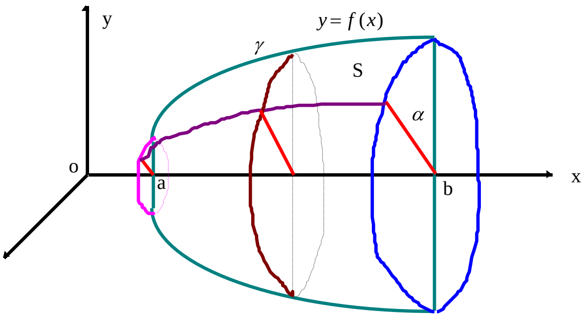
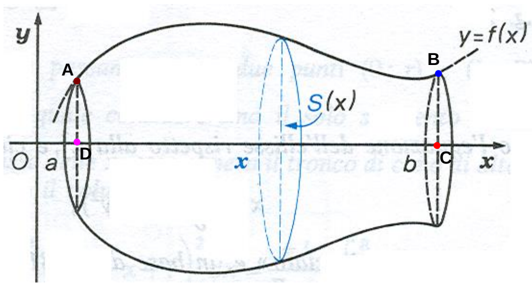
Volume di un solido di rotazione

Sia AB un arco di curva γ avente equazione $y = f(x)$. Se f(x) è una funzione continua e non negativa nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$, si dimostra che il volume del solido generato dal trapezoide $ABCD$ in una rotazione completa attorno all'asse x è dato dalla seguente formula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$





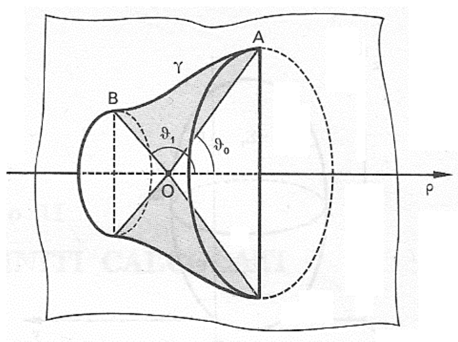
Se il trapezoide ruota di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ attorno all'asse x la formula precedente diventa:

$$V = \frac{\alpha}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Se la curva γ assegnata mediante le equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_A \le t \le t_B$ con $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ funzioni continue abbiamo quanto segue:

- $V = \pi \int_{t_A}^{t_B} [y(t)]^2 \cdot x'(t) \cdot dt$ se $x(t)$ è una funzione crescente nell'intervallo $t_A \le t \le t_B$
- $V = \pi \int_{t_A}^{t_B} [x(t)]^2 \cdot y'(t) \cdot dt$ se $y(t)$ è una funzione crescente nell'intervallo $t_A \le t \le t_B$

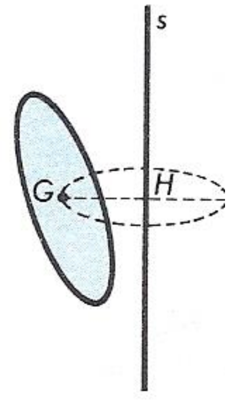
Se il volume V è ottenuto mediante una rotazione completa attorno all'asse ρ del settore AOB delimitato dall'arco γ di equazione $\rho = f(\vartheta)$ con $0 \le \vartheta_o \le \vartheta \le \vartheta_1 \le \pi$ abbiamo:



$$V = \frac{2}{3}\pi \int [f(\vartheta)]^3 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta$$

Secondo teorema di Pappo Guldino

Il volume V del solido generato dalla rotazione completa di una superficie piana limitata S intorno ad una retta del suo piano che non l'attraversi, è uguale al prodotto dell'area A di questa superficie per la misura C della circonferenza descritta dal baricentro G della linea stessa.



