Unità Didattica N° 01 Gli insiemi

Il concetto di insieme ed i primi elementi di logica matematica

- I concetti di **insieme** e di *elemento di un insieme* sono **concetti primitivi** , cioè non definibili mediante concetti più semplici . Il termine INSIEME è sinonimo di collezione , raccolta , aggregato . Cantor scrisse : << *Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti , facenti parte del mondo della nostra intuizione o del nostro pensiero , concepiti come un tutto unico ; tali oggetti si dicono* **ELEMENTI** *dell'insieme* >>

Questa , però , non è la definizione di insieme ma è soltanto la sua descrizione in quanto non è stato definito il significato di collezione mediante nozioni più semplici . Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino : **A , B , C , D , E , F , G , ...**

Gli **elementi di un insieme** si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino : **x , y , a , b , c ..**

Di solito noi avremo a che fare con uno dei seguenti insiemi numerici :

$N = \{0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri naturali**

$Z = \{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri interi relativi**

Q = insieme dei **numeri razionali** , **R** = insieme dei **numeri reali**

C = insieme dei **numeri complessi**

Se **G** é un insieme , con la scrittura $x \in G$ (si legge : **x appartiene** a G , oppure , **x è un elemento dell'insieme G**) si indica che **x** è uno degli elementi che costituiscono l'insieme **G** . Il segno $\in$ è detto simbolo di appartenenza . Il simbolo $\notin$ è la negazione della relazione di appartenenza . Con la scrittura $x \notin G$ (si legge : x non appartiene a G) si vuole significare che l'elemento **x** non fa parte dell'insieme G . Esempi : $2 \in N$, $\frac{1}{4} \notin N$. Il **principio di estensione** degli insiemi consiste nell'affermare che un insieme è individuato dai suoi elementi .Se **E** ed **F** sono simboli di insiemi , scriveremo **E = F** se gli elementi che costituiscono l'insieme rappresentato dal simbolo **E** sono gli stessi che costituiscono l'insieme rappresentato dal simbolo **F** .

Il **principio di estensione** fornisce un criterio per individuare un insieme .La negazione dell'uguaglianza $E = F$ si indica con la notazione $E \neq F$. Essa significa che esiste almeno un elemento appartenente ad uno dei due insiemi ma non appartenente all'altro .

E' opportuno osservare che esiste una sola **copia** di ogni ente denominato insieme , per cui , quando si individua un insieme mediante i suoi elementi si scrive , di solito , una sola volta il simbolo di ogni suo elemento .

L'insieme delle lettere che compaiono nella parola **tutto** coincide con l'analogo insieme relativo alla parola **tuo** ed è costituito dagli elementi **o , t , u** , è cioè l'insieme $\{o, t, u\}$. In altri termini , gli insiemi sono aggregati **caotici** di elementi .

L'esempio precedente mostra come si possa assegnare un insieme costituito da un numero finito di elementi semplicemente mediante un elenco di tali elementi inseriti in un ordina qualunque .

- La necessità di considerare insiemi aventi infiniti elementi indusse **Cantor** all'idea di introdurre le **proprietà** (o predicati) . La **proprietà** di un ente è tutto ciò per cui ciascun ente si distingue dagli altri . Ad esempio , <<**x è un libro** >> è una *proprietà* in quanto fissato l'elemento x possiamo stabilire se esso è o non è un libro . Si dirà che x è una **variabile** e la *proprietà* sarà indicata con $P(x)$. Una *proprietà* può contenere più variabili . L ' idea di **Cantor** è la seguente (**principio di astrazione**) : assegnata la proprietà $P(x)$ contenente la sola variabile **x** , esiste l'insieme **A** costituito dagli elementi **x** per i quali la proprietà $P(x)$ è vera . In simboli abbiamo : $A = \{ x | P(x) \}$ e si legge : A è l'insieme degli elementi **x** per i quali è vera la proprietà $P(x)$.

Ci accorgiamo subito che in tal modo viene ammessa l'esistenza di un insieme $\varnothing$, privo di elementi , detto INSIEME VUOTO . Esso si ottiene quando si considera una proprietà $P(x)$ falsa per ogni x , ad esempio la proprietà $x \neq x$.

$$\varnothing = \{ x : x \neq x \} = \{ \}$$

$P(x)$ è detta anche **funzione proposizionale** o *funzione enunciativa in una variabile* . Una proprietà $P(x)$ si dice **definita nell'insieme U** se per ogni elemento di **U** è possibile stabilire se $P(x)$ è vera o falsa . L'insieme **U** è detto **insieme universo** o insieme ambiente o *insieme totale*

Diciamo **insieme verità** della funzione enunciativa $P(x)$ l'insieme **A** formato dagli elementi $x \in U$ per i quali risulta vera la proprietà $P(x)$. Ogni qualvolta un insieme viene determinato mediante una proprietà caratteristica dei suoi elementi , bisogna specificare l'insieme **U** (insieme universo o insieme ambiente o insieme totale) da cui prelevare gli elementi che costituiscono l'insieme . Quando non vi è possibilità di equivoci , l'insieme ambiente può essere trascurato .

Se **U** è l'insieme universo e $P(x)$ la **proprietà caratteristica** che individua l'insieme **A** ,scriviamo :

$$A = \{ x | P(x) \wedge x \in U \}$$

e leggiamo : << **A è l ' insieme formato dagli elementi x prelevati dall ' insieme U per i quali risulta vera la proprietà caratteristica** $P(x)$ >> .

$A = \{ x : x = 2n \wedge x \in N \}$ rappresenta l ' insieme dei **numeri pari** .

