amperometro misura ancora $i_{eff} = 2,2 \text{ A}$. Calcolare il coefficiente di autoinduzione della bobina.

$$f_o = \frac{i_o}{L\omega} \Rightarrow L = \frac{f_o}{i_o \cdot \omega} = \frac{310}{3,1 \cdot 314} = 0,32 \text{ H}$$

3) Tra A e B si inseriscono in serie la resistenza R e l'induttanza L dei casi precedenti. Scrivere l'espressione dell'intensità istantanea i della corrente alternata che attraversa il circuito.

$$i = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{dobbiamo calcolare } i_o \text{ e } \varphi. \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{314 \cdot 0,32}{100} = 1,0048 \sim 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$i_o = \frac{f_o}{Z} = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{310}{\sqrt{10000 + 1096}} = \frac{310}{141,76} = 2,2 \text{ A}$$

$$i = i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi) = 2,2 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) = 2,2 \cdot \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

4) Tra A e B si inseriamo anche un condensatore di capacità C. Calcolare il valore di C affinché l'intensità efficace della corrente sia ancora $i_{eff} = 2,2 \text{ A}$. (Circuito RLC)

$$Z = \frac{f_o}{i_o} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow f_o = i_o \cdot Z = i_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot Z$$

La tensione applicata ai capi A e B del circuito RLC è sempre la stessa, cioè con la tensione applicata al circuito iniziale quando era presente soltanto la resistenza ohmica.

Per tale circuito avevamo trovato $f_o = R \cdot i_o = R \cdot i_{eff} \cdot \sqrt{2}$

$$f_o = i_o \cdot Z = i_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot Z \quad \text{et} \quad f_o = R \cdot i_o = R \cdot i_{eff} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow R = Z \Rightarrow R^2 = Z^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow$$

$L\omega = \frac{1}{\omega C}$ Il circuito RLC è in condizione di risonanza.

$$L\omega = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(314)^2 \cdot 0,32} = \frac{1}{31550,72} = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

5) Calcolare le differenze di potenziale istantanee ai capi di R, L, C.

$$V_R = R \cdot i_o \cdot \sin(\omega t - \varphi) = R \cdot i_o \cdot \omega t = 220\sqrt{2} \cdot \sin 100\pi t$$

$$V_L = Z_L \cdot \sin(\omega t - \varphi) = L \cdot \omega \cdot i_o \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = L \times \omega \cdot i_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 220\sqrt{2} \cdot \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_C = Z_C \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{i_o}{\omega \cdot C} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i_{eff} \cdot \sqrt{2}}{\omega \cdot C} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 220\sqrt{2} \cdot \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Il valore massimo della tensione ai capi di C è uguale al valore massimo della tensione ai capi di L.

In un circuito RLC abbiamo: $R=160\Omega$, $C=15\mu\text{F}$, $L=230\text{mH}$, $\nu=60\text{Hz}$, $f_o=36\text{V}$.

Calcolare: a) L'ampiezza della corrente b) la costante di fase φ .

$$\text{a) } i_o = \frac{f_o}{Z} \quad Z = \frac{f_o}{i_o} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

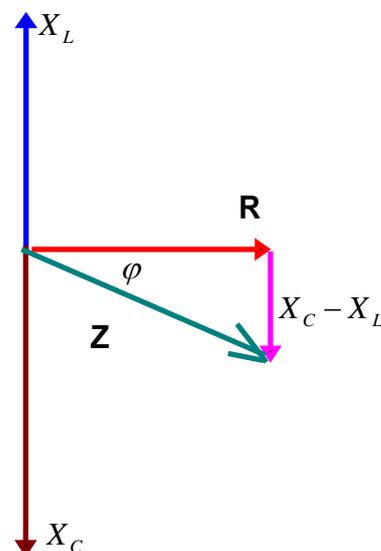
$$X_L = \omega L = 2\pi\nu = (6,28) \cdot 60 \cdot 230 \cdot 10^{-3} = 86,7\Omega \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(6,28) \cdot 60 \cdot 15 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^5}{565,2} = 177\Omega$$

$$Z = \sqrt{25600 + (90,3)^2} = \sqrt{25600 + 8154,09} = \sqrt{33754,09} = 184\Omega \quad i_o = \frac{f_o}{Z} = \frac{36}{184} = 0,196\text{ A}$$

$$\text{b) } \text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{86,7 - 177}{160} = -0,564$$

$$\varphi = \text{arctg}(-0,564) = -\text{arctg}(0,564) = -29,42^\circ \sim -0,513\text{ rad}$$

Siamo in presenza di un **circuito prevalentemente capacitivo**.



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Effetto termoionico

L'**effetto termoelettronico** (detto impropriamente **effetto termoionico**) o **effetto Edison** (in quanto da questi scoperto nel 1843) consiste nell'emissione di **elettroni di conduzione** da parte di un metallo portato a temperatura sufficientemente elevata.

Questo fenomeno può essere messo in evidenza con la seguente esperienza. Un'ampolla vuota contiene un filamento **F** di tungsteno, portato all'incandescenza mediante il passaggio di corrente, e una placca metallica **P** isolata e collegata con l'elettroscopio **E**. Carichiamo il sistema placca-elettroscopio a filamento freddo, quando cioè in **F** non circola corrente. Indi riscaldiamo il filamento **F** facendovi passare la corrente mediante la batteria **B**. Quando il filamento si riscalda, l'elettroscopio **E** si scarica se era caricato positivamente, mentre mantiene la sua carica se era caricato negativamente. Ciò prova che il filamento emette elettroni. Infatti nel primo caso gli elettroni sono attratti dalla placca e ne neutralizzano la carica, nel secondo caso sono respinti verso il filamento e non varia la carica dell'elettroscopio. L'effetto termoionico è regolato dalla legge di **Richardson-Fermi** espressa dalla seguente relazione:

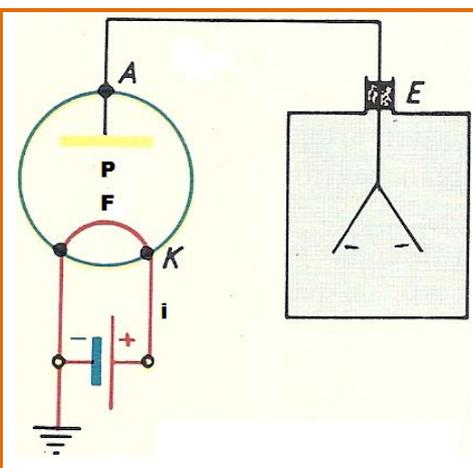
$$J = A \cdot T^2 \cdot e^{\frac{-\Phi}{kT}} \quad \text{dove} \quad J = \frac{q}{t \cdot S} = \frac{i}{S} = \text{densità della corrente termoelettronica} =$$

numero di elettroni emessi in un secondo attraverso l'unità di superficie del filamento

$$A = 6 \cdot 10^5 \frac{A}{m^2 \cdot K^2} = \text{costante uguale per tutti i metalli} \quad e = \text{base dei logaritmi naturali}$$

k = **costante di Boltzmann** Φ = **lavoro di estrazione** del metallo

Noi sappiamo che in prossimità della superficie esterna di un metallo ogni elettrone di conduzione incontra una barriera di potenziale che lo respinge verso l'interno. A temperatura ambiente l'energia cinetica degli elettroni di conduzione non è sufficiente a farli fuoriuscire dalla superficie delimitante il metallo cui essi appartengono. Poiché con l'aumentare della temperatura cresce l'energia cinetica degli elettroni di conduzione, c'è da attendersi che, a temperature piuttosto elevate, gli elettroni di conduzione riescano a fuoriuscire dalla superficie esterna del metallo. Edison osservò sperimentalmente che nel 1890 che un filamento metallico portato all'incandescenza posto nel vuoto emette elettroni spontaneamente.



La spiegazione dell'effetto termoionico è la seguente. Alla superficie di un qualsiasi metallo esiste un **doppio strato** di cariche elettriche, **negativo** verso l'esterno e **positivo** verso l'interno,

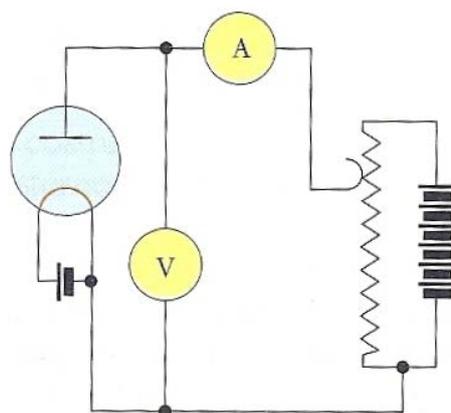
U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

poiché in ogni atomo la parte esterna è costituita da una nuvola elettronica negativa. A temperatura ambiente l'energia cinetica posseduta da ogni elettrone di conduzione non è in grado di farli uscire dal metallo. Aumentando la temperatura del metallo aumenta l'energia cinetica media dei ioni del reticolo e quindi anche quella degli elettroni di conduzione. Se l'elettrone di conduzione acquista una energia cinetica $T_e > \Phi$ esso viene espulso dal metallo.

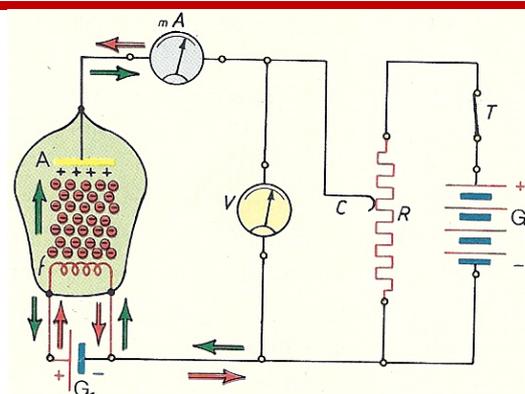
Diodo

Sull'effetto termoionico si basa il funzionamento del **diodo**, costituito da un'**ampolla di vetro** in cui è fatto il vuoto e nella quale si trovano due elettrodi, un filamento, detto **catodo**, e una superficie metallica, detta **placca**.

Schema di un circuito per lo studio della corrente che circola attraverso un diodo. Gli elettroni di conduzione di un metallo, pur soggetti all'agitazione termica, sono confinati all'interno del metallo da una **barriera di potenziale**. Se si fornisce agli elettroni, mediante riscaldamento, un'energia sufficiente a superare la barriera (**energia di estrazione**) si ha emissione di elettroni da parte del metallo: in questo consiste l'effetto termoionico.



Le frecce di colore verde indicano il verso del flusso termoelettronico, mentre quelle di colore rosso indicano il verso convenzionale della corrente.



In un'ampolla di vetro **C** è fissato un **filamento F** (per esempio di tungsteno) portato all'incandescenza da un **accumulatore B_f** la cui tensione può limitarsi a (**2 → 4 volt**).

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Esso costituisce la **batteria di accensione**; la tensione che fornisce è la **tensione di accensione**. Il filamento è circondato da una **placca P** metallica. In **C** è fatto un vuoto estremamente spinto ($p \approx 10^{-7} \text{ mm Hg}$). Tra filamento e placca, mediante il **potenziometro M₊M₋** è applicata la **d.d.p.** $V_a = V_P - V_F$ (misurata dal voltmetro **V** e detta **potenziale anodico** o **potenziale di placca**) variabile, per esempio da **-200 V** e **+200 V** mediante la **batteria di placca B_a**. Nel **circuito di placca FPM₊M₋F** è inserito un amperometro **A**, abbastanza sensibile per misurare una eventuale **corrente di placca i_a** che attraversi lo spazio **FP** sotto l'azione del **potenziale di placca V_a**. L'ampolla, con i suoi elettrodi **F** e **P**, dicesi **diode**.

Le forme del filamento e della placca possono essere svariate. Molto comune è la simmetria cilindrica. Se nel filamento **F** non circola corrente, **A** non segnala passaggio di corrente anodica **i_a** anche se **V_a** crea tra **F** e **P** un campo elettrico la cui intensità può andare oltre il valore di $10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

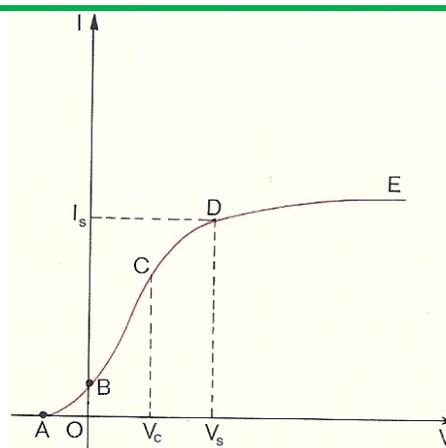
Se il filamento **F** è reso incandescente, e se è $V_a > 0$ (cioè $V_P > V_F$) il galvanometro **A** segnala una **corrente di placca i_a**, che con le convenzioni solite, fluisce dalla placca **P** al filamento **F** attraverso il vuoto. La corrente **i_a** è dovuta al flusso di elettroni emessi per effetto termoelettronico dal filamento **F** e raccolti dall'anodo costituito dalla placca **P**.

La **funzione caratteristica i_a = f(V_a)**, per una data temperatura **T** del filamento, ha la forma indicata in figura.

Curva caratteristica di un diodo

Nel tratto **ABC** la corrente termoelettronica è limitata dalla carica spaziale.

Il tratto **CD** è di transizione mentre il tratto **DE** corrisponde alla saturazione.