$$V = A \cdot C = \ell \cdot 2\pi d$$

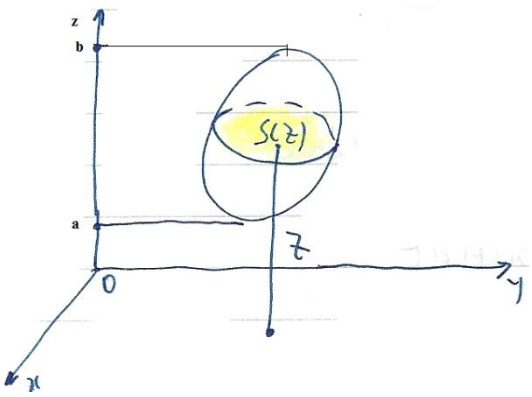
dove d è la distanza del baricentro G dall'asse di rotazione, cioè d è il raggio della circonferenza descritta dal punto G nella sua rotazione completa.

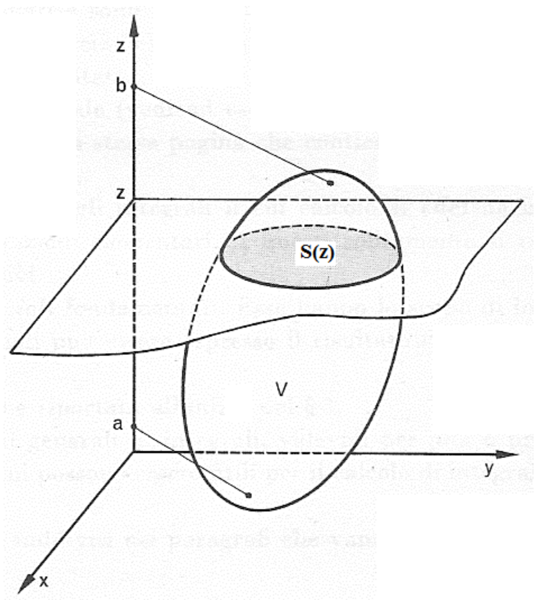
Nel caso di una rotazione di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$ abbiamo: $V = A \cdot C_\alpha = A \cdot \alpha d$ dove $C_\alpha = \alpha \cdot d$ rappresenta la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro nella sua rotazione dell'angolo α.

Volume di un solido a sezione quadrabile

Consideriamo un solido compreso tra due piani paralleli $z = a$, $z = b$ e la cui sezione con un generico piano parallelo al piano Oxy ($a \le z \le b$) sia quadrabile ed abbia area $S(z)$ per $a \le z \le b$.

Risulta: $$V = \int_a^b S(z) \cdot dz$$

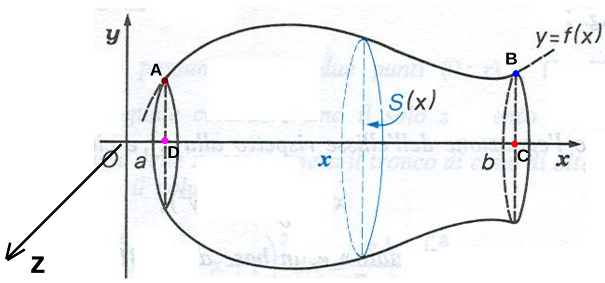




Volume di un solido

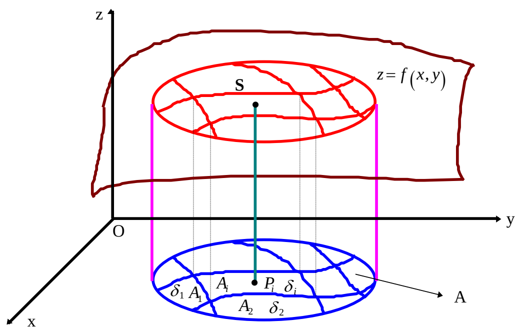
Per un solido compreso tra due piani paralleli $x=a$, $x=b$ e la cui sezione con un generico piano parallelo al piano Oyz $(a \le x \le b)$ sia quadrabile ed abbia area $S(x)$ per $a \le x \le b$.