- Le frasi **qualunque sia** oppure **per ogni** ed equivalenti si esprimono col simbolo $\forall$ detto quantificatore universale . Cosi la scrittura $\forall x \in A$ si legge : << per ogni elemento x appartenente all'insieme A >> oppure << qualunque sia l'elemento x appartenente all'insieme A >> . Analogamente la scrittura $\forall x , y \in A$ si legge : << qualunque siano gli elementi x ed y appartenenti all'insieme A >> .
- Spesso la frase << **tale che** >> si indica con uno dei seguenti simboli << | >> oppure << : >>
- Le frasi << **esiste almeno un** >> ed equivalenti si indicano col simbolo $\exists$ detto quantificatore esistenziale . Cosi la scrittura $\exists x \in A$ si legge << *esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme* A >> . La frase << **esiste ed è unico** >> viene indicata col simbolo $\exists^*$. Ad esempio la scrittura $\exists^* x \in N : x + 2 = 8$ si legge << *esiste ed è unico il numero x tale che* $x + 2 = 8$ >> . Il numero in questione è il numero 6 . La scrittura $\exists x \in A :$ ($\exists x \in A |$) si legge : << *esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme A tale che* >> .
- Molte grammatiche definiscono la **proposizione** come << un giudizio della mente espresso con parole >> . La *logica matematica* respinge questa definizione in quanto essa ammette come già noto il significato del termine **giudizio** . Per la logica matematica **proposizione** è una combinazione di parole o di simboli a cui compete uno solo dei seguenti attributi : << vero >> o << **falso** >>. Tali attributi saranno simbolicamente indicati con le lettere **V , F** . << Roma è una città bella >> non rappresenta una *proposizione* in quanto non possiamo stabilire se la circostanza è vera o falsa . Rappresenteremo le nostre proposizioni mediante lettere , ad esempio **p , q ,..** . La terra è un pianeta è una proposizione vera , la luna è una stella è una **proposizione falsa** .

Quando una **proposizione** q è la conseguenza di una **proposizione** p si dice che *p* implica q *e si scrive :* $p \Rightarrow q$ (p implica q) . Questa scrittura vuole dire che << se è vera la proposizione p è vera anche la proposizione q >> : p dicesi **premessa** o ipotesi , q **conseguenza** o tesi .

In matematica ogni teorema del tipo : << **p è condizione sufficiente per q** >> oppure , ed è la stessa cosa , << *q è condizione necessaria per p* >> si può esprimere semplicemente scrivendo :

$p \Rightarrow q$, cioè ogni **teorema** avente p come **ipotesi** e q come **tesi** si esprime dicendo che p è condizione sufficiente per q , mentre **q è condizione necessaria per p** .

Quando l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera si dice che è un TEOREMA , p si chiama **ipotesi** , q **<u>tesi</u>** .

Quindi , in ogni teorema la verità dell'ipotesi è **condizione sufficiente** per la verità della tesi , mentre la verità della tesi è **condizione necessaria** (ma in generale non sufficiente) per la verità dell'ipotesi ; cioè *una condizione sufficiente va posta come ipotesi , una condizione necessaria come tesi* . Il segno $\Rightarrow$ rappresenta il simbolo di **implicazione logica** . Il simbolo $\not\Rightarrow$ si legge << **non implica** >> . Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ non è detto che debba risultare vera l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$. Esempio : Paolo è torinese $\Rightarrow$ Paolo è italiano , mentre Paolo è italiano $\not\Rightarrow$ Paolo è torinese .

Se **p** e **q** sono due proposizioni per le quali risulta contemporaneamente $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ allora diremo che le proposizioni **p** e **q** sono equivalenti e scriviamo : $p \Leftrightarrow q$ e leggiamo :

<< **p equivale logicamente a q** >> oppure più semplicemente << **p equivale a q** >> oppure << **p coimplica q** >> .

$\Leftrightarrow$ simbolo di **equivalenza logica** o di *doppia implicazione* o di **coimplicazione**

si legge : << *equivale logicamente* oppure coimplica >> $\not\Leftrightarrow$ non equivale a

In matematica , ogni teorema del tipo << **p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q** >> si può esprimere semplicemente scrivendo : $\boxed{p \Leftrightarrow q}$

La coesistenza di un teorema e del suo inverso determina le cosiddette *condizioni necessarie e sufficienti* . Precisamente una **condizione** C , rispetto ad una proprietà P si dice che è :

1) **necessaria** quando considerando P come ipotesi si deduce C come tesi

2) **sufficiente** quando considerando C come ipotesi si deduce P come tesi

OSSERVAZIONI

- Un insieme si dice **astratto** quando non è precisata la natura degli elementi che lo costituiscono .
  Un insieme si dice **numerico** quando i suoi elementi sono numeri
- Il simbolo di appartenenza $\in$ fu introdotto da Giuseppe Peano e si chiama pertanto **simbolo di Peano**

- Diremo che un insieme A è **finito** se esiste un numero naturale n tale che ad A appartengono n elementi . Diremo invece che A è **infinito** se , qualunque sia il numero naturale n , all'insieme appartengono più di n elementi . Successivamente chiariremo meglio il concetto di insieme infinito
- L ' insieme formato da un solo elemento si dice un **singolo** e si indica col simbolo $\{a\}$. Risulta sempre $\{a\} \neq a$. L'insieme formato da due elementi si dice un **paio** e si indica col simbolo $\{a,b\}$. L'insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing = \{\ \}$

In particolare risulta : $\{\varnothing\} \neq \varnothing$

- L'ordine secondo cui sono elencati gli elementi di un insieme non ha importanza , cioè gli insiemi $\{a,b,c\}$ e $\{b,a,c\}$ rappresentano lo stesso insieme .

La rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in diverse maniere :

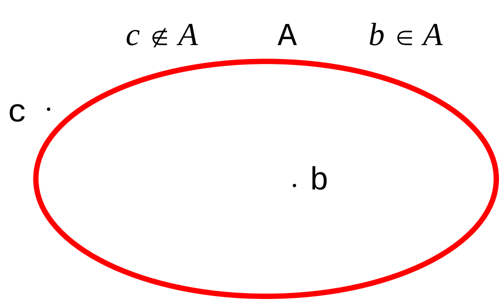
1) **Rappresentazione tabulare**

Si elencano gli elementi che costituiscono l ' insieme ; essi vengono racchiusi fra due parentesi graffe . Si ha cosi la **rappresentazione tabulare** (o per *elencazione* o analitica o in **estensione**) dell ' insieme . Esempi : $A = \{a,e,i,o,u\}$ $B = \{1,3,8,17,25\}$

2) **Rappresentazione caratteristica**

Si possono definire gli elementi dell ' insieme con una **proprietà** che permette di ricavarli senza ambiguità . Basta enunciare tale proprietà : si ha la **rappresentazione caratteristica** (o *sintetica* dell'insieme) . $A = \{x : P(x) \wedge x \in I\}$ $A = \{x : x < 8 \wedge x \in N\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

3) **Rappresentazione grafica**



Per rendere suggestiva la considerazione di un insieme astratto A si usa dare una **rappresentazione grafica** mediante curve piane chiuse prive di nodi , limitanti delle superfici sulle quali sono rappresentate i punti che individuano gli elementi dei vari insiemi . *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme* . Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme ; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all ' insieme .

OSSERVAZIONI

- Quando si rappresentano insiemi finiti vi sono punti interni al contorno che non rappresentano nulla (Qualche volta si tratteggia la parte di superficie priva di elementi)
- Quando si rappresentano insieme infiniti tutti i punti della superficie limitata dalla curva sono elementi dell'insieme
- Le figure che così si ottengono si dicono **diagrammi di Venn** (logico inglese 1834-1927) o *diagrammi di Eulero* (matematico svizzero 1707-1783)

Sottoinsieme di un insieme

Si dice che un insieme **A** è un **sottoinsieme proprio** dell'insieme **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **A** , ma esiste almeno un elemento di **B** che non appartiene ad **A** . Questa relazione fra insiemi , detta relazione d'inclusione stretta o di inclusione forte , si scrive : $A \subset B$

e si legge : << **A** è sottoinsieme proprio di **B** , oppure **A** è parte propria di **B** , oppure **A** è incluso (o contenuto) propriamente (o in senso stretto) in **B** . Il simbolo $\subset$ è detto simbolo di **inclusione stretta** (o propria o forte) . Si dice anche che **B** include o contiene **A** e si scrive $B \supset A$.

Se invece **A** non è incluso in **B** si scrive : $A \not\subset B$ oppure $B \not\supset A$

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \forall x \in A \Rightarrow \exists x \in B \wedge : x \notin A \right\}$$

Dati due insiemi **A** e **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B** si dice che **A** è un **sottoinsieme** di **B** od anche che è contenuto o incluso in **B** . In questo caso scriviamo : $A \subseteq B$

e si legge : << **A** è un sottoinsieme di **B** oppure **A** è incluso in **B** >> .

Il simbolo $\subseteq$ è il **simbolo di inclusione larga** (o *debole*) nel senso che questa volta non si esclude che ogni elemento di **B** possa appartenere ad **A** . Si legge : << L 'insieme **A** è contenuto o coincide con l'insieme **B** >> . Dalla definizione di sottoinsieme si deduce che fra i sottoinsiemi di un certo insieme **B** c'è l'**insieme vuoto** $\varnothing$ e c'è l'insieme **B** . Si abbia l'insieme $B = \left\{ a,b,c \right\}$ I **sottoinsiemi** di **B** sono :

$$\varnothing \ , \ \left\{ a \right\} \ , \ \left\{ b \right\} \ , \ \left\{ c \right\} \ , \ \left\{ a,b \right\} \ , \ \left\{ a,c \right\} \ , \ \left\{ b,c \right\} \ , \ \left\{ a,b,c \right\}$$

Quando **A** è un sottoinsieme non vuoto di **B** e che non coincide con **B** , si dice che **A** è un *sottoinsieme proprio* di **B** , mentre l'insieme vuoto e l'insieme **B** si chiamano **sottoinsiemi impropri** di **B** . Il simbolo $\subset$ si legge : << **include** o *è contenuto* >> .

La relazione di **inclusione in senso largo** gode delle tre seguenti proprietà formali :

1) **RIFLESSIVA** : $A \subseteq A$

2) **TRANSITIVA** : $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

3) **ANTISIMMETRICA** : $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

Il modo più naturale ed usato per assegnare un sottoinsieme **A** di **B** è quello di fornire una proprietà $P(x)$ che faccia inequivocabilmente decidere se un dato elemento $x \in B$ goda oppure no della proprietà $P(x)$.

In tal caso si parla di **proprietà** (o *legge*) **caratteristica** di **A** dentro **B** . Con la scrittura :

$$A = \{ x \in B : P(x) \}$$

intenderemo l'insieme **A** costituito dagli elementi $x \in B$ per cui è vera la **proprietà caratteristica** $P(x)$. Se $J \subset U$, definiamo **complementare di J rispetto ad U** l'insieme $C_U J$ costituito dagli elementi di **U** che non appartengono a **J** . In simboli abbiamo :

$$C_U J = \{ x : x \in U \wedge x \notin J \wedge J \subset U \}$$

Intersezione di due o più insiemi

- Dati due insiemi A e B , l'insieme C formato dagli elementi comuni ad A e B si chiama **insieme intersezione** o intersezione di A e B . Scriviamo $C = A \cap B$ e leggiamo : << *C è uguale ad A intersecato B* >> . In simboli abbiamo : $C = C = A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$

$\cap$ è il simbolo di **intersezione**

<< *Dire che x appartiene all'intersezione di A con B equivale a dire che x appartiene contemporaneamente ad A e B* >> .