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Perciò V_a dicesi anche **potenziale anodico** e i_a è l'intensità di **corrente anodica**, **F** dicesi **catodo** e **P** dicesi **anodo** del diodo. **B_a** dicesi **batteria anodica**. (Per $V_a = 0$ si ha una lieve corrente di placca i_a). Al variare della temperatura **T** del filamento, muta la curva caratteristica << **tensione di placca-corrente di placca**). La **corrente di saturazione** $i_{a,sat}$ cresce rapidamente con la temperatura. Per un dato filamento, in un dato diodo, i_a è funzione di V_a e della temperatura **T** del filamento incandescente.

La **corrente anodica** che circola è regolata da due leggi:

1) Formula di Richardson (FERMI) $J_{sat} = A \cdot T^2 \cdot e^{\frac{-\Phi}{KT}}$ [1] dove:

J_{sat} = **densità superficiale di corrente di saturazione** = intensità di corrente anodica di saturazione riferita alla superficie **S** del filamento = $\frac{i_{a,sat}}{S}$

A può considerarsi come una costante universale

T = temperatura assoluta del filamento

e = base dei logaritmi naturali

K = **costante di Boltzmann**

Φ = **lavoro di estrazione** di un elettrone dal catodo

Il diagramma della formula di Richardson è indicato in figura.

2) Formula di Child-Langmuir

Nel tratto OP della curva di equazione $i_a = f(V_a)$ che precede il flesso che preannunzia l'esistenza di una saturazione della corrente la densità superficiale di corrente anodica **J** che attraversa il diodo

è ben rappresentata dalla formula di **Child-Langmuir**: $J = \frac{i_a}{S} = K \cdot V_a^{\frac{3}{2}}$ [2]

ove **K** è una costante dipendente dalla natura del filamento incandescente e dalla forma geometrica del diodo, ma non dipende dal diodo.

La [1] governa il **regime di saturazione** o di **Richardson** al variare della temperatura.

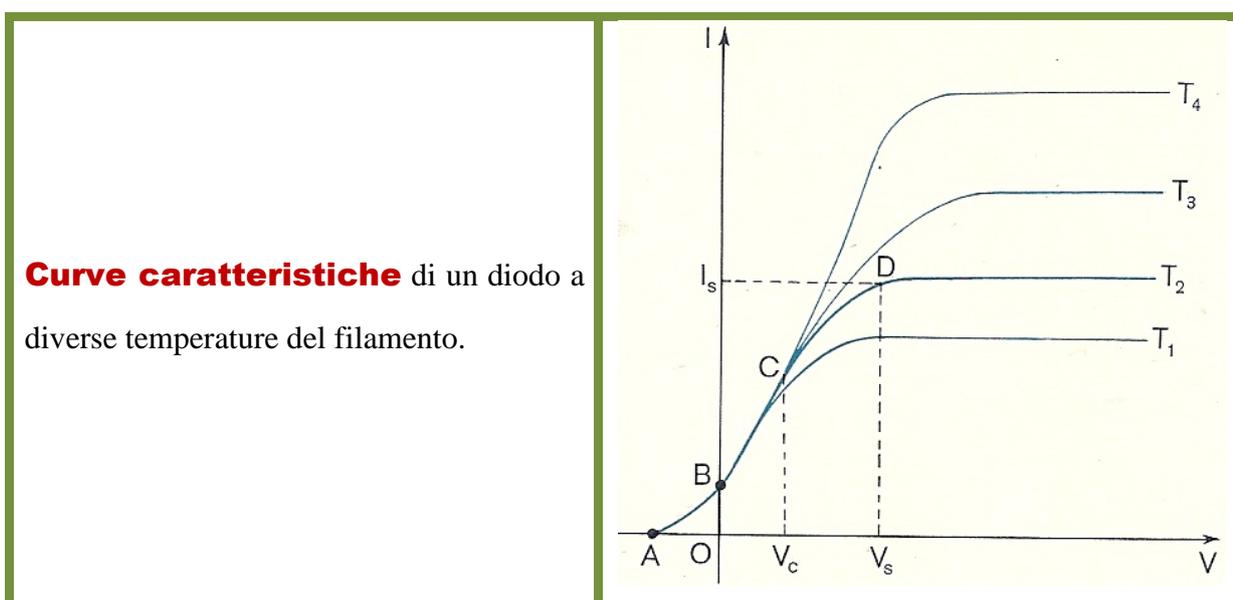
La [2] governa il **regime** detto di **carica spaziale** o di **Child-Langmuir** al variare del **potenziale di placca**. Il funzionamento del diodo si giustifica in base alle seguenti considerazioni. Il filamento **F** portato all'incandescenza emette elettroni. L'uscita degli elettroni dal filamento **F** lascia quest'ultimo con un eccesso di carica positiva.

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

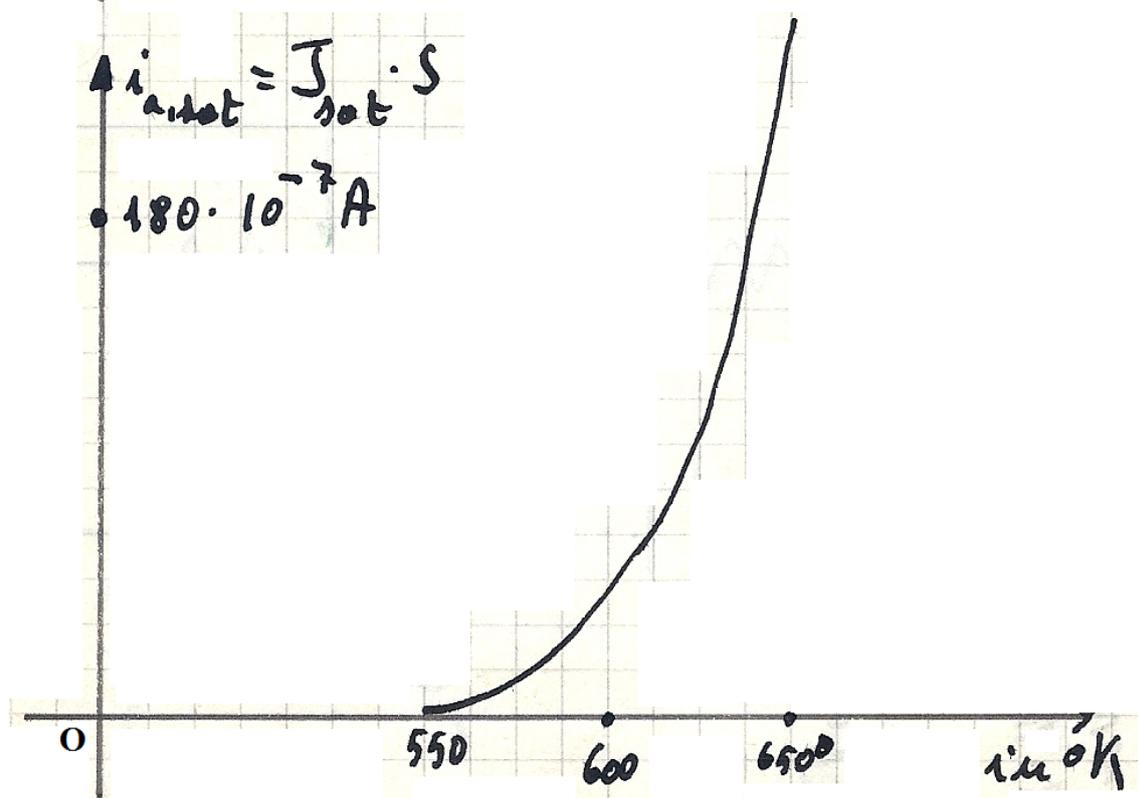
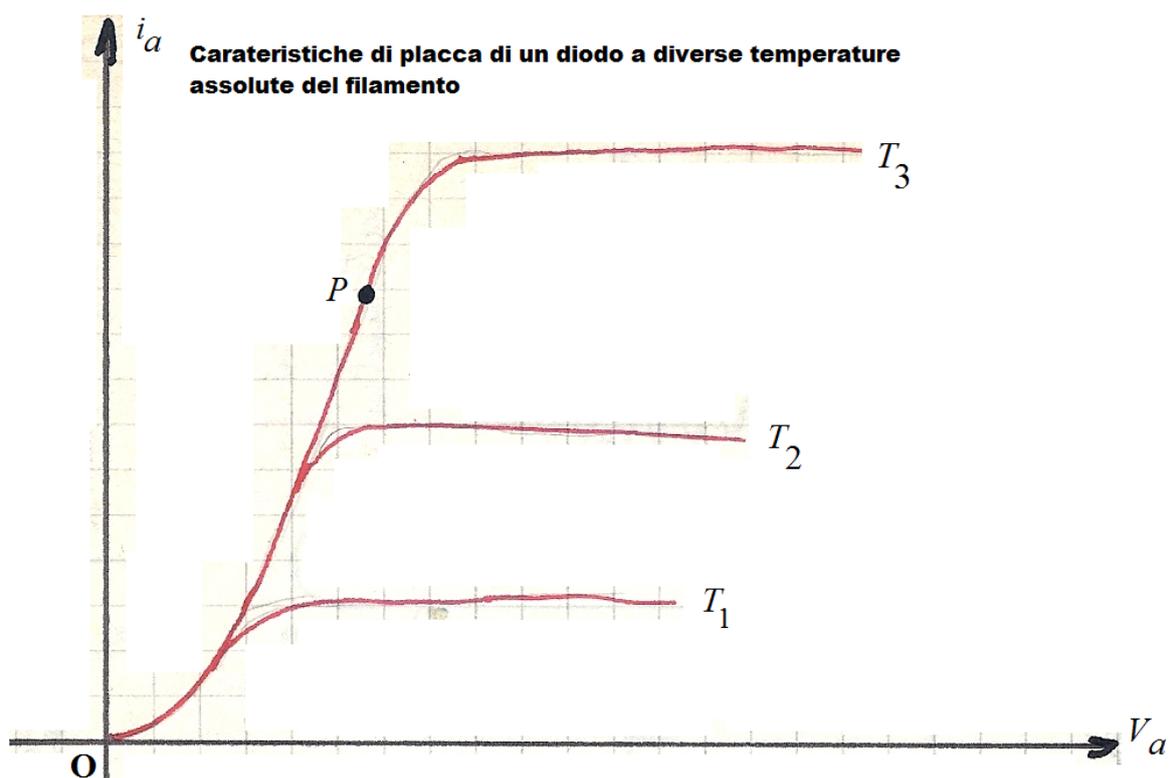
Gli elettroni sono attratti da **F** e formano una specie di **nuvola di cariche negative**. Se vicino al conduttore che emette elettroni si pone un secondo conduttore a potenziale più elevato, gli elettroni sono attratti da esso e finchè viene mantenuta una certa d.d.p. fra i due conduttori, si ha un flusso continuo di elettroni dall'emettitore detto **catodo** al conduttore che riceve gli elettroni detto **anodo**. Se V_a non è sufficientemente elevata solo pochi elettroni raggiungono la placca in quanto la maggior parte penetrano poco nella **scarica spaziale** e ricadono sul catodo. Aumentando V_a aumenta il numero di elettroni che cadono sulla placca. A questo punto un ulteriore aumento del potenziale di placca V_a non porta ad un aumento della corrente, per cui si dice che il diodo è in **saturatione**.

Il diodo trova applicazione come **regolatore di corrente** e come **raddrizzatore di corrente alternata**. Il diodo si comporta da **regolatore di corrente** se il potenziale $V_a = V_p - V_f$ oscilla, mantenendosi però sempre così elevato da dar luogo costantemente alla corrente di saturazione. In questo caso si trae dal diodo una corrente i_a indipendente dalla tensione.