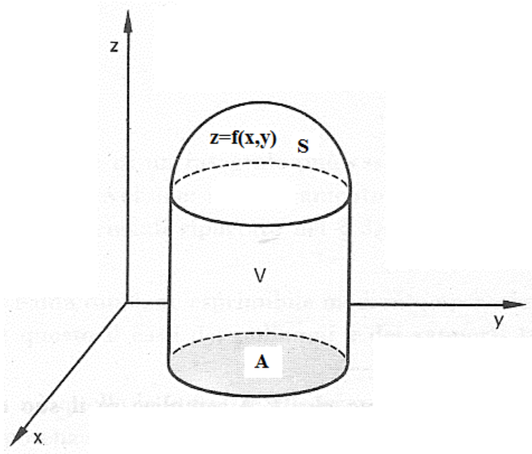
Risulta: $V=\int_a^b S(x)\cdot dx$



Volume di un cilindroide

Consideriamo il **cilindroide** della figura, cioè il solido individuato dalla superficie S di equazione $z=f(x,y)$, dal cilindro $f(x,y)=0$ e dal dominio piano A. Il suo volume ci viene fornito dalla seguente formula: $V=\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy$

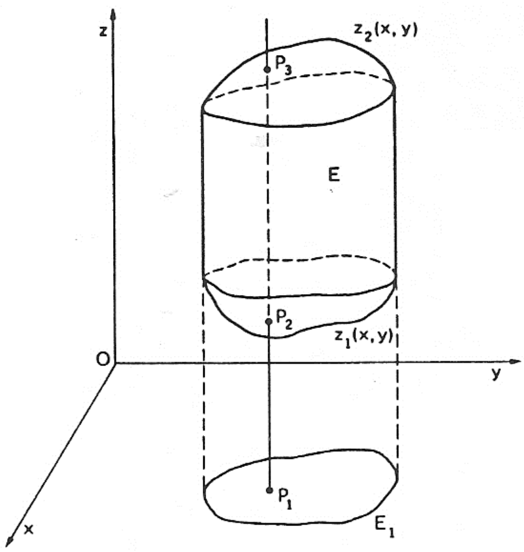




Il calcolo di un volume mediante un integrale triplo

Se $z=z_1(x,y)$ e $z=z_2(x,y)$ sono funzioni definite e continue in un dominio $E_1 \subset R^2$ regolare del piano Oxy ,un dominio E dello spazio R^3, che è un solido, si dice **normale rispetto al piano** Oxy se i punto $P(x,y,z)$ che lo compongono hanno coordinate che verificano le seguenti relazioni:

$$(x,y)\in E_1 \subset R^2 \quad \wedge \quad z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$$



cioè se il contorno del solido è incontrato al più in due punti, uno di entrata e l'altro di uscita, da ogni retta perpendicolare al piano Oxy e passante per il dominio $E_1 \subset R^2$.

Il volume del solido $E \subset \mathbb{R}^3$ è uguale al valore del seguente integrale triplo:

$$V_E = \iiint_E dx \cdot dy \cdot dz = \iint_{E_1} dx \cdot dy \cdot \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$$

Utilizzando coordinate polari abbiamo: $V_E = \iiint_{E'} \rho^2 \cdot |\sin\vartheta| \cdot d\rho \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$ $\quad \begin{cases} x = \rho \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\vartheta \end{cases}$

Utilizzando **coordinate cilindriche** abbiamo: $V_E = \iiint_{E''} \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta \cdot dz$ $\quad \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\vartheta \\ y = \rho \cdot \sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$

E' ed E'' sono i domini corrispondenti al dominio E quando si passa dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari o alle coordinate cilindriche.