Due insiemi A e B si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune , cioè se $A \cap B = \varnothing$

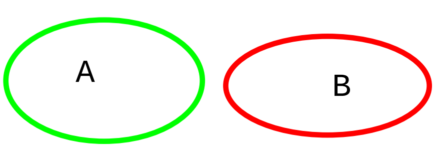
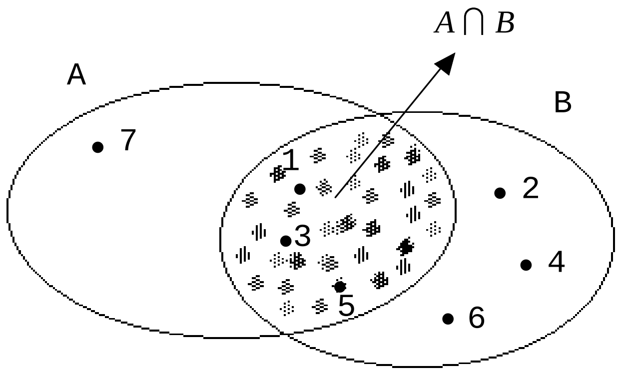


Immagine grafica di due insiemi **disgiunti**

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ oppure $B = \varnothing$ oppure A e B sono **insiemi disgiunti** .



Graficamente l'insieme intersezione è rappresentato dalla parte spruzzata.

$A = \{1,3,5,7\}$

$B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$C = A \cap B = \{1,3,5\}$

Per convenzione si pone :

$A \cap \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap A = \varnothing$

L ' intersezione di due insiemi gode delle seguenti proprietà formali :

1) **proprietà iterativa** o di ***idempotenza*** $A \cap A = A$

2) **proprietà commutativa** $A \cap B = B \cap A$

3) **proprietà associativa** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

La definizione di intersezione si estende anche al caso di tre o più insiemi . L ' intersezione degli insiemi $A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_k$ è l'insieme C formato dagli elementi comuni a tutti gli insiemi dati -

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap .... A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

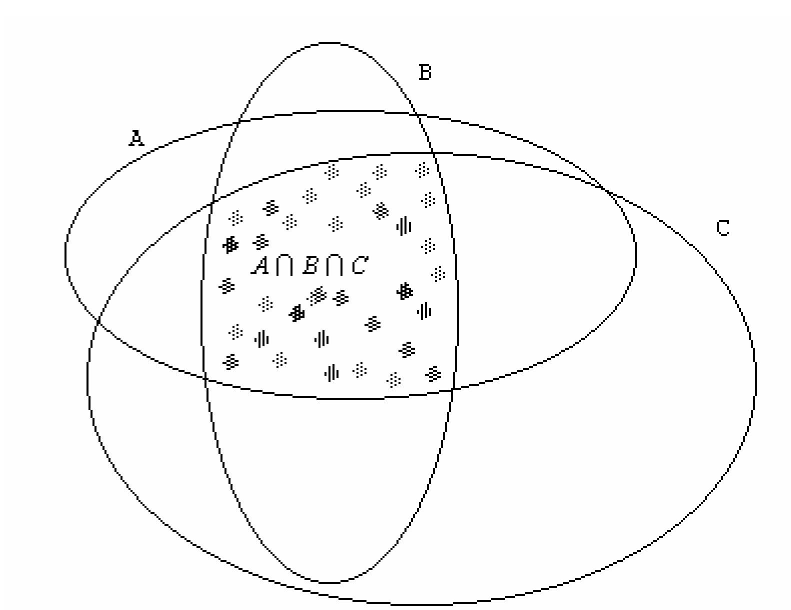


Diagramma di Eulero-Venn

relativo all'intersezione di tre

insiemi .

Unione di due insiemi

Definiamo **unione** di due insiemi A e B l'insieme C costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi , cioè dagli elementi che appartengono ad A o B o ad entrambi .
(Gli elementi comuni agli insiemi A e B vanno presi una sola volta) . In simboli abbiamo :

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

e si legge << *U uguale A unito B* >> . Qui il significato di **oppure** ($\vee$)non ha valore esclusivo , cioè il significato di $\vee$ è quello di **vel** latino e non di aut . Quindi un elemento appartiene all'unione se : 1) appartiene ad A 2) oppure appartiene a B 3) oppure appartiene ad entrambi gli insiemi .
$\cup$ è il **simbolo di unione** .

$$A = \{1,3,5\} \ , \ B = \{1,2,3,4\} \ \Rightarrow \ C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A = \{2,3,4,7\} \ , \ B = \{5,9\} \ \Rightarrow \ C = A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$$

Per l'unione di due insiemi valgono le seguenti proprietà formali :

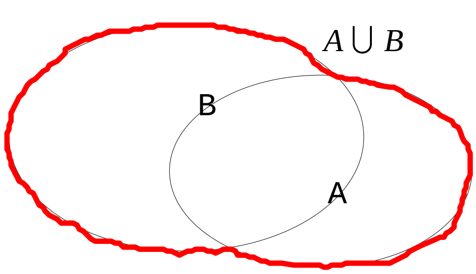
1) $A \cup A = A$ **idempotenza**

2) $A \cup B = B \cup A$ **commutativa**

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ **associativa**

4) $A \cup \varnothing = A$ $\varnothing$ è l'elemento neutro

Si dice unione di più insiemi A , B , C , D ,... l'insieme X formato dagli elementi appartenenti ad uno almeno di tali insiemi . $X = A \cup B \cup C \cup D....$