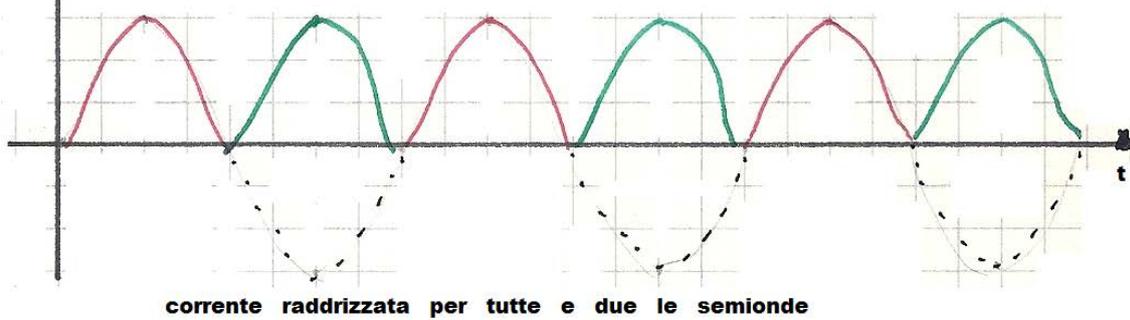
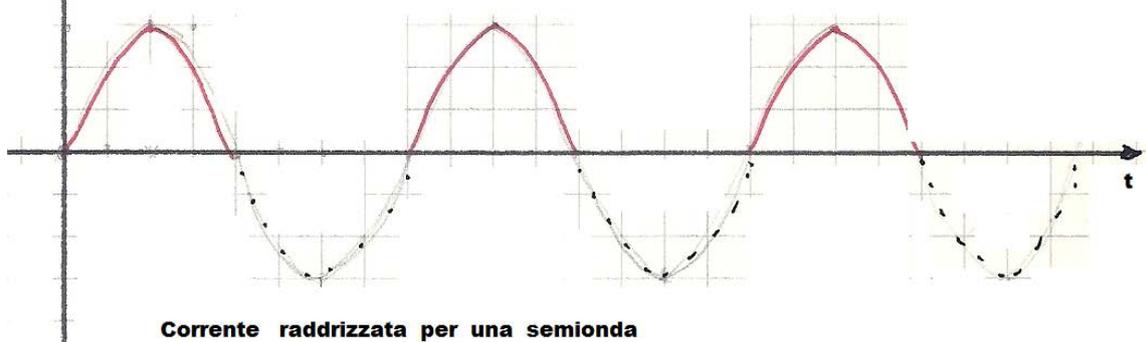
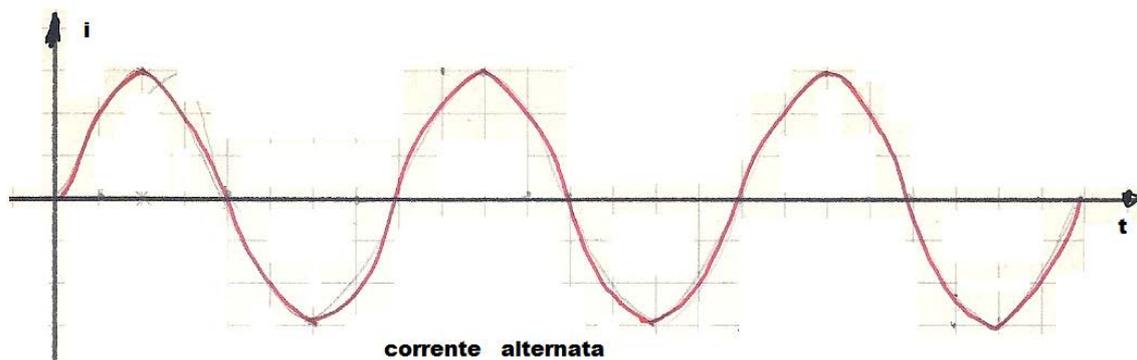
Il diodo si comporta da **raddrizzatore** se fra la placca ed il filamento applichiamo una d.d.p. alternata. In questo caso il diodo conduce l'elettricità solo durante i semiperiodi nei quali la placca è positiva. Si ottiene in tal modo nel circuito di placca una **corrente raddrizzata per una semionda**. Utilizzando un **diodo a due placche** (equivalente a due diodi) otteniamo una **corrente in cui sono raddrizzate tutte e due le semionde**.



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Triodo

Il **triodo** è un diodo al quale si aggiunge, tra filamento e placca, un griglia **G** che è di rete metallica, a maglie notevolmente larghe o è costituita, più semplicemente, da un filo metallico sottile avvolto ad elica attorno al filamento. Le spire dell'elica sono abbastanza rade da non costituire un apprezzabile ostacolo meccanico per gli elettroni che dal catodo (Filamento **F**) fluiscono alla placca **P**. L'ampolla **C**, nella quale è fatto un vuoto estremamente spinto, ha, dunque, **tre elettrodi fondamentali**: **F**, **G**, **P** e dicesi **valvola a tre elettrodi**, o **tubo termoelettronico a tre elettrodi**, o **triodo** o **audion**. Invero il filamento **F** ha due elettrodi $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ che vanno alla batteria di accensione **B_f** che genera il riscaldamento. Fissata la temperatura del filamento, e quindi l'intensità del flusso elettronico che ne può sgorgare, sono ancora **parametri caratteristici** del triodo il **potenziale di placca** $V_a = V_P - V_F$, il **potenziale di griglia** $V_g = V_G - V_F$ fornito ad esempio da una batteria di pile (**batteria di griglia B_g**), la **corrente di griglia** i_g , la **corrente di placca** i_a . i_g è costituita solo dagli elettroni che sono captati dalla griglia, e i_a è costituita solo dagli elettroni che giungono alla placca. Le frecce indicano il verso di i_a e i_g secondo la consueta convenzione. Nel dispositivo della figura si distinguono un: **(1) circuito di placca** costituito da **B_a**, da **P** e da **F**. La corrente passa quando **P** è positivo.

i_a = **corrente di placca** o **corrente anodica**

$V_a = V_P - V_F$ = **potenziale di placca** o potenziale anodico

(2) circuito di accensione del filamento

(3) circuito di griglia costituito da **B_g**, **G**, **F**.

$V_g = V_G - V_F$ = **potenziale di griglia** i_g = **corrente di griglia**

I poli negativi di **B_a**, **B_g**, **B_f** sono collegati fra loro e messi a terra. La corrente in **X₀** sia i_0 . Per la conservazione dell'elettricità abbiamo: $i_0 = i_a + i_g$ dove i_0 , al massimo, può essere la corrente elettronica di saturazione emessa da **F**. Il reostato **R** serve a fare variare entro certi limiti la temperatura del filamento.

La presenza della griglia modifica la corrente i_a . Infatti potendo rendere V_g variabile mediante il dispositivo potenziometrico indicato in figura, si verifica che gli elettroni emessi dal filamento sono

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

accelerati quando V_g è positivo, sono ritardati quando V_g è negativo. Pertanto col triodo possiamo variare la **corrente anodica** i_a variando il **potenziale di griglia** V_g . Se V_g non è negativo, la griglia intercetta un certo numero di elettroni emessi dal filamento e nel circuito di griglia circola una **corrente di griglia** i_g . Un triodo è individuato dai seguenti fasci di caratteristiche: $i_a = f(V_g, V_a)$ **caratteristiche di placca**

$$i_g = f(V_g, V_a) \quad \text{caratteristiche di griglia}$$

Come parametro si assume di regola V_a . Particolarmente importanti sono le cosiddette **caratteristiche statiche** $i_a = f(V_g)$ per $V_a = \text{costante}$.

In figura sono indicate, per un certo valore di V_a (ad esempio 100V) la **caratteristica di placca** $i_a = f(V_g)$ e la **caratteristica di griglia** $i_g = f(V_g)$.

Da questo diagramma si scorge che i_a varia da zero ad un valore massimo della corrente di saturazione e vi è un tratto per cui i **valori di i_a variano proporzionalmente con le variazioni del potenziale di griglia**, cioè lungo il tratto rettilineo obliquo della curva $i_a = f(V_g)$, sopra al <<ginocchio>> **M**. In quanto alla corrente di griglia, essa è nulla finché il potenziale V_g è **negativo** perché in tal caso gli elettroni sono respinti al filamento, oppure attraversano la griglia e giungono alla placca. Poi col **crescere** di V_g anche i_g cresce ed il suo valore massimo dipende dalla temperatura del filamento e dal potenziale di griglia, ma in ogni caso è sempre minore di i_a . In particolare, si osservi che per V_g **fortemente negativo** (nel nostro caso $V_g < -10\text{Volt}$) si ha $i_a = 0$, $i_g = 0$, cioè la griglia respinge tutti gli elettroni. Per V_g **debolmente negativo** (nel nostro caso $-10\text{Volt} < V_g < 0V$) gli elettroni non possono fissarsi sulla griglia, cioè $i_g = 0$; alcuni sono frenati, altri pochi ne passano alla placca e si ha i_a **debole dapprima, e poi cresce rapidamente** (oltre i $-5V$) **e proporzionalmente alle variazioni di V_g** . Il valore $V_g = -10V$ (punto **D** della curva) per cui $i_a = 0$ dicesi **potenziale di interdizione**. Per V_g crescente per valori positivi (nel nostro caso $0 < V_g < 10\text{Volt}$), i_g cresce quasi proporzionalmente, i_a cresce dapprima proporzionalmente, poi meno rapidamente sino ad un

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

valore di saturazione; gli elettroni sono accelerati da V_g e in parte assorbiti dalla griglia. Per V_g **sufficientemente grande** (nel nostro caso $V_g > 20$ volt), i_g e i_a sono a **regime di saturazione**: tutti gli elettroni emessi da **F** sono accelerati dalla griglia e in parte formano la corrente di griglia, mentre gli altri formano la corrente di placca.

Queste considerazioni valgono per un determinato valore di V_a (nel nostro caso 100V), ma variando questo si avrebbero altre curve sostanzialmente simili a quelle descritte, ma coi tratti ricurvi a gomito e con valori di saturazione alquanto diversi.

Le relazioni esistenti fra i vari potenziali degli elettrodi e le correnti che circolano nel triodo sono espresse comunemente in funzione dei **coefficienti caratteristici** del triodo. I più utili sono il **coefficiente di amplificazione** μ , la **resistenza di placca** o anodica o resistenza interna, la **conduttanza di placca** o impedenza o conduttanza mutua, la **trasconduttanza**. Il **coefficiente di amplificazione** μ è il rapporto cambiato di segno tra una piccola variazione nel valore della tensione anodica ed una piccola variazione nel potenziale di griglia capace di mantenere costante la corrente di placca:
$$\mu = - \left(\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} \right)_{i_a = \text{costante}}$$

La resistenza di placca (o anodica o interna) r_p (oppure ρ) è il rapporto tra una piccola variazione nel valore della tensione anodica ed una piccola variazione di corrente anodica che essa produce, quando viene mantenuta costante la tensione di griglia:
$$\rho = r_p = \left(\frac{\Delta V_a}{\Delta i_a} \right)_{V_g = \text{costante}}$$

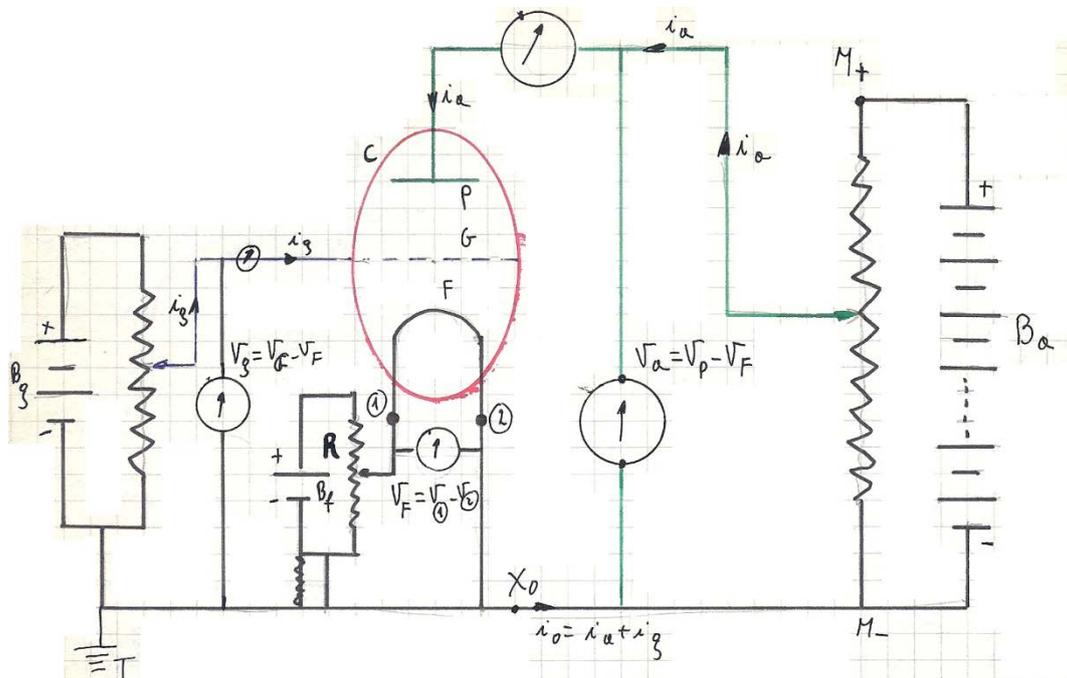
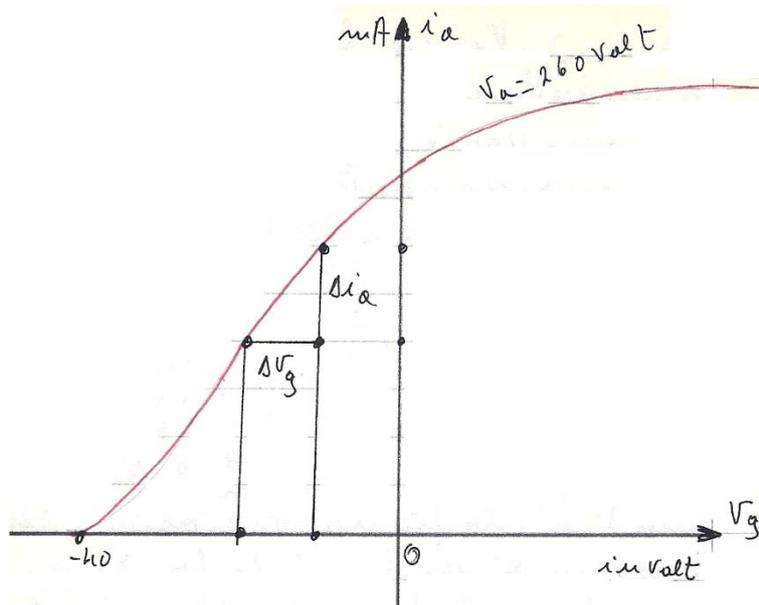
La **conduttanza di placca** (o **pendenza** o **conduttanza mutua**) g_p è il rapporto tra una variazione di corrente anodica e la corrispondente variazione della tensione di griglia per

$$V_a = \text{costante}. \quad g_p = \frac{1}{r_p} = \left(\frac{\Delta i_a}{\Delta V_g} \right)_{V_a = \text{costante}}$$