Il volume del solido $E \subset \mathbb{R}^3$ può essere calcolato utilizzando la seguente formula:

$$V_E = \iint_{E_1} \left[z_2(x,y) - z_1(x,y) \right] \cdot dx \cdot dy$$

Il volume V di un solido E si può calcolare anche mediante un integrale di superficie. Se S è la superficie che delimita il solido E, allora valgono le seguenti formule:

$$V_E = \iint_{S_{xy}} z \cdot dx \cdot dy$$

dove S_{xy} è la proiezione di S sul piano Oxy e $z = \alpha(x,y)$ è l'equazione cartesiana di S.

$$V_E = \iint_{S_{yz}} z \cdot dy \cdot dz$$

dove S_{yz} è la proiezione di S sul piano Oyz e $z = \varphi(x,y)$ è l'equazione cartesiana di S.

$$V_E = \iint_{S_{xz}} z \cdot dx \cdot dz$$

dove S_{xz} è la proiezione di S sul piano Oxz e $z = \alpha(x,y)$ è l'equazione cartesiana di S.

$$V_E = \iint_S x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot dz + z \cdot dx \cdot dy$$

Se S è data in forma parametrica $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $\quad J(u,v) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\|$ abbiamo:

Volume di un solido

$$V=\iint_{D_1} x(u,\mathrm{v})\cdot\left|J\begin{pmatrix} y & z\\ u & \mathrm{v}\end{pmatrix}\right|\cdot du\cdot d\mathrm{v}=\iint_{D_2} y(u,\mathrm{v})\cdot\left|J\begin{pmatrix} x & z\\ u & \mathrm{v}\end{pmatrix}\right|\cdot du\cdot d\mathrm{v}=\iint_{D_3} z(u,\mathrm{v})\cdot\left|J\begin{pmatrix} x & y\\ u & \mathrm{v}\end{pmatrix}\right|\cdot du\cdot d\mathrm{v}$$

dove D_1 (D_2, D_3) è il dominio del piano $Ou\mathrm{v}$ corrispondente al dominio $S_{y,z}$ (S_{xz}, S_{xy}) del piano Oyz (Oxz, Oxy)

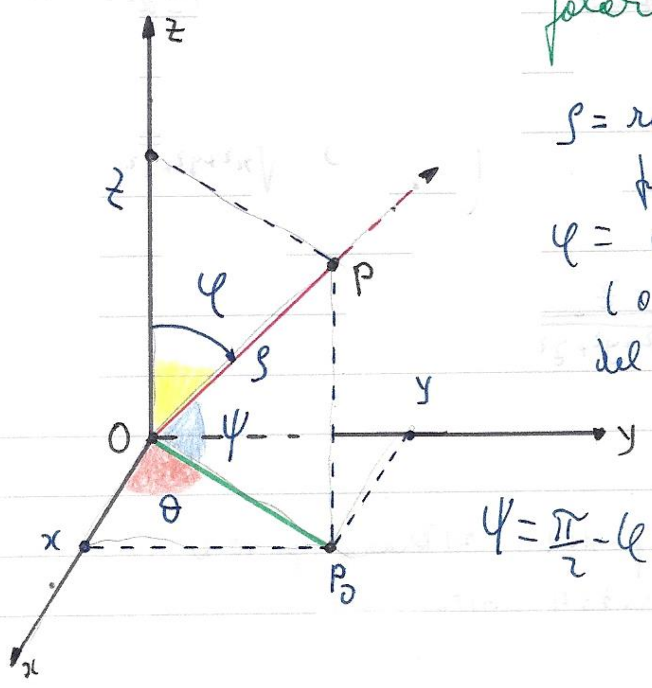
$$J\begin{pmatrix} x & z\\ u & \mathrm{v}\end{pmatrix}=J_1(u,\mathrm{v})=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix} \qquad J\begin{pmatrix} x & z\\ u & \mathrm{v}\end{pmatrix}=J_2(u,v)=-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{v}} & \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}$$

$$J\begin{pmatrix} x & y\\ u & \mathrm{v}\end{pmatrix}=J_3(u,\mathrm{v})=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \mathrm{v}} & \dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{v}}\end{vmatrix}$$

Coordinate polari nello spazio

Fissato nello spazio un sistema ortonormale di assi cartesiani $Oxyz$, scegliamo un punto qualsiasi P. Siano ρ = misura di OP, φ = angolo che l'asse polare z forma con la semiretta OP, orientata da O verso P, θ = angolo (misurato in senso antiorario) che la proiezione ortogonale di OP forma con la direzione positiva dell'asse x.