La parte di piano delimitata dal contorno a tratto pieno rappresenta $A \cup B$

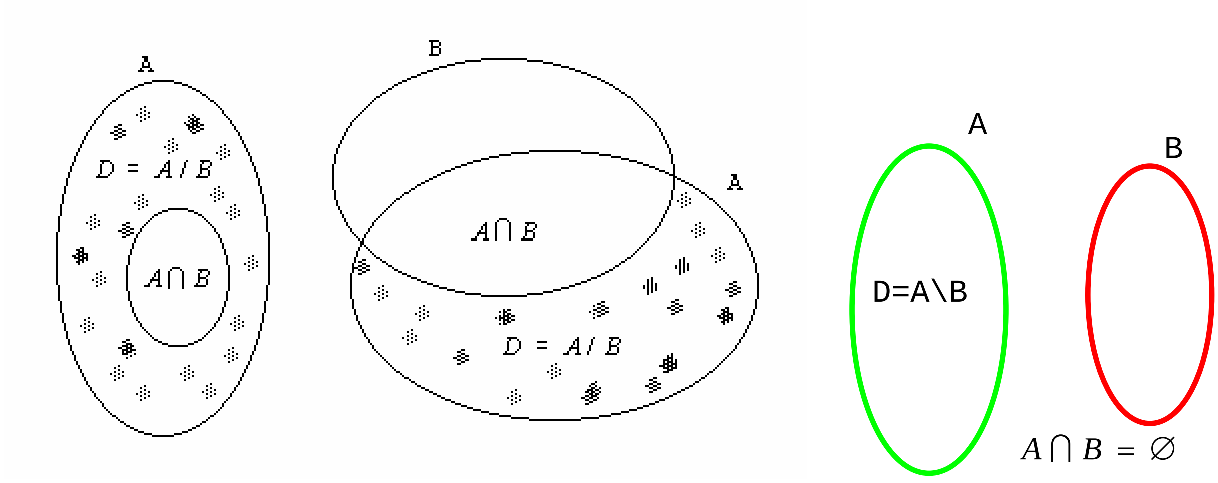
Differenza di due insiemi

Si dice **differenza** di due insiemi A e B (in questo ordine) l'insieme D costituito dagli elementi dell'insieme A che non appartengono all'insieme B . In simboli abbiamo :

$$D = A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

e si legge << **D uguale A meno B** >> **.**

I seguenti **diagrammi di Eulero-Venn** visualizzano la situazione nei vari casi . La differenza è rappresentata dalla parte di piano riempita con lo spruzzo .



$\forall\ A$ risulta : $A - \varnothing = A$, $A - A = \varnothing$, $A - B \neq B - A$

Se in particolare risulta $A \subset B$ allora l'insieme differenza $D = A \setminus B$ si dice il **complementare di B rispetto ad A** (vedere **primo diagramma di Eulero-Venn**) e si indica con

$$C_A B = A \setminus B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

e si legge : << ***differenza complementare di B rispetto ad A*** >>

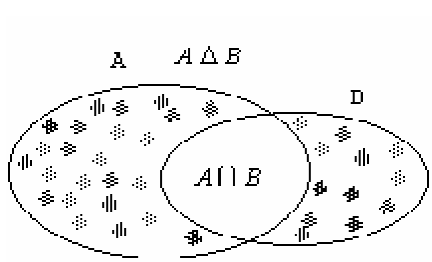
OSSERVAZIONE

Le operazioni di intersezione e di unione corrispondono , volendo fare una analogia con le operazioni aritmetiche , al prodotto ed alla somma .

Si definisce **differenza simmetrica** di due insiemi A e B l'insieme i cui elementi sono quelli non comuni ad A e B . In simboli abbiamo :

$$A \Delta B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap B \} = (A - B) \cup (B - A)$$

e si legge : << **differenza simmetrica fra gli insiemi A e B** >>



La differenza simmetrica con i **diagrammi di Eulero-Venn**. La parte di piano macchiata rappresenta la differenza simmetrica fra gli insiemi A e B

Insieme delle parti di un insieme

Si definisce **insieme delle parti** di un insieme A e si indica col simbolo **P(A)** l'insieme che come elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A , compresi l'insieme stesso A e l'insieme vuoto $\varnothing$.

Dato l'insieme $A = \{a,b,c\}$, tutti i suoi possibili sottoinsiemi sono :

$$\varnothing \;,\; \{a\} \;,\; \{b\} \;,\; \{c\} \;,\; \{a,b\} \;,\; \{a,c\} \;,\; \{b,c\} \;,\; \{a,b,c\}$$

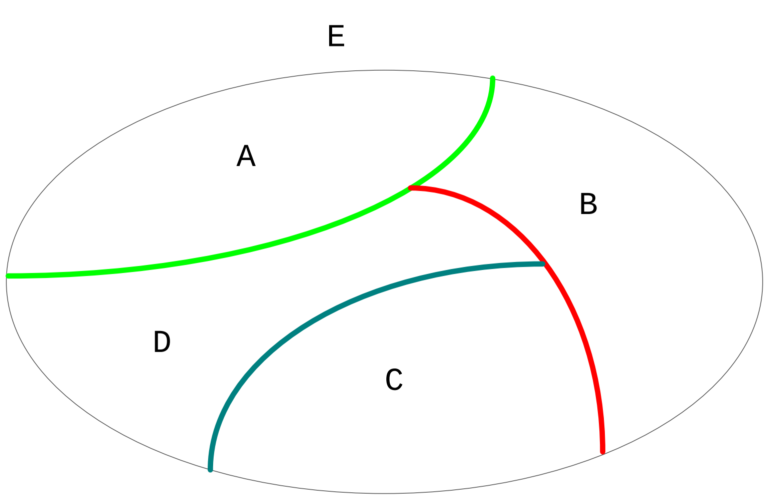
$$P(A) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Partizione di un insieme

Dato un insieme E consideriamo i suoi sottoinsiemi A ,B , C , D soddisfacenti alle seguenti condizioni :

1) nessuno dei sottoinsiemi è vuoto 2) due sottoinsiemi distinti sono **disgiunti** , cioè la loro intersezione è l'insieme vuoto 3) l'unione di tali sottoinsiemi è l'insieme dato E . In tali condizioni si dice che i sottoinsiemi A , B , C , D costituiscono una **partizione** dell'insieme E .