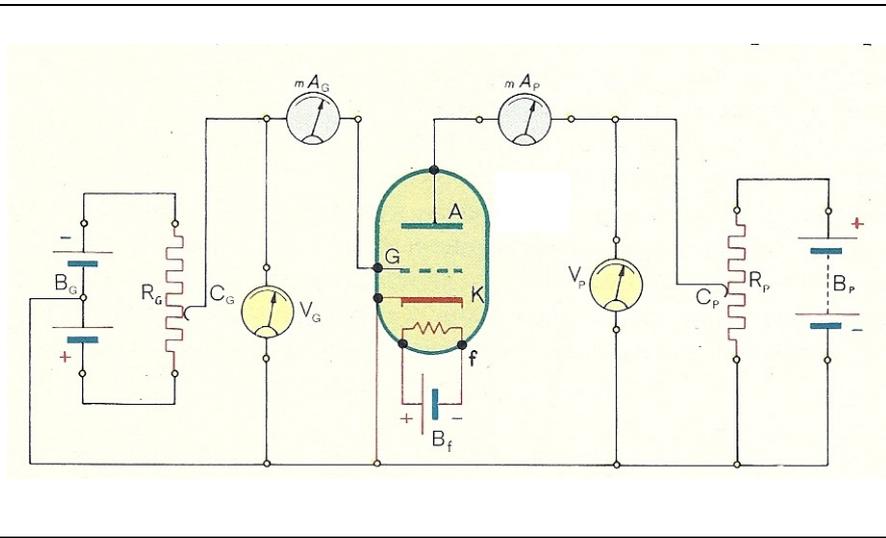
La **trasconduttanza** g_m è il rapporto tra la piccola variazione della corrente anodica e la piccola variazione della tensione di griglia che la produce, quando viene mantenuta costante la

$$\text{tensione di placca: } g_m = \left(\frac{\Delta i_a}{\Delta V_g} \right)_{V_a = \text{costante}}$$

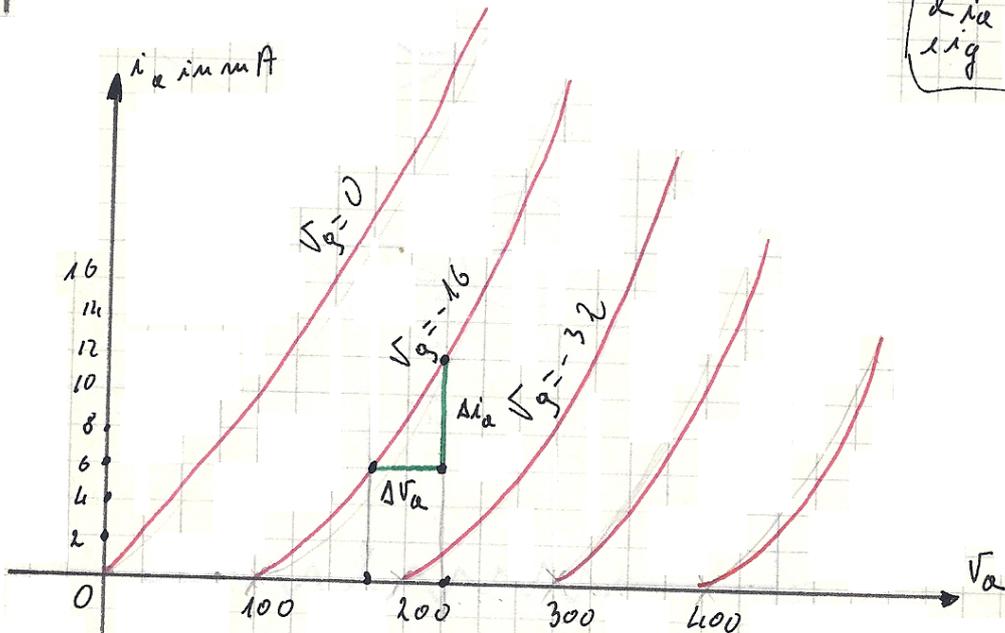
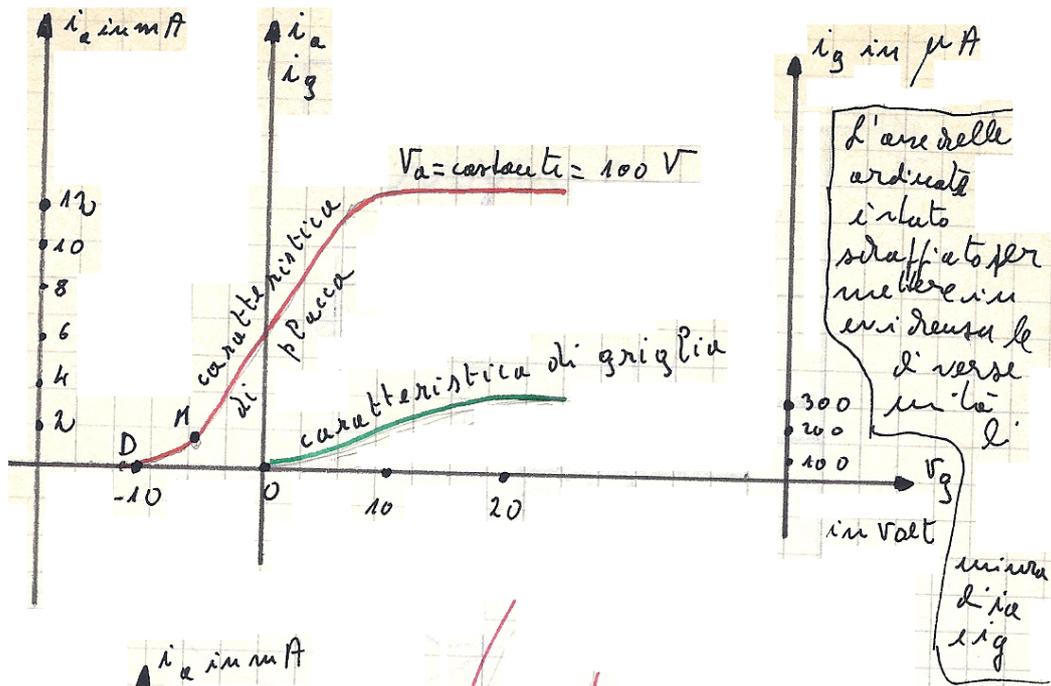
U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico



Triodo o valvola a tre elettrodi. Nell'ampolla a vuoto spinto sono posti tre elettrodi: il **catodo K** col **filamento f** alimentato dal **generatore B_f**, la **placca A** che fa da anodo e la griglia **G**. Sono presenti un generatore di corrente continua **B_p**, un milliamperometro **mA_p**, un voltmetro **V_p**.



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico



Curve caratteristiche di un triodo.

La corrente anodica i_a è espressa in funzione della tensione anodica V_a per determinati valori del potenziale di griglia V_g

Il triodo può essere usato come: **(1) Voltmetro** termoelettronico **(2) Amplificatore** per tensione alternata **(3) raddrizzatore** **(4) oscillatore**

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Effetto fotoelettrico

L'**effetto fotoelettrico** (o fotoelettronico) è detto anche effetto **Hertz - Hallwachs** dai nomi di chi lo scoprì (**Hertz** 1887) e di chi lo studiò a fondo e ne definì bene le cause (**Hallwachs** nel 1899). Esso consiste nell'**emissione di elettroni da parte di una superficie metallica quando su di essa incide luce** (onde elettromagnetiche) **di frequenza ν sufficientemente elevata** (cioè di lunghezza d'onda λ sufficientemente piccola), come raggi ultravioletti, raggi **X** o raggi γ . L'esperienza si esegue facilmente con certi metalli. Una lastra di zinco **P**, a superficie ben pulita, è fissata all'asta di un elettroscopio **E** caricato negativamente. Indi si illumina la lastra con luce contenente radiazioni ultraviolette (arco voltaico ad elettrodi di carbone, oppure lampada a vapori di mercurio con ampolla di quarzo). Questo prova che da parte dello zinco si ha una emissione di elettroni. Diamo una spiegazione di questo fenomeno, cioè dell'espulsione di elettroni da parte di alcuni metalli quando su di essi incide luce (onde elettromagnetiche) di opportuna frequenza. Gli effetti dell'**interferenza** e della **diffrazione** conducono alla inevitabile conclusione sulla natura ondulatoria della luce. L'accordo tra la velocità della luce misurata e la velocità della luce calcolata delle onde elettromagnetiche, indica a sua volta che le onde luminose sono onde elettromagnetiche. L'effetto fotoelettrico è in contrasto con la teoria elettromagnetica classica della luce. Secondo la teoria moderna (dei metalli) un conduttore metallico è formato da un reticolo di ioni positivi immersi in un <<mare>> di elettroni liberi in moto disordinato. Uno di questi elettroni che si avvicina alla superficie non può attraversarla a causa della **barriera di potenziale** (cioè a causa della d.d.p. esistente fra l'interno del metallo e lo spazio circostante). Se tuttavia della luce di lunghezza d'onda sufficientemente piccola incide sulla superficie del metallo, alcuni elettroni possono acquistare una energia sufficiente per superare la **barriera di potenziale** ed essere raccolti da un corpo carico positivamente.

Le leggi dell'effetto fotoelettrico dedotte dall'esperienza sono le seguenti:

- 1)** L'**emissione degli elettroni** dalla superficie del metallo non presenta direzioni privilegiate; l'emissione è uniformemente diffusa
- 2)** La **velocità degli elettroni emessi** non dipende dall'intensità della radiazione incidente (intensità della luce) ma dipende soltanto dalla sua frequenza ν . Questo è in contrasto con la teoria classica dell'elettromagnetismo.

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

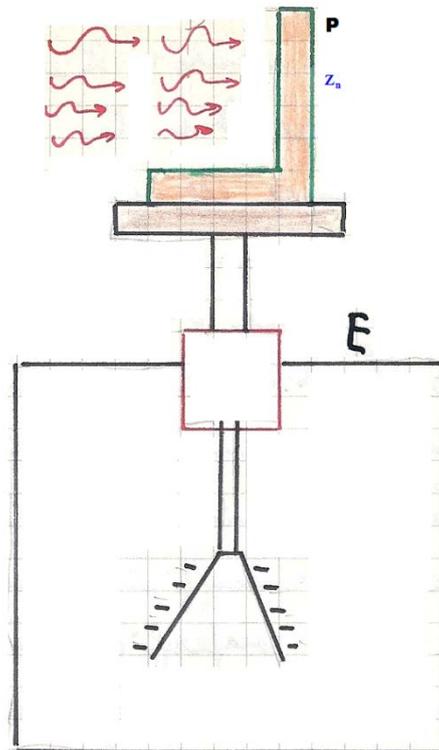
3) L'**emissione di elettroni** da parte di un determinato metallo si ha quando la frequenza ν della radiazione incidente è maggiore di un certo valore ν_0 detto **soglia fotoelettrica**. Il valore ν_0 varia da metallo a metallo. Secondo la teoria classica dell'elettromagnetismo l'effetto fotoelettrico si dovrebbe verificare sempre. Infatti secondo questa teoria l'energia incidente si distribuisce uniformemente tra tutti gli elettroni della superficie metallica e quindi, pur di attendere un tempo necessario, questi elettroni, assorbita una energia pari al lavoro di estrazione, dovrebbero essere espulsi, cioè ogni elettrone di conduzione dovrebbe essere espulso dal metallo quando ha assorbito una dose sufficiente di energia.

4) Il **numero di elettroni emessi per unità di tempo ed unità di superficie** è proporzionale all'intensità della radiazione incidente (illuminamento)

5) Il **fenomeno di emissione ha inizio e cessa non appena la luce incide sulla superficie metallica**. Anche in questo caso c'è contrasto con la teoria elettromagnetica della luce. Infatti se l'intensità luminosa è abbastanza piccola ci dovrebbe essere un ritardo di tempo misurabile fra l'arrivo della luce sulla superficie e l'emissione del fotoelettrone. Durante questo intervallo di tempo l'elettrone dovrebbe assorbire energia dal fascio di luce incidente finché non ne ha accumulata abbastanza per uscire dal metallo. Invece non è stato mai misurato alcun ritardo, nemmeno con luce incidente pochissimo intensa.

Un metallo, colpito da radiazioni luminose di frequenza sufficientemente elevata, emette elettroni. Consiste in questo l'**effetto fotoelettronico** detto anche **effetto fotoelettrico**.

L'interpretazione qualitativa del fenomeno è abbastanza semplice: gli elettroni di conduzione ricevono dalla luce l'energia necessaria per superare la barriera di potenziale superficiale ed uscire dal metallo.