I tre numeri ρ, φ, θ si chiamano le coordinate polari del punto P.



ρ = raggio vettore del punto P.

φ = colatitudine (o angolo zenitale) del punto P

$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ = latitudine di P

ϑ = longitudine (o azimut) di P

$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \vartheta < 2\pi \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

Per passare dalle coordinate polari dello spazio alle coordinate cartesiane e viceversa si utilizzano le seguenti formule:

$x = OP_0 \cos\vartheta \qquad y = OP_0 \sin\vartheta \qquad z = P_0P = \rho\cos\varphi$

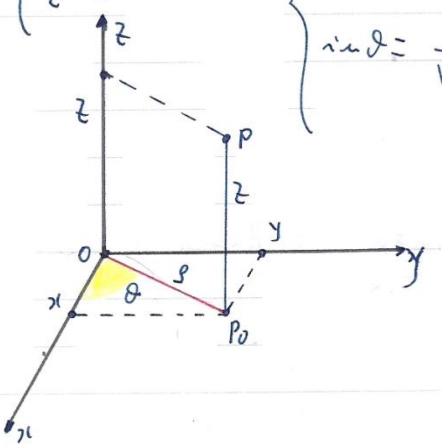
$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ tg\,\vartheta = \dfrac{y}{x} \qquad \vartheta = arctg\,\dfrac{y}{x} \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\rho} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

$$\varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Coordinate cilindriche

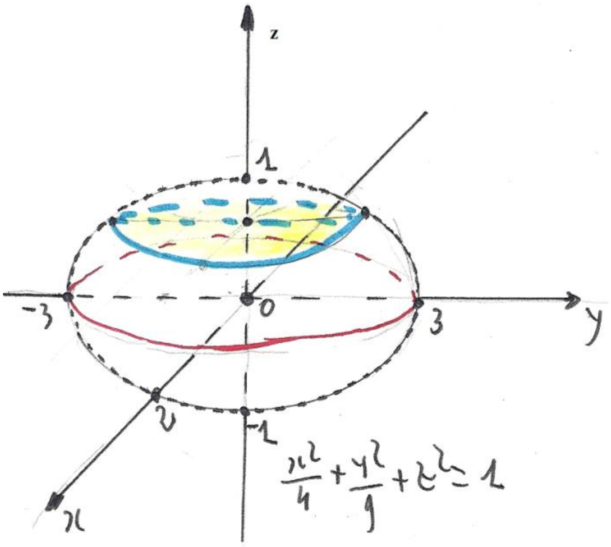
Siano (x, y, z) le coordinate cartesiane ortogonali di un generico punto P dello spazio.
Scegliamo nel piano Oxy un sistema di coordinate polari avente O come polo e la direzione positiva delle x come asse polari.
I tre numeri ρ, ϑ, z prendono il nome di coordinate cilindriche del punto P.
Le formule di trasformazione sono:

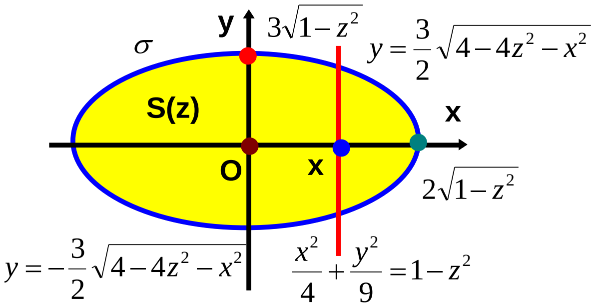
$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad tg\,\vartheta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$



Volume di un solido

Calcolare il volume dell'ellissoide di rotazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$





Ogni piano parallelo al piano Oxy taglia la superficie dell'ellissoide secondo l'ellisse σ di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1-z^2$ L'ellissoide occupa il volume dato dal seguente dominio di R^3:

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\le 1\right\}$$

$$V(E)=\iiint_E dx\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}dz\iint_{S(z)}dx\,dy=\int_{-1}^{1}6\pi\left(1-z^2\right)dz=6\pi\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-1}^{1}=6\pi\cdot\frac{4}{3}=8\pi$$

Ho calcolato l'integrale triplo utilizzando l'**integrazione per strati**.