- L'insieme dei **numeri naturali pari** e quello dei <u>numeri naturali dispari</u> costituiscono una partizione dell'insieme dei numeri naturali .
- L'insieme N dei numeri naturali ammette come sottoinsiemi i multipli del 3 (insieme A) , i multipli del 5 (insieme B) , i multipli del 6 (insieme C) , i numeri primi (insieme D) . Tuttavia questi sottoinsiemi (A , B , C , D) non costituiscono una partizione di N . Infatti , ad esempio , il numero 15 appartiene sia ai multipli di 3 che ai multipli di 5 ($15 \in A$, $15 \in B$) e quindi due sottoinsiemi distinti (A e B) non risultano disgiunti . Vi sono , poi , numeri come il 14 , 16 ed altri che non appartengono a nessuno dei sottoinsiemi di considerati . Questo significa che l'unione dei sottoinsiemi A , B , C , D non à l'insieme N .



I sottoinsiemi A , B , C , D costituiscono una partizione dell ' insieme E perché sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti e la loro unione è l'insieme E

Coppie ordinate

Siano dati due insiemi A e B non vuoti Col simbolo (a,b) con $a \in A$, $b \in B$ indichiamo una **coppia ordinata** avente come **prima componente** (o *prima coordinata* o ascissa) un elemento $a \in A$ e come **seconda componente** (o *seconda coordinata* o ordinata) un elemento $b \in B$. Non bisogna fare confusione tra la coppia ordinata (a,b) e l'insieme $\{a,b\}$. Nella coppia ordinata (a,b) è essenziale l'ordine in cui vengono considerate le componenti , mentre nell'insieme $\{a,b\}$ l'ordine in cui si considerano gli elementi non ha importanza . Il concetto di **coppia ordinata** può essere meglio precisato stabilendo un opportuno **criterio di uguaglianza** . Per i nostri scopi risulta necessario stabilire che due coppie ordinate (a,b) e (c,d) sono **uguali** se , e solo se , **a = c** $\wedge$ **b = d** .

In particolare abbiamo $(a,b) = (b,a)$ se , e solo se , **a = b** , mentre è $(a,b) \neq (b,a)$ se $a \neq b$.

Quindi per gli insiemi risulta sempre $\{a,b\} = \{b,a\}$, per le coppie ordinate $(a,b) \neq (b,a)$ a meno che non sia **a = b** .

Prodotto cartesiano

Siano A e B due insiemi non vuoti (distinti o non) . Si chiama **prodotto cartesiano** di A per B e si indica col simbolo $A \times B$ (si legge A cartesiano B oppure a per B) un nuovo insieme che ha per elementi tutte le coppie ordinate che hanno come prima componente un elemento di A e come seconda componente un elemento di B , cioè : $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

$A \times B$ = **prodotto cartesiano di A per B**

Il prodotto cartesiano di un insieme A per se stesso si indicherà anche col simbolo A^2 . Risulta pertanto : $A \times A = A^2 = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in A\}$

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$, $A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$$B \times A = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

Dagli esempi precedenti si può concludere che il prodotto cartesiano non è commutativo , cioè in generale risulta : $A \times B \neq B \times A$ in quanto di tratta di insiemi i cui elementi sono coppie ordinate .

Si può , anzi , dimostrare che se A e B sono insiemi non vuoti , si ha : $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

Si può dimostrare che se l'insieme A contiene **m** elementi e l'insieme B contiene **n** , allora l'insieme $A \times B$ contiene $m \cdot n$ elementi .

E' particolarmente importante il caso in cui il secondo insieme è uguale al primo **A = B** . Allora tra le coppie ordinate di $A \times B = A \times A = A^2$ ve ne sono di quelle costituite dagli stessi elementi , cioè del tipo : $(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), \cdots$

Esse costituiscono un sottoinsieme si $A \times A$ detto **sottoinsieme diagonale** di A^2 . Si conviene inoltre di porre : $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$, $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

Proprietà formali del prodotto cartesiano :

1) **proprietà distributiva rispetto all ' intersezione** :

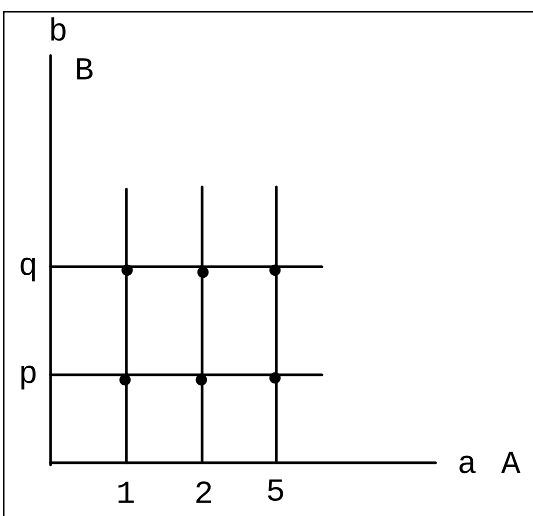
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad , \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

2) **proprietà distributiva rispetto all ' unione**

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad , \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Rappresentazione reticolare di un prodotto cartesiano

Gli elementi (coppie ordinate) di un prodotto cartesiano possono essere indicati mediante i **nodi** delle maglie di un reticolo . Conviene disegnare due semirette fra loro ortogonali e con l'origine in comune , rappresentando sulla semiretta orizzontale a gli elementi dell'insieme A e sulla semiretta verticale b tutti gli elementi dell'insieme B .