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico fu data per la prima volta da **Einstein** nel 1902. L'interpretazione quantistica di Einstein è la seguente. D'accordo con la teoria dei quanti di **Planck**, la luce incidente è costituita da granuli aventi, ciascuno, l'energia **$h\nu$ (fotoni)**. Ciascun fotone o **atomo di energia** va pensato non dissimile da un proiettile avente la velocità della luce. Quando un fotone urta un elettrone alla superficie di un metallo, esso cede la sua energia all'elettrone. Questo trasferimento di energia è un processo <<**tutto o niente**>> in quanto l'elettrone o acquista tutta l'energia del fotone o non ne acquista affatto. Il fotone, nel primo caso, scompare. Pertanto un elettrone del metallo, se assorbe un fotone, può disporre del quantum di energia << **$h\nu$** >>. Però, penetrando la barriera di potenziale, l'elettrone perde l'energia **Φ** che è il **lavoro di estrazione** dell'elettrone dal metallo. Qualche elettrone libero può perdere una quantità di energia maggiore di **$\Phi = h\nu_0$** , se per esempio è colpito sotto la superficie metallica (cioè verso l'interno del metallo). La parte rimanente dell'energia del fotone **$h\nu - \Phi = h\nu - h\nu_0$** si trasforma in energia cinetica dell'elettrone.

Quindi la massima energia cinetica di un elettrone emesso quando viene colpito da luce di

frequenza **ν** è:

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = h\nu - \Phi = h\nu - h\nu_0$$

Questa è l'equazione per l'effetto fotoelettrico data da Einstein e che è in perfetto accordo con i risultati sperimentali di Millikan. [*]

Le leggi fotoelettriche su accennate valgono, in realtà, se è trascurabile l'energia cinetica posseduta dagli elettroni nel metallo prima dell'espulsione per azione dei fotoni, cioè se il metallo è a **0°K** . Altrimenti un certo numero di fotoelettroni potrà presentare un'energia cinetica anche lievemente superiore al valore massimo **$T_{\max} = h\nu - h\nu_0$** ; e sarà anche possibile l'espulsione di qualche elettrone che risulti possedere energia superiore a **$h\nu_0$** , necessaria al lavoro di estrazione, grazie al cumularsi dell'energia cinetica da esso posseduta nel metallo coll'energia **$h\nu$** di un fotone di frequenza **ν** lievemente inferiore a **ν_0** , in altri termini in un metallo <<caldo>> un debole effetto fotoelettronico si ha anche per radiazioni di frequenza lievemente inferiore alla frequenza limite **ν_0** . Con queste ipotesi tutte le difficoltà inerenti alla spiegazione dell'effetto fotoelettronico mediante la teoria classica sono ora rimosse e facilmente comprese.

1) Più piccola è **λ** , più alta è **ν** (**$\lambda\nu = c$**), maggiore è l'energia associata al fotone e quindi maggiore è l'energia cinetica dell'elettrone emesso.

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Se si aumenta l'intensità della luce (monocromatica) incidente di data frequenza ν , un maggiore numero di fotoni incide sul metallo nell'unità di tempo.

Quindi sono emessi più elettroni, ma l'energia cinetica massima di ogni fotoelettrone non aumenta in quanto ogni fotone possiede l'energia $h\nu$ (legge N° 2)

2) Non è necessario attendere che l'energia si accumuli quando la luce incide sulla superficie in quanto un solo fotone, all'atto della collisione con l'elettrone, può cedergli l'energia sufficiente per l'emissione (legge N° 5)

3) Se $T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 0$ si ha: $h\nu - \Phi = h\nu - h\nu_0 = 0 \quad \nu = \nu_0$ cioè il fotone ha energia appena sufficiente per estrarre fotoelettroni e quindi non possiede energia da comunicare sotto forma di energia cinetica.

Se $\nu < \nu_0$ i singoli fotoni, indipendentemente dal loro numero, non hanno energia sufficiente per estrarre fotoelettroni.

4) L'ipotesi del fotone cioè la teoria corpuscolare della luce sembra essere in contrasto con la teoria ondulatoria della luce necessaria per una corretta interpretazione di fenomeni quali l'interferenza, la diffrazione, la polarizzazione. Il punto di vista moderno è che la luce presenta un carattere duale dato che si comporta come un'onda in alcune circostanze e come particella in altre. In ogni caso, nei fenomeni di propagazione la luce si comporta come un'onda elettromagnetica, mentre nei fenomeni di interazione con la materia si comporta come un insieme di corpuscoli o fotoni. La luce appare pertanto a volte come **fenomeno corpuscolare** a volte come **fenomeno ondulatorio**.

Le ragioni di questo dualismo ed il modo con cui l'apparente contraddizione tra proprietà corpuscolari e ondulatorie sono eliminate se studiate nella **fisica quantistica**.

Cellula fotoelettrica

L'**effetto fotoelettrico** è messo bene in evidenza dalla **cellula fotoelettrica** o **fotoelettronica** o **fototubo** o **cellula di Hallwachs** costituita da un'ampolla di quarzo in cui viene fatto un vuoto estremamente spinto. In questa ampolla si hanno due elettrodi **F** e **P**. Un fascio di luce monocromatica attraversa la finestra L (che è in quarzo o in vetro di silice affinché si possa sperimentare anche con luce ultravioletta) ed incide sulla lastra metallica **F**. La batteria di placca **B_a** porta i due elettrodi ad una d.d.p. $V_a = V_P - V_F$ nota e variabile mediante il dispositivo potenziometrico indicato in figura. Un sensibile galvanometro **G** è in grado di segnalare

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

l'eventuale corrente di placca i_a . Al buio i_a è nulla. Se **F** è illuminato con luce di lunghezza d'onda sufficientemente corta (e quindi di frequenza sufficientemente elevata) i_a in generale non è nulla. Essa dipende dalla natura della superficie **F**, dall'intensità e qualità della luce incidente. Tuttavia i valori di i_a raramente superano i 10^{-6} A. Per una data superficie metallica **F**, a costante illuminamento, al variare di V_a si ha la **caratteristica** indicata in figura. La curva I si ha nelle cellule in cui la placca circonda quasi completamente l'elettrodo **F**. La curva II si ha nelle cellule più comuni nelle quali questa condizione non è soddisfatta. La corrente i_a comincia abbastanza bruscamente per un certo valore $V_a = V_0$.

La **corrente di saturazione** si osserva già per tensioni di qualche volt, anche nel caso della curva II. La corrente i_a si spiega con la emissione di fotoelettroni da parte della lastra **F** colpita da radiazioni di opportuna frequenza. Se è $V_a > 0$, V_a è un potenziale acceleratore dei fotoelettroni. Quando V_a è così forte che tutti i fotoelettroni emessi da **F** sono raccolti da **P**, nessun aumento di i_a si ha con l'aumento di V_a ; si ha la **corrente di saturazione**.

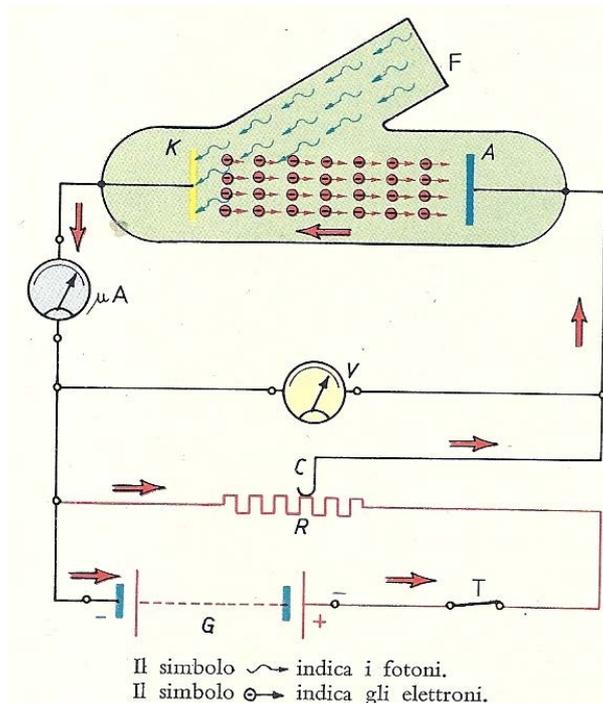
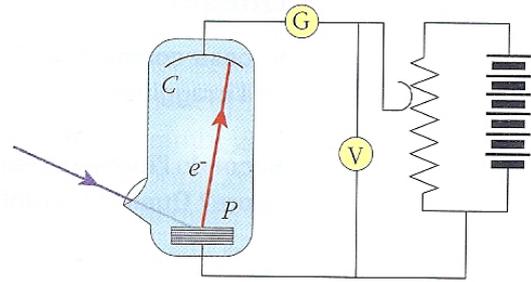
Ma per $V_a = 0$, i_a non è nulla; i fotoelettroni emessi da **F** con sufficiente velocità (normale alla superficie **F**), quindi con sufficiente energia cinetica, sono raccolti da **P**. Solo se V_a è minore di un certo valore $V_a < 0$, nessun fotoelettrone emesso da **F** viene raccolto da **P**. Non si ha passaggio di corrente.

Osservazione N°1: Nella teoria classica dell'elettromagnetismo l'energia di un treno d'onde luminose è distribuita su tutta la superficie d'onda. Secondo Einstein ad ogni lunghezza d'onda $\lambda = \frac{1}{\nu}$ corrisponde un **fotone** $h\nu$.

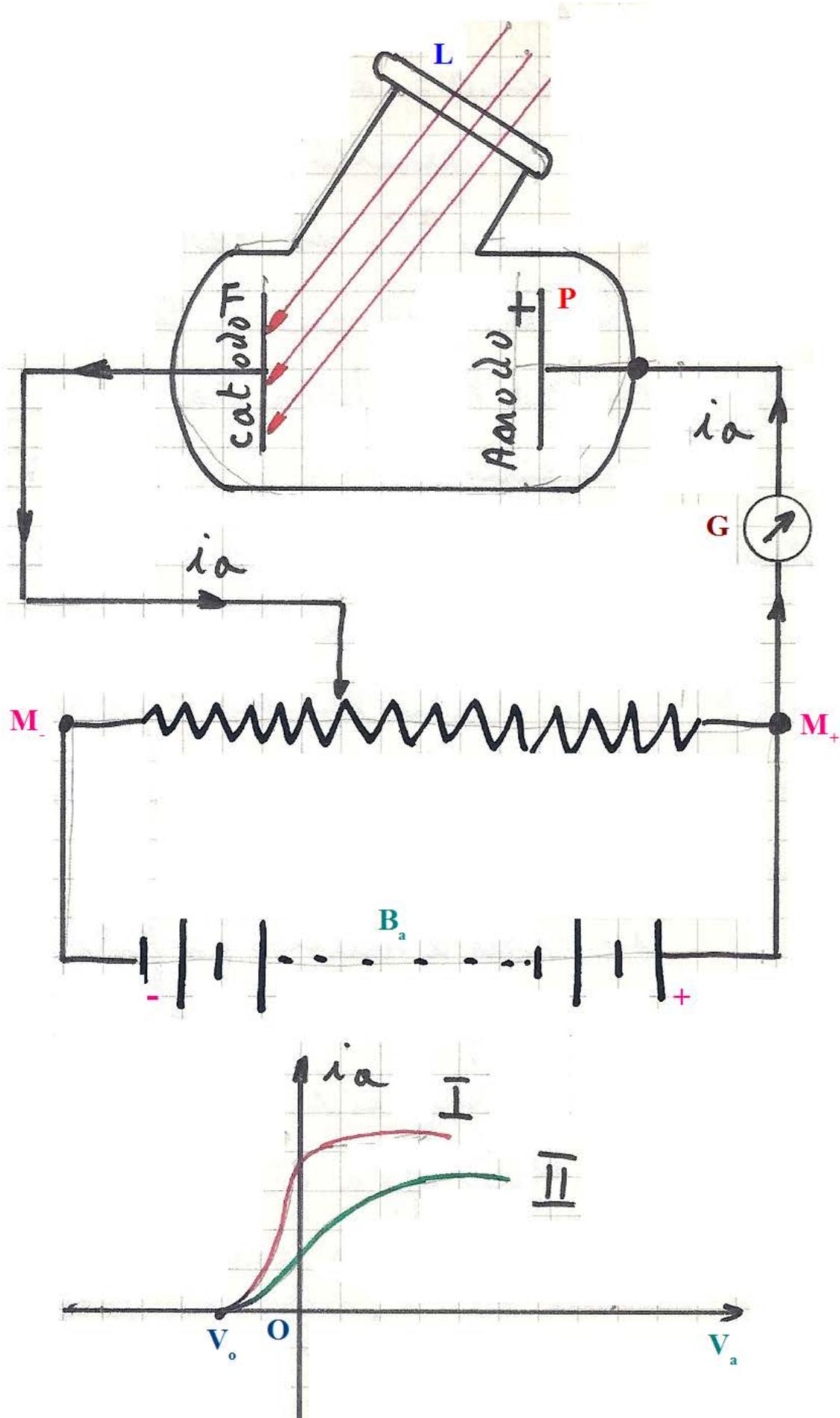
Osservazione N°2: Escono dal metallo con l'energia cinetica massima soltanto gli elettroni così fortunati da non avere subito successive perdite di energia oltre a quella dovuta al lavoro di estrazione. Un fotoelettrone sarà emesso con energia massima T_{max} quando tutta l'energia $h\nu$ del fotone si trasforma nel **lavoro di estrazione** Φ e nella energia cinetica dell'elettrone emesso. (l'emissione di elettroni con energia inferiore a quella massima si ha quando parte dell'energia è assorbita da altri elettroni che restano nel metallo)..