Per un generico ellissoide di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ abbiamo: $V=\frac{4}{3}\pi abc$

L'integrale superficiale $\iint_{S(z)}dx\,dy$ rappresenta l'area dell'ellisse σ indicata in figura. Noi sappiamo che l'area della superficie dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ vale πab.

Nel caso nella nostra ellisse σ abbiamo:

$$a=2\sqrt{1-z^2}\,,\ b=3\sqrt{1-z^2}\qquad S=\pi\cdot 6\cdot\left(1-z^2\right)=6\pi\cdot\left(1-z^2\right)\qquad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$S=2\frac{b}{a}\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\frac{b}{a}\cdot\left[\frac{1}{2}a\cdot\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right]_{-a}^{a}=\frac{b}{a}\cdot\left[a\cdot\arcsin x+x\sqrt{a^2-x^2}\right]_{-a}^{a}$$

L'integrale indefinito $\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot d\,x$ può essere calcolato per parti o mediante la sostituzione

$$x=a\cdot\sin t \qquad \text{con } -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

L'integrale superficiale $\iint\limits_{S(z)} d\,x\,d\,y$ può essere calcolato come integrale doppio considerando come dominio la parte di piano del primo quadrante individuata dall'ellisse σ, dall'asse x e dall'asse y.

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\le 1 \wedge x\ge 0 \wedge y\ge 0\right\}$$

$$\iint\limits_{S(z)} d\,x\,d\,y=\iint\limits_{D} d\,x\,d\,y=4\int_0^{2\sqrt{1-z^2}} d\,x\int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-4z^2-x^2}} d\,y=4\int_0^{2\sqrt{1-z^2}} d\,x\,[y]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-4z^2-x^2}}=4\int_0^{2\sqrt{1-z^2}}\frac{3}{2}\sqrt{4-4z^2-x^2}\,d\,x$$

$$\iint\limits_{S(z)} d\,x\,d\,y=6\int_0^{2\sqrt{1-z^2}}\sqrt{4-4z^2-x^2}\,d\,x=6\left[2\left(1-z^2\right)\cdot\arcsin\frac{x}{2\sqrt{1-z^2}}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-4z^2-x^2}\right]_0^{2\sqrt{1-z^2}}=6\pi\left(1-z^2\right)$$

$$\int\sqrt{4-4z^2-x^2}\,d\,x=2\left(1-z^2\right)\cdot\arcsin\frac{x}{2\sqrt{1-z^2}}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-4z^2-x^2}+C$$

Si tratta di un integrale del tipo $\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot d\,x$ con $a^2=4-4z^2$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,d\,x = x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\,d\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,d\,x=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,d\,x=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,d\,x+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,d\,x==$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,d\,x+a^2\arcsin\frac{x}{a} \qquad 2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+k$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\cdot dt=a^2\cdot\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\cdot dt=a^2\cdot\int\cos^2 t\cdot dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left[\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d(2t)\right]=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{2}a^2\left(t+\sin t\cdot\cos t\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+k$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+k$$

Pongo: $x=a\cdot\sin t$, $dx=a\cdot\cos t\cdot d\,t$, $\sin t=\frac{x}{a}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{x^2-x^2}$$

Primo teorema di Pappo Guldino

L'**area della superficie di rotazione** generata dalla rotazione completa di una linea intorno ad un asse che non l'attraversi è data dal prodotto della lunghezza della linea per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro della linea.