Rappresentazione reticolare del **prodotto cartesiano**

$A \times B = \{(1, p), (1, q), (2, p), (2, q), (5, p), (5, q)\}$

quando $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{p, q\}$

Le rette condotte per i punti di a che rappresentano gli elementi di A parallele alla semiretta b e le rette condotte per i punti di b che rappresentano gli elementi di B parallele alla semiretta a individuano dei **nodi** che rappresentano simbolicamente gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Poiché nel prodotto cartesiano l'ordine è importante , può essere utile convenire di considerare come **primo insieme** A quello rappresentato sulla semiretta a disposta orizzontalmente ed il **secondo insieme** B sulle semiretta b disposta verticalmente .

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B può essere visualizzato anche mediante una tabella rettangolare , detta **tabella a doppia entrata** , nella quale :

1) ogni riga è contrassegnata da una sola ascissa
2) ogni ascissa contrassegna una sola riga
3) ogni colonna è contrassegnata da una sola ordinata
4) ogni ordinata contrassegna una sola colonna
5) nell ' intersezione della riga contrassegnata con $a \in A$ e della colonna contrassegnata con $b \in B$ si colloca la coppia ordinata (a,b) .

L ' elemento che contrassegna una determinata riga prende il nome di **indirizzo di riga** , l ' elemento che contrassegna una determinata colonna prende il nome di **indirizzo di colonna** .

	p	q
1	(1,p)	(1,q)
2	(2,p)	(2,q)
5	(5,p)	(5,q)

Visualizzazione del prodotto cartesiano $A \times B$ mediante una tabella a doppia entrata quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

Simbolismo di particolari insiemi numerici

$N = \{0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri **naturali** , zero compreso

$N^* = N_o = \{1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri naturali , zero escluso

$Z = \{\cdots\cdots-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri **interi** relativi, zero compreso

$Z^* = Z_o = \{\cdots\cdots-3,-2,-1,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri **interi non nulli** ....insieme dei numeri interi relativi , zero escluso

$Z^+ = \{1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri interi positivi

$Z^- = \{\cdots\cdots-5,-4,-3,-2,-1\}$ ....insieme dei numeri interi negativi

Q ....insieme dei numeri razionali relativi , zero incluso

$Q^* = Q_o$ ....insieme dei numeri razionali relativi , zero escluso

Q^+ ....insieme dei numeri razionali positivi

Q^- ....insieme dei numeri razionali negativi

R...insieme dei numeri reali relativi , zero compreso

R^+ ....insieme dei numeri reali positivi

R^- ....insieme dei numeri reali negativi

$R - Q$ ....insieme dei numeri irrazionali relativi

C ....insieme dei numeri complessi

Q_a ....insieme dei numeri razionali assoluti , zero compreso

R_a ....insieme dei numeri reali assoluti , zero compreso

$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ ....insieme **R** ampliato

Quindi con **R** intendiamo l ' insieme dei numeri reali finiti .

$$\begin{array}{ccccccc} N & \subset & Q^+ & \subset & R^+ & & \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ Z & \subset & Q & \subset & R & \subset & C \end{array}$$

Nei tre insieme **Q , R , C** sono illimitatamente possibili le 4 operazioni razionali (addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisione) . Per questa notevole proprietà si dice che ciascuno dei tre insiemi numerici costituisce un **campo numerico** .

I concetti di costante e di variabile

Nello studio di determinati problemi assumono particolare importanza i concetti di **costante** e di *variabile* . Definiamo **variabile** (numerica) in un dato insieme (numerico) **A** una lettera (ad esempio **x**) o un qualsiasi altro simbolo atto a rappresentare un elemento (numero) qualsiasi dell'insieme (numerico) **A** . Definiamo **costante** (numerica) in un dato insieme (numerico) **A** una lettera (ad esempio **a**) o qualsiasi altro segno atto a rappresentare un ben determinato elemento (numero) dell 'insieme (numerico) **A** . Di solito riserviamo alle costanti le prime lettere dell'**alfabeto latino** (a , b , c , d ,...) ed alle variabili le ultime lettere dell'**alfabeto latino** (x , y , z , u , v ,...) .

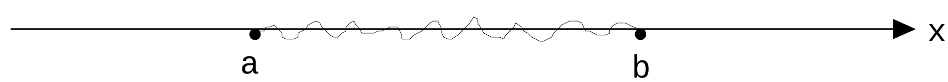
In particolare parleremo di **variabile intera** se $x \in Z$, di variabile razionale se $x \in Q$, di <u>variabile reale</u> se $x \in R$, di **variabile complessa** se $x \in C$.

Concetto di intervallo

Detti **a** e **b** due qualsiasi numeri reali con $a < b$, definiamo **intervallo limitato e chiuso** di estremi **a** e **b** il seguente insieme numerico :

$[a,b] = \{x : x \in R \wedge a \le x \le b\}$ = **intervallo limitato e chiuso di estremi a , b**

a è detto **estremo inferiore** (o *estremo sinistro)* , **b** <u>**estremo superiore**</u> (o *estremo destro*) , $b - a$ **ampiezza dell ' intervallo** , $\dfrac{b-a}{2}$ **raggio** dell ' intervallo , $\dfrac{a+b}{2}$ **centro** dell ' intervallo . Un intervallo limitato e chiuso ha la seguente immagine geometrica :



Se **a** o **b** oppure entrambi non appartengono all ' intervallo , allora questi dicesi **aperto** , in particolare abbiamo :

$[a,b[= \{x : x \in R \wedge a \le x < b\}$ = intervallo limitato , chiuso a sinistra ed aperto a destra

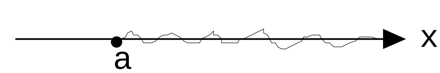
$]a,b] = \{x : x \in R \wedge a < x \le b\}$ = **intervallo limitato , chiuso a destra ed aperto a sinistra**

$]a,b[= \{x : x \in R \wedge a < x < b\}$ = **intervallo limitato aperto**

L ' **immagine geometrica** di un intervallo limitato è un segmento . Esistono anche **intervalli illimitati** per i quali **a** o **b** o entrambi assumono valore infinito .