U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico

Schema di un dispositivo per lo studio dell'effetto fotoelettrico. Il tubo, comprendente la placca P ed il collettore C, costituisce una cella fotoelettrica. Gli elettroni emessi dalla placca, investita da una radiazione di opportuna frequenza, generano una corrente elettrica di intensità i_a .



U.D.31 Effetto termoionico Effetto fotoelettrico



Unità didattica N°32:

Equazioni di Maxwell Onde elettromagnetiche

01) Le equazioni di Maxwell

02) Le onde elettromagnetiche

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo: equazioni di Maxwell

Le proprietà locali dei campi elettrici e magnetici costanti nel tempo, che abbiamo studiato nei capitoli precedenti, sono descritte nel vuoto dalle quattro equazioni di Maxwell:

Prima equazione di Maxwell

La prima equazione di Maxwell è una conseguenza della legge di Coulomb dell'elettrostatica, ma è

formulata più convenientemente in termini della **legge di Gauss**: $\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$

Il flusso del campo elettrico \vec{E} attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie diviso la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 .

Nella legge di Gauss è implicito che tutte le linee di un campo elettrico debbono iniziare e terminare su cariche elettriche. Per convenzione queste linee sono scelte con **inizio su cariche positive** e **termine su cariche negative**. Le cariche elettriche sono i **poli** del campo elettrico.

Seconda equazione di Maxwell

La seconda equazione di Maxwell mette in evidenza la differenza essenziale tra le linee del campo magnetico e le linee del campo elettrico. Le **linee del campo magnetico**, che sono dovute a correnti elettriche, non partono o si fermano nello spazio ma formano delle linee continue chiuse. Le **linee del campo magnetico** si chiudono sempre su se stesse perché non esiste l'equivalente magnetico di una carica elettrica isolata; **non esistono monopoli magnetici**. La seconda legge di Maxwell si identifica con la **legge di Gauss per il magnetismo** la quale afferma quanto segue: **Il flusso del campo magnetico \vec{B} attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.** $\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$

Terza equazione di Maxwell

La terza equazione di Maxwell stabilisce semplicemente che un campo magnetico \vec{B} variabile nel tempo genera nello spazio circostante un campo elettrico \vec{E} . Essa si identifica con la **legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Newmann-Lenz** la quale stabilisce che un flusso magnetico variabile nel tempo genera una *f.e.m.* indotta.

In simboli abbiamo: $C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{\Delta t} = \epsilon$

la circuitazione del campo elettrico lungo un circuito è uguale al rapporto, cambiato di segno, tra la variazione del flusso del campo magnetico \vec{B} concatenato col circuito e l'intervallo di tempo in cui è avvenuta tale variazione.

Quarta equazione di Maxwell

La quarta equazione di Maxwell si basa sulla **legge della circuitazione** di Ampere espressa

dalla relazione

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n i_k$$

Abbiamo scritto le equazioni fondamentali di Maxwell per il **campo elettromagnetico**.

Queste quattro equazioni, insieme con le due equazioni che forniscono le definizioni operative dei campi elettrico e magnetico, ci permettono di risolvere tutti i problemi dell'elettromagnetismo.

Abbiamo già introdotto queste due equazioni:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E} \qquad \vec{f}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Esse ci dicono semplicemente che si può ottenere l'intensità del campo elettrico \vec{E} e del campo magnetico \vec{B} misurando la forza che questi campi esercitano rispettivamente su una carica q in quiete o in moto con velocità \vec{v} . **Il campo elettrostatico \vec{E} , conservativo, è generato dalle cariche elettriche fisse ed il campo magnetico statico \vec{B} , non conservativo, è generato dalle cariche elettriche in moto stazionario. A parte questo fatto che le sorgenti dei campi statici sono sempre le cariche elettriche, non esiste in un dato sistema di riferimento inerziale nessun'altra connessione tra i fenomeni elettrici e magnetici statici e le relative coppie di equazioni possono essere risolte separatamente. Esperimenti condotti da Faraday in Inghilterra e indipendentemente da Henry negli Stati Uniti misero in evidenza una diversa connessione tra elettricità e magnetismo: un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo che in opportuni dispositivi può dare luogo ad una forza elettromotrice e ad una corrente in un circuito chiuso. Un fenomeno analogo si ottiene in casi di moto relativo tra un circuito ed un campo magnetico costante. Successivamente Maxwell dimostrò che per rendere compatibili le equazioni dei fenomeni variabili con la legge di conservazione della carica nella sua forma più generale occorre postulare che un campo elettrico variabile nel tempo desse origine ad un campo magnetico. Maxwell arrivò così ad una forma più generale delle equazioni che regolano i fenomeni elettrici e magnetici variabili, la quale contiene le formule scritte in precedenza come caso limite per fenomeni statici.**

Quando generalizziamo la legge della circuitazione di Ampere considerando sia le correnti reali che le correnti di spostamento otteniamo la **quarta equazione di Maxwell** che, in termini matematici,

$$\text{assume la forma: } C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n \vec{i}_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \sum_{k=1}^n \vec{i}_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t} \quad [*]$$

La circuitazione del campo magnetico \vec{B} lungo un percorso chiuso è uguale al prodotto della permeabilità magnetica del vuoto μ_0 per la somma della corrente effettiva e di quella di spostamento. Questa è la quarta equazione di Maxwell, basata sulla sua brillante intuizione che un campo magnetico può essere generato non solo da una corrente elettrica ordinaria ma anche da un campo elettrico variabile. Fu questo il passo cruciale necessario per introdurre la simmetria fra i campi elettrico e magnetico rendendo così completa la **teoria elettromagnetica**. La grande utilità della **corrente di spostamento di Maxwell** sta nel fatto che essa ci aiuta sia a prevedere che a capire la propagazione delle onde elettromagnetiche nello spazio. **Caratteristica fondamentale è che un campo elettrico ed un campo magnetico variabili non possono esistere separatamente, ma vanno riuniti sotto il concetto più generale di campo elettromagnetico. Inoltre la soluzione delle equazioni di Maxwell prevede che il campo elettromagnetico possa propagarsi con velocità che risulta uguale a quella della luce: quest'ultima viene pertanto identificata come un fenomeno elettromagnetico rapidamente variabile.**

$$\text{Se guardiamo attentamente il secondo addendo dell'equazione } C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n \vec{i}_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt},$$

notiamo che il termine $\epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ deve avere le dimensioni di una corrente. Anche se non vi è

alcun moto di cariche e quindi l'appellativo non ha apparente giustificazione, è vantaggioso dare a questo termine il nome storico di corrente di spostamento ed indicarlo col simbolo i_s .

$$\text{Cioè: } \vec{i}_s = \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} \quad (\text{corrente di spostamento})$$

Si può dire che un campo magnetico può essere generato sia da una corrente di conduzione i sia da una corrente di spostamento i_s e possiamo scrivere l'equazione [*] come:

$$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{k=1}^n \vec{i}_k + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \left(\sum_{k=1}^n \vec{i}_k + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} \right) = \mu_0 \left(\vec{i}_{l.c.} + \epsilon_0 \lim_{x \rightarrow -\infty} \vec{i}_{s,l.c.} \right)$$

(**Legge di Ampère-Maxwell**)

In cui $i_{s,c}$ è la **corrente di spostamento** racchiusa entro la linea della circuitazione. Si riprende l'idea della continuità della corrente (**corrente di conduzione + corrente di spostamento**). **La corrente di spostamento implica un campo elettrico variabile e non un trasporto di carica.**

Calcoliamo la **corrente di spostamento** i_s nel caso di un condensatore piano. Quando ai capi di un condensatore piano è applicata una **f.e.m.** ε continua, fra le sue armature non passa corrente e si ha soltanto una separazione di cariche che passano da una armatura all'altra. [In realtà si ha un passaggio di corrente di spostamento per il tempo brevissimo della separazione delle cariche elettriche da una armatura all'altra] Se la **f.e.m.** è alternata lo spazio compreso tra le due armature è attraversato da una corrente di spostamento i_s consistente nella propagazione da una armatura all'altra di un campo elettromagnetico variabile nel tempo. Vogliamo dimostrare che la corrente di spostamento tra le due armature del condensatore vale:
$$\mathbf{i}_s = \varepsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_s(\vec{E})}{dt}$$

Se il condensatore è stato caricato mediante una **f.e.m.** continua il campo elettrico \vec{E} tra le sue armature è uniforme ed il suo modulo vale: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$ dove S è la superficie di ciascuna armatura e q è la carica del condensatore.
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow q = \varepsilon_0 S E$$

Quando colleghiamo le armature di un condensatore con un generatore di c.a. il campo elettrico \vec{E} esistente tra le sue armature non è più uniforme in quanto la carica q posseduta dal condensatore varia al variare del tempo. Dunque, mentre il circuito è percorso dalla corrente alternata, la quantità di carica presente su ciascuna armatura cambia nel tempo e modifica il campo elettrico nello spazio compreso tra le due armature.. Di conseguenza si ha una variazione del flusso $\Phi(\vec{E})$ del campo elettrico attraverso tutte quelle superfici che passano tra le due armature.

Possiamo scrivere:
$$q = q(t) = \varepsilon_0 S E(t) \quad dq = \varepsilon_0 \cdot d(S E)$$

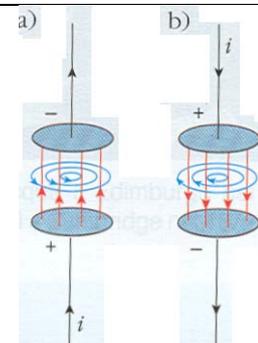
La corrente che attraversa lo spazio interno alle due armature del condensatore vale:

$$i = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d(S E)}{dt} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = i_s$$

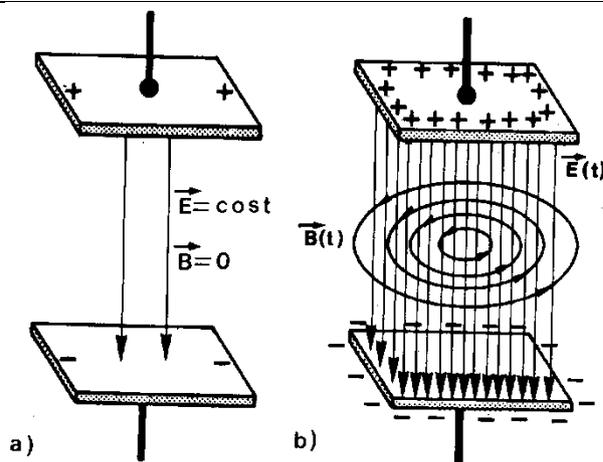
Avendo sempre pensato alla corrente elettrica come a un flusso di cariche, l'idea di assimilare il termine a una corrente può apparire sconcertante.

Così l'ipotesi di Maxwell circa l'esistenza della corrente di spostamento sembra, a prima vista, un artificio matematico. In realtà, un'analisi più approfondita mette in luce il significato fisico di questa ipotesi, da cui, come vedremo, scaturisce anche la descrizione teorica della propagazione delle onde elettromagnetiche. Maxwell affermò che la corrente di spostamento produce un effetto magnetico al pari della corrente dovuta al movimento delle cariche. Dobbiamo perciò pensare che nella regione di spazio compreso fra le armature del condensatore abbia origine un campo magnetico. Avendo preso in considerazione un condensatore piano ad armature circolari, la corrente di spostamento che fluisce da un'armatura all'altra attraverso lo spazio vuoto è analoga alla corrente che scorre in un filo cilindrico. Le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente di spostamento sono pertanto circolari e con centro sull'asse di simmetria del condensatore. In figura tali linee sono rappresentate sia che la corrente di conduzione (e quindi quella di spostamento) scorra verso l'alto sia che scorra verso il basso, in entrambi i casi con intensità i crescente. Questi risultati possono essere dedotti analizzando da un punto di vista matematico l'equazione 4, ma anche invocando il principio di simmetria: come un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico, allo stesso modo un campo elettrico variabile nel tempo produce un campo magnetico.

In base all'ipotesi di Maxwell, il **campo elettrico variabile** nel tempo presente fra le armature del condensatore genera un **campo magnetico indotto**. Le linee del campo magnetico sono mostrate nei due casi in cui il campo elettrico, d'intensità crescente, sia diretto **(a)** verso l'alto e **(b)** verso il basso



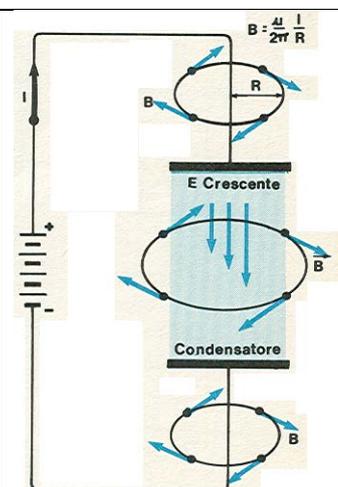
Ad un campo elettrico \vec{E} uniforme **(a)** non si accompagna la presenza di un campo magnetico \vec{B} . Se invece il campo elettrico $\vec{E} = \vec{E}(t)$ varia nel tempo **(b)** si genera nello spazio compreso tra le due armature un campo magnetico \vec{B} .



Ogni qual volta in una certa regione di spazio c'è un campo elettrico variabile nel tempo nasce in quella stessa zona di spazio un campo magnetico anch'esso variabile nel tempo.

Maxwell riteneva che una variazione del campo elettrico \vec{E} creasse una corrente di spostamento i_s il cui valore era: $i_s = \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$.

L'introduzione di questo nuovo concetto **(a)** permetteva di mantenere la nozione di continuità della corrente in un circuito, anche in presenza di un condensatore **(b)** e stabiliva che un campo magnetico può essere prodotto non solo da una **corrente elettrica** (intesa come flusso ordinato di cariche elettriche) ma anche da un campo elettrico variabile



Equazioni di Maxwell e di Lorentz nel caso statico.

Prima di affrontare lo studio di campi elettromagnetici variabili nel tempo è opportuno riassumere i risultati finora trovati nel vuoto e per campi statici.

Il campo elettrico statico ed il campo magnetico statico (generati, rispettivamente, da cariche elettriche in quiete e da correnti costanti) sono descritti dalle seguenti equazioni:

$$1) \oint_{S.C.} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \begin{cases} \text{teorema di Gauss} \\ \text{Flusso del vettore } \vec{E} \\ \text{attraverso una} \\ \text{superficie chiusa} \end{cases} \quad (1)$$

conservazione della carica elettrica

2) Seconda equazione di Maxwell

$$\oint_{S.C.} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 = \begin{cases} \text{Teorema di Gauss} \\ \text{Campo solenoideale} \\ \text{Flusso del vettore } \vec{B} \\ \text{attraverso una superficie} \\ \text{chiusa} \end{cases} \quad (2)$$

Resistenza di materiali elettrici

3) III equazioni di Maxwell

③

$$\oint_{l.c.} (\vec{E}) = 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Campo conservativo} \\ \text{Circuito di } \vec{E} \text{ attraverso} \\ \text{una linea chiusa l.c.} \\ \text{Teorema di Stokes} \end{array} \right.$

4) IV equazioni di Maxwell

④

$$\oint_{l.c.} (\vec{B}) = \mu_0 \sum_{i=1}^M k_i k_i$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Circuito del vettore} \\ \vec{B} \text{ lungo una} \\ \text{linea chiusa l.c.} \end{array} \right.$

Relazione tra campo magnetico e corrente.
Teorema di Stokes

5) Equazione di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad ⑤$$

forza esercitata dai campi \vec{E} e \vec{B} sulla carica elettrica q .

Come si vede, le due equazioni di corrente contengono le grandezze elettriche non contengono quelle magnetiche e viceversa. Le prime quattro equazioni non stabiliscono alcun legame

fra campo elettrico e campo magnetico.
Le prime quattro equazioni ci permettono
di determinare i campi \vec{E} e \vec{B} nel vuoto
una volta note le cariche elettriche e le
correnti.

L'equazione (5) dà la forza esercitata
dei campi \vec{E} e \vec{B} su una carica elettrica q .
Le equazioni (1) e (2) collegano i valori
dei campi elettrico e magnetico su una
superficie chiusa (s.c.) con le sorgenti
(cariche elettriche) contenute in esse.

Esse hanno validità universale.

Le equazioni (3) e (4) collegano i valori dei
campi elettrico e magnetico

sulle linee di corrente (l.c.)
alle correnti che attraversano una qualsiasi
superficie limitata dalle l.c.

Esse sono valide solo in casi particolari,
cioè per campi elettromagnetici che non
variano nel tempo e per linee di corrente ferme.

La equazione (5) afferma che la forza agente
su una carica elettrica è la somma di
due termini, uno di tipo elettrostatico,
presente anche se la carica è ferma ($v=0$)
e l'altro di tipo magnetico, proporzionale

alla velocità della carica (e nullo quando la carica è in quiete). Tale equazione è sempre valida.

La situazione descritta da tali equazioni mostra che il campo \vec{E} e il campo \vec{B} non sono tra loro correlati nel caso statico: essi sono indipendenti uno dall'altro.

Però sappiamo che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico.

Per potere descrivere i due campi nel caso generale occorre trovare delle equazioni che coinvolgano sia \vec{E} sia \vec{B} e che si riducano alle equazioni precedenti nel caso particolare in cui i campi sono costanti nel tempo.

A questo scopo osserviamo subito che il campo elettrico prodotto da un campo magnetico variabile, a differenza del campo elettrico statico, può mettere in moto le cariche lungo un circuito chiuso.

Questo significa che la sua circolazione lungo un percorso chiuso (l.c.) non può essere nulla.

Il valore di tale circolazione si ricava dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz, cioè:

$$\oint_{l.c.} (\vec{E}) = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = \xi \quad (6)$$

Il campo elettrico non è più conservativo in quanto la sua circolazione è diversa da zero.

Maxwell dimostrò che la (6) non dipende dal particolare cammino scelto per il calcolo di $\oint_{l.c.} (\vec{E})$ e che, inoltre, è irrilevante il fatto se

o tale cammino corrisponda realmente un circuito (cioè un filo conduttore): in altre parole, possiamo calcolare $\oint_{l.c.} (\vec{E})$ lungo un qualsiasi cammino, scelto arbitrariamente in una qualsiasi regione dello spazio sede di un campo magnetico variabile.

Ne concludiamo che la (6) ha validità generale ed afferma quanto segue:

« Un campo magnetico variabile genera nello spazio un campo elettrico variabile la cui circolazione, calcolata lungo un qualsiasi cammino chiuso, è proporzionale alla variazione intertemporale del flusso

del campo magnetico concatenato con quel circuito»,

Osserviamo infine che la differenza tra l'equazione di Faraday-Neumann-Lenz e quella di Maxwell sembrerebbe ridursi ad un semplice cambiamento di nomi:

o ciò che nella relazione $\mathcal{E} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$

viene chiamata **forza elettromotrice indotta**, nella (6) prende il nome di **circuito**. In realtà, il passaggio dalla relazione $\mathcal{E} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$ alla relazione

$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$ presuppone un profondo cambiamento concettuale:

mentre Neumann si occupa ancora delle cariche elettriche e delle forze da esse originate, Maxwell rivolge la sua attenzione esclusivamente al campo.

Concludendo possiamo riscrivere le prime 4 equazioni precedenti nella seguente forma:

$$\textcircled{1'} \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \textcircled{2'}$$

$$\textcircled{3'} \quad \text{rot}(\vec{E}) = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt} \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \sum \vec{i}_K \quad \textcircled{4'}$$

La corrente di spostamento

Gli esperimenti di Faraday avevano dimostrato che un campo magnetico variabile nel tempo crea un campo elettrico. È allora del tutto naturale domandarsi se un campo elettrico variabile nel tempo può creare un campo magnetico.

La risposta affermativa a questa domanda è dovuta a Maxwell, il cui contributo più originale nella sistemazione da lui data alle leggi dell'elettromagnetismo fu l'introduzione nella quarta equazione di un termine ^{nuovo} aventemente la variazione del flusso del campo elettrico \vec{E} .

Agli scopi che un campo elettrico variabile nel tempo crea un campo magnetico indipendentemente dalla presenza di correnti o conduttori.

Nelle equazioni dei campi modificate per tenere conto dell'induzione elettromagnetica

$$\textcircled{1} \quad \oint_{S.C.} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S.C.} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \oint_{L.C.} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\oint_{L.C.} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_k \quad \textcircled{4}$$

compariva una asimmetria:

« mentre la circuitalità di \vec{E} risultava legata al flusso di \vec{B} , nessuna relazione sembrava esserci tra la circuitalità di \vec{B} ed il flusso di \vec{E} ».

Sulla base di questa osservazione, Maxwell si chiese se non fosse il caso di modificare anche la quarta equazione $[\text{C.C.} \vec{B}] = \mu_0 \epsilon_0 \dot{q}$ e la rinforzò, affermativa, gli venne dallo studio di un paradosso che aveva suscitato molte discussioni tra i fisici del suo tempo. Il paradosso è il seguente.

Quando la corrente non è stazionaria, il teorema della circuitalità di Ampère non è valido come si può vedere nel processo di scarica di un condensatore.

Si considerino due armature metalliche affacciate e dotate di cariche di segno opposto $+Q$ e $-Q$ (condensatore aereo) collegate mediante un filo conduttore. Se chiudiamo l'interruttore \mathcal{S} , attraverso il conduttore si ha un flusso di cariche positive dall'armatura A all'armatura B (corrente $i = \frac{dq}{dt}$) fino a quando

le due armature si neutralizzano.
 La quarta equazione di Maxwell come è stata scritta nel caso statico afferma che la circolazione del vettore \vec{B} lungo la una linea chiusa l è proporzionale all'intensità i corrente che attraversa una qualsiasi superficie avente l per contorno.

Esaminando la linea l della figura otteniamo il seguente risultato fornendo

$$\oint_l (\vec{B}) = \mu_0 i \quad (6)$$

se consideriamo la superficie S_2 di contorno l che taglia il filo conduttore i ;

$$\oint_l (\vec{B}) = 0 \quad (7)$$

se consideriamo invece la superficie S_1 di contorno l che passa tra le armature del condensatore non incontrando il filo conduttore.

Per eliminare tale contraddizione, Maxwell ipotizzò le onde tra le armature, per non essendovi un effettivo passaggio di corrente, vi sia una corrente

diametro Δ corrente di spostamento i_s .

Per calcolare e giustificare tale corrente, Maxwell osservò che il campo elettrico esistente tra le due armature quando sono cariche e si annulla allorquando esse si neutralizzano. Pertanto, contemporaneamente al passaggio della corrente i nel filo, in una sua sezione del campo elettrico \vec{E} tra le armature e di conseguenza una variazione del flusso Φ di \vec{E} attraverso la superficie di area $S = S_1 + S_2$.

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{E}) = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d \Phi_S(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{\epsilon_0}$$

Se forniamo $i_s = \epsilon_0 \frac{d \Phi_S(\vec{E})}{dt}$

le equazioni (6) e (7) danno lo stesso risultato e la contraddizione viene eliminata.

Il merito di Maxwell fu quello di avere rilevato questa disomogeneità e di avere completato la quarta equazione scrivendola nella forma generalizzata:

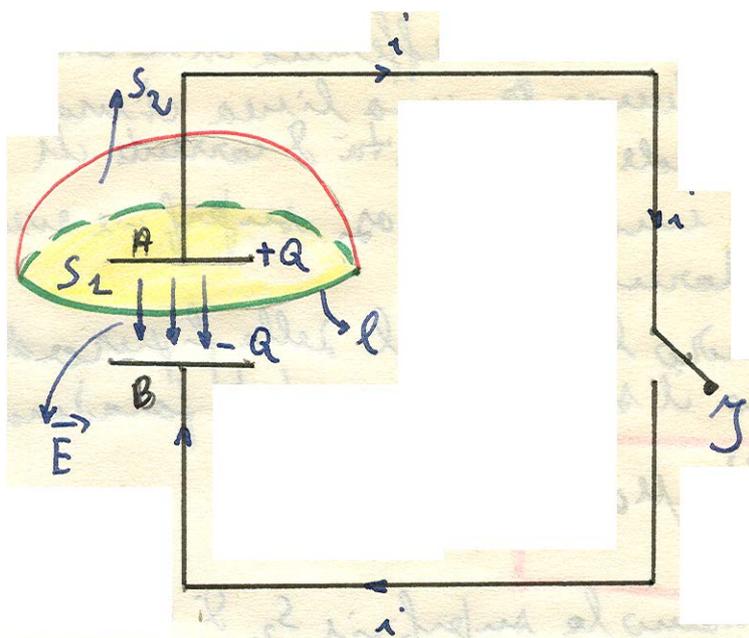
$$\textcircled{8} \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{E})}{\partial t}$$

l.c.

Una caratteristica significativa della generalizzazione di Maxwell è che un campo magnetico può essere prodotto da un campo elettrico variabile oltre che da correnti elettriche vere (cioè da un flusso ordinato di cariche elettriche).

Con tale ipotesi si può dire che sia stato completato l'elettromagnetismo classico. Innumerevoli esperienze sperimentali hanno mostrato la correttezza di tale ipotesi da cui scaturisce la sorprendente scoperta che la luce è un fenomeno elettromagnetico.

La corrente di spostamento e la legge delle correnti indotte di Faraday-Maxwell-Henry stabiliscono una simmetria tra i campi elettrici e magnetici variabili nel tempo. Si osservi che nel caso di campi non stazionari non è più lecito considerare \vec{E} e \vec{B} come entità indipendenti.



Due superfici S_1 ed S_2 limitate dalla stessa
 curva chiusa ℓ . La corrente d'intensità i
 attraversa la superficie S_2 ma non la
 superficie S_1 . Il teorema di Ampère, se
 stabilisce una relazione fra la circolazione
 di \vec{B} lungo la curva ℓ e l'intensità della
 corrente totale che attraversa qualunque
 superficie limitata da ℓ , non è valido
 quando la corrente non è continua come
 in questo caso, in cui si verifica nell'armatura
 del condensatore. Applicando il teorema della
 circolazione nella forma dotata da Ampère
 si ottiene il seguente risultato:
 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ o $\left[\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \right]$ se scegliamo come superficie
 ℓ che si affaccia ad ℓ S_2 (S_1).