$[a,+\infty[= \{x : x \in R \wedge x \ge a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente) e **chiuso a sinistra** (o di estremo inferiore a)

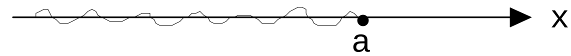
$]a,+\infty[= \{x : x \in R \wedge x > a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente) **ed aperto a sinistra** (o di estremo inferiore a)



$[-\infty,a] = \{x : x \in R \wedge x \le a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente) **e chiuso a destra** (o di estremo superiore a)

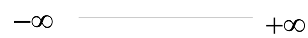
$\boxed{]-\infty, a[\; = \{x : x \in R \;\wedge\; x < a\}}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente)

e aperto a destra (o di estremo superiore a)

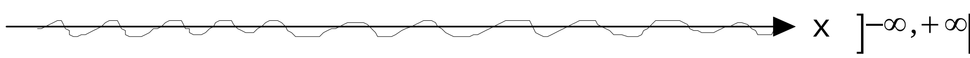


L ' immagine geometrica di uno di questi intervalli illimitati è una semiretta .

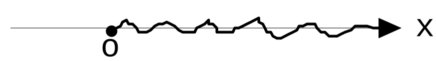
$\boxed{R = \left]-\infty, +\infty\right[\; = \{x : x \in R\}}$ = **intervallo illimitato**



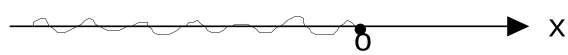
La sua immagine geometrica è l'intera retta



$\boxed{R^+ = \left]0, +\infty\right[\; = \{x : x \in R \;\wedge\; x > 0\}}$



$\boxed{R^- = \left]-\infty, 0\right[\; = \{x : x \in R \;\wedge\; x < 0\}}$



Concetto di intorno

- Si definisce **intorno completo del punto** $x_o \in R$ e si denota col simbolo $I(x_o)$, un qualunque intervallo $]a, b[\; = \;]x_o - \delta_1, x_o + \delta_2[$ che abbia x_o al suo interno .

$$I(x_o) = \;]a, b[\; = \;]x_o - \delta_1, x_o + \delta_2[\qquad \forall \delta_1, \delta_2 \in R^+$$

Per $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 = 0$ otteniamo l ' **intorno sinistro** : $\boxed{I^-(x_o) = \;]x_o - \delta_1, x_o[}$ $\forall \delta_1 \in R^+$

Per $\delta_2 > 0$ e $\delta_1 = 0$ otteniamo l ' **intorno destro** : $\boxed{I^+(x_o) = \;]x_o, x_o + \delta_2[}$ $\forall \delta_2 \in R^+$

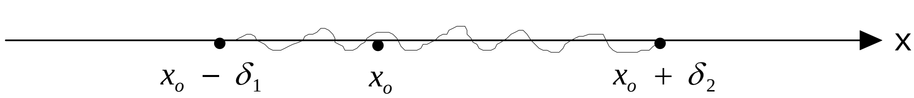


Immagine geometrica di un **intorno completo**

Per $\delta_1 = \delta_2 = \delta > 0$ abbiamo l ' **intorno circolare di centro** x_o **e raggio** $\delta \in R^+$, o **intorno simmetrico del punto** x_o .

$$\boxed{I(x_o) =]x_o - \delta, x_o + \delta[= \{x : x \in R \wedge x_o - \delta < x < x_o + \delta\}} \qquad \forall \delta \in R^+$$

L'insieme $I(x_o,\delta)$ è soluzione della inequazione $|x - x_o| < \delta \in R^+$.

Quest ' ultimo è il modo in cui talvolta viene indicato **un intorno circolare** di x_o .

Se si vuole escludere dall ' intorno il punto x_o stesso , si scrive :

$$\boxed{0 < |x - x_o| < \delta \in R^+}$$

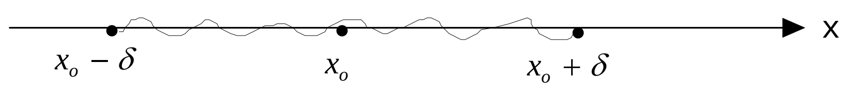


Immagine geometrica di intorno simmetrico

Dicesi **intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo aperto a sinistra ed illimitato superiormente :

$$\boxed{I(+\infty) =]h, +\infty[= \{ x : x \in R \wedge x > h \} \qquad \forall h \in R}$$

Dicesi **intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo aperto a destra ed illimitato inferiormente :

$$\boxed{I(-\infty) =]-\infty, k[= \{ x : x \in R \wedge x < k\} \qquad \forall k \in R}$$

Definiamo **intorno di infinito** l ' unione dell ' intorno di - ∞ e dell ' intorno di + ∞

$$\boxed{I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty, k[\cup]h, +\infty[} \qquad \forall h, k\, R$$

Spesso è utile considerare il seguente **intorno simmetrico di** ∞ :

$$\boxed{I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty, -k[\cup]k, +\infty[} \qquad \forall k \in R^+$$

$$\boxed{I(\infty) = \{ x : x \in R \wedge |x| > k \}} \qquad \forall k \in R^+$$