Le equazioni di Maxwell in forma elementare

I	$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_o} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$	Legge di Gauss per il campo elettrico
II	$\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = 0$	Legge di Gauss per il campo magnetico
III	$C_{l.c.}(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_{s.c.}(\vec{B})}{\Delta t} = \varepsilon$	Legge di Faraday-Newmann-Lenz_Henry
IV	$C_{l.c.}(\vec{B}) = \mu_o \sum_{k=1}^n i_k + \mu_o \epsilon_o \cdot \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_o \sum_{k=1}^n i_k + \mu_o \epsilon_o \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}$	Legge di Ampère-Maxwell

Le equazioni di Maxwell in forma integrale

I	$\Phi_{s.c.}(\vec{E}) = \oint_{s.c.} \vec{E} \times \vec{n} dS = \frac{q_{tot}}{\epsilon_o}$	Legge di Gauss per il campo elettrico
II	$\Phi_{s.c.}(\vec{B}) = \oint_{s.c.} \vec{B} \times \vec{n} dS = 0$	Legge di Gauss per il campo magnetico
III	$C_{l.c.}(\vec{E}) = \oint_{l.c.} \vec{E} \times d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \times \vec{n} dS$	Legge di Faraday-Newmann-Lenz_Henry
IV	$C_{l.c.}(\vec{B}) = \oint_{l.c.} \vec{B} \times d\vec{\ell} = \mu_o \sum_{k=1}^n i_k + \mu_o \epsilon_o \cdot \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \times \vec{n} dS$	Legge di Ampère-Maxwell

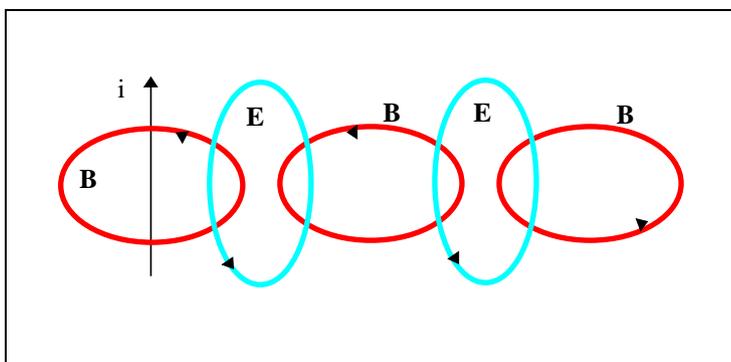
Le equazioni di Maxwell in forma differenziale

I	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$	II	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
III	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	IV	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Natura delle onde elettromagnetiche

Una volta capito il contenuto delle equazioni di Maxwell, la natura della **onde elettromagnetiche** diviene più chiara. **Campi elettrici variabili nel tempo** muovendosi nello spazio generano dei campi magnetici anch'essi variabili nel tempo. Questi campi magnetici variabili a loro volta producono campi elettrici. Pertanto anche nelle regioni dello spazio nelle quali non vi sono cariche e non vi sono magneti e non vi è alcuna corrente reale, possono esistere **onde elettromagnetiche**.

Avviene continuamente che campi elettrici variabili generano campi magnetici e questi a loro volta generano campi elettrici. Col trascorrere del tempo l'intero **pacchetto di campi elettrici e magnetici** si muove continuamente attraverso lo spazio in quanto ogni campo generato si trova in una regione diversa da quella del campo variabile che l'ha generato. Perciò l'energia dei campi elettrico e magnetico è trasportata attraverso lo spazio dalle **onde elettromagnetiche** anche in regioni nelle quali non esiste materia. Il lavoro di Maxwell ha suggerito l'idea che sia questo il modo col quale anche la luce si propaga nello spazio.



- La **propagazione di un'onda elettromagnetica**. Un campo magnetico variabile \vec{B} genera un campo elettrico \vec{E} che a sua volta genera un campo magnetico \vec{B} e così via. Così si trasporta attraverso lo spazio energia elettromagnetica.

Vediamo, in un caso particolare, quale può essere la genesi di una **perturbazione elettromagnetica**. Supponiamo che in una certa regione dello spazio ed in un certo istante si determini una variazione del campo elettrico, originato, per esempio, da un moto accelerato di cariche elettriche. Nei punti immediatamente vicini si genera, per la **quarta equazione di Maxwell**, un campo magnetico anch'esso variabile nel tempo. La variazione del campo magnetico, per la **terza equazione di Maxwell**, genera nei punti immediatamente vicini un campo elettrico anch'esso variabile, e così di seguito. Nasce in tal modo una **perturbazione elettromagnetica** che si propaga nello spazio.

Proprietà delle onde elettromagnetiche

● Le **onde elettromagnetiche** sono **onde trasversali**. Infatti, il campo elettrico \vec{E} ed il campo magnetico \vec{B} che sono tra loro perpendicolari sono perpendicolari anche alla direzione di propagazione.

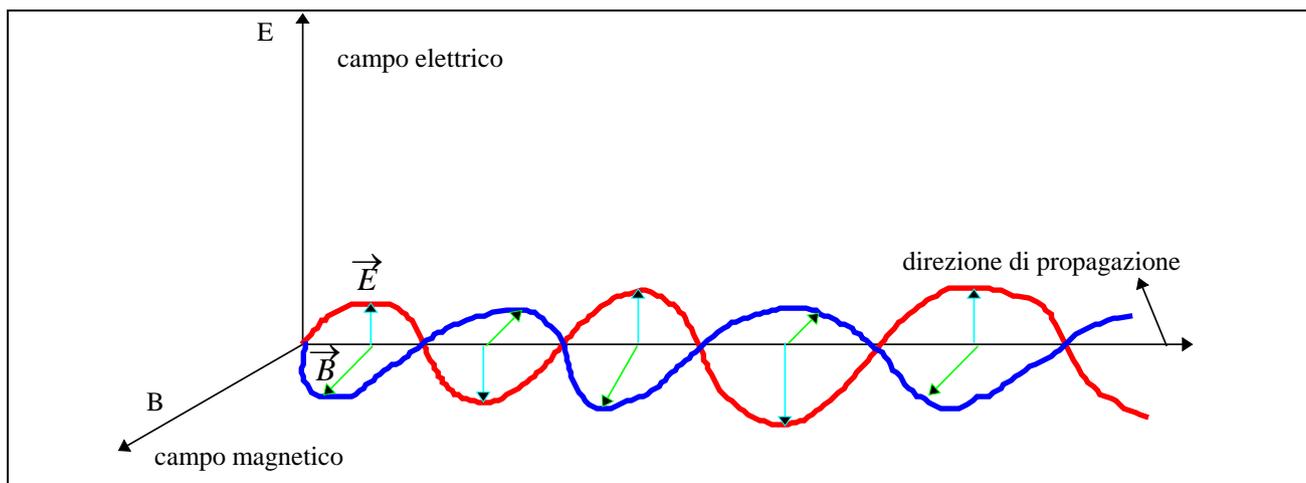
● Tutte le **onde elettromagnetiche** si propagano nel vuoto con la stessa velocità: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

In un mezzo di **costante dielettrica** ϵ e di **permeabilità magnetica** μ , la velocità di propagazione delle **onde elettromagnetiche** risulta: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$. Il valore della velocità di

propagazione delle **onde elettromagnetiche** nel vuoto coincideva con buona approssimazione con quello della luce. Questo fu un risultato clamoroso, che mise in evidenza lo straordinario potere unificante delle equazioni di Maxwell. Egli, avendo notato che le **onde elettromagnetiche** e la luce, oltre ad essere caratterizzate entrambe da vibrazioni trasversali, si propagano con la stessa velocità, avanzò l'ipotesi della **natura elettromagnetica** della luce.

● I vari tipi di **onde elettromagnetiche** differiscono fra loro per la frequenza ν e per la loro lunghezza d'onda λ . Frequenza e lunghezza d'onda sono legate fra loro dalla seguente relazione:

$\lambda \cdot \nu = c$ dove **c** rappresenta la velocità della luce nel vuoto.



Rappresentazione di un'onda elettromagnetica sinusoidale polarizzata rettilineamente. Le vibrazioni del campo elettrico e del campo magnetico avvengono in piani ortogonali fissi. Si noti che i vettori \vec{E} e \vec{B} sono costantemente in fase, oltre che in un dato istante, anche nei vari punti dello spazio, anche in ogni punto nei successivi istanti.

Onde elettromagnetiche di tipo sinusoidale

Abbiamo detto che un'onda elettromagnetica consiste in un campo elettrico ed in un campo magnetico oscillanti. Tutte le possibili frequenze che le onde elettromagnetiche possono assumere costituiscono lo **spettro**, del quale una porzione piccolissima è visibile sotto forma di luce. Le equazioni che descrivono un'onda elettromagnetica piana sinusoidale, o **monocromatica** sono:

$$\mathbf{E} = E_m \cdot \sin(\mathbf{kx} - \omega t) = E_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = E_m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

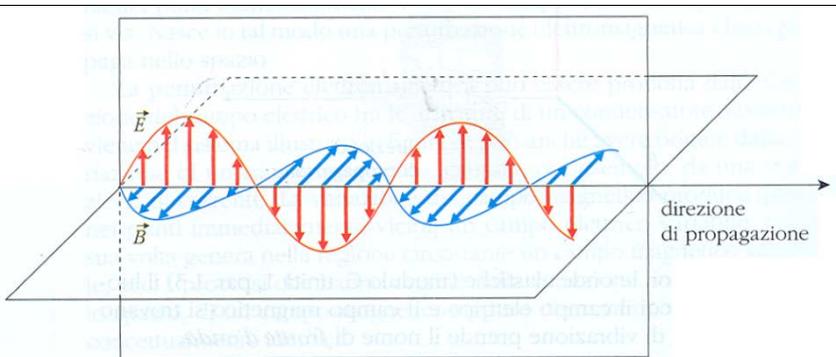
$$\mathbf{B} = B_m \cdot \sin(\mathbf{kx} - \omega t) = B_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = B_m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = numero d'onda angolare dell'onda $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = pulsazione dell'onda elettromagnetica

λ = **lunghezza d'onda** T = periodo

Le ampiezze E_m , B_m rappresentano i valori massimi del modulo del campo elettrico e di quello magnetico. Le due equazioni trovate esprimono i moduli E e B dei due campi in ogni istante t ed in ogni punto x lungo la direzione di propagazione dell'onda. In ogni punto, la direzione del campo elettrico \vec{E} e quella del campo magnetico \vec{B} variano in generale col tempo mantenendosi perpendicolari fra loro ed alla direzione di propagazione. Il campo elettrico \vec{E} (ed anche il campo magnetico \vec{B}) è sempre perpendicolare alla direzione di propagazione, ma cambia continuamente direzione in modo casuale. Questo significa che, in generale, le **onde elettromagnetiche non sono polarizzate**. Se invece le direzioni di \vec{E} e \vec{B} rimangono fisse nel tempo, si dice che l'onda elettromagnetica è **polarizzata linearmente**.

Rappresentazione di un'onda elettromagnetica sinusoidale polarizzata linearmente. Le oscillazioni del campo elettrico e di quello magnetico avvengono in piano ortogonali fissi.



Si dimostra che i valori massimi E_m e B_m del campo elettrico e del campo magnetico di un'onda monocromatica sono legati dalla relazione:

$$\frac{E_m}{B_m} = c = \frac{E}{B} \quad \text{dove} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{è la velocità della luce nel vuoto}$$

In un mezzo di costante dielettrica relativa ϵ_r e di permeabilità magnetica relativa μ_r , la velocità di propagazione della luce è:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

L'energia trasportata da un'onda elettromagnetica

Come tutte le onde, anche quelle elettromagnetiche trasportano energia. Noi sappiamo che il campo elettrico e il campo magnetico, in condizioni statiche, immagazzinano energia. Precisamente la densità di energia posseduta da un campo elettrico di modulo E vale: $u_E = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_o E^2$ mentre

quella posseduta da un campo magnetico di modulo B vale: $u_B = \frac{U}{V} = \frac{1}{2 \mu_o} B^2$

Le stesse espressioni valgono anche quando il campo elettrico e quello magnetico sono funzioni del tempo e della posizione x che occupano. Valgono le seguenti formule:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 + \frac{1}{2 \mu_o} B^2 \quad \frac{E_m}{B_m} = c = \frac{E}{B} \Rightarrow E = B \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}} \wedge B = E \sqrt{\epsilon_o \mu_o}$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 + \frac{1}{2 \mu_o} B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 + \frac{\epsilon_o \cancel{\mu_o}}{2 \cancel{\mu_o}} E^2 \quad u = \epsilon_o E^2 = \frac{B^2}{\mu_o}$$

Queste relazioni mostrano che l'energia dell'onda elettromagnetica è immagazzinata in uguale misura dal campo elettrico e dal campo magnetico.

Per un'onda monocromatica, se E_m (B_m) è l'ampiezza del campo elettrico (magnetico) la **densità media di energia** \bar{u} di un'onda elettromagnetica è l'energia immagazzinata in media, per unità di volume, dai campi elettrico e magnetico dell'onda. Essa va calcolata applicando

la seguente formula:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \epsilon_o E_o^2 = \frac{1}{2 \mu_o} B_o^2$$

Se \bar{u} è la **densità media di energia** dell'onda e c la sua velocità di propagazione, l'**intensità I** di un'onda elettromagnetica è l'energia per unità di area ed unità di tempo che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

Essa va calcolata applicando la seguente formula:

$$I = \frac{U}{S \cdot t} = \bar{u} \cdot c = \frac{1}{2} c \cdot \epsilon_o E_o^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_o} B_o^2$$

Essa rappresenta la **potenza media** trasportata attraverso un'area unitaria da un'onda elettromagnetica incidente perpendicolarmente.