Unità Didattica N° 18

Altre proprietà delle funzioni circolari

Formule di addizione e di sottrazione

Sono formule che ci consentono di calcolare le funzioni goniometriche degli angoli $\alpha + \beta$ ed $\alpha - \beta$ quando conosciamo le funzioni goniometriche degli angoli α e β .

Siano $\vec{e} = P - O = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$ e $\vec{u} = Q - O = \cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j}$ due qualsiasi vettori applicati in O , per i quali risulta : $\alpha = (\vec{i}, \vec{e})$, $\beta = (\vec{i}, \vec{u})$.

$\vec{e} \times \vec{u} = \cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) \times (\cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j})$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Mutando β in $-\beta$ otteniamo : $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Poiché il seno di un angolo è uguale al coseno del suo complementare possiamo scrivere ;

$$sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Cambiando β in $-\beta$ otteniamo : $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

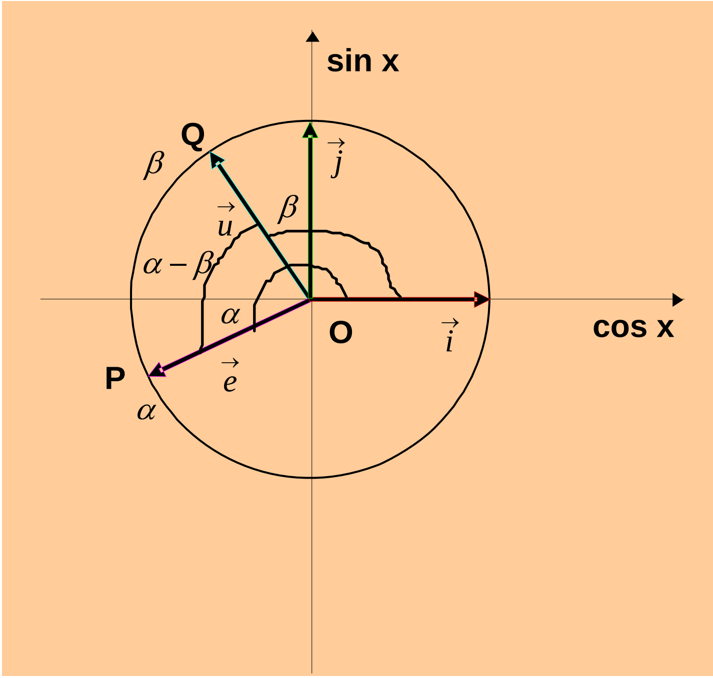
$$tg(\alpha - \beta) = \frac{sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{sin\alpha\cos\beta - sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + sin\alpha\, sin\beta} = \frac{\dfrac{sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{sin\alpha\, sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

con $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ e quindi : $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$ $\quad \left\{\begin{array}{l}\alpha \\ \beta \\ \alpha - \beta\end{array}\right\} \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

Alla stessa maniera si dimostra che : $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$ $\quad \left\{\begin{array}{l}\alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta\end{array}\right\} \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

$$\cot g(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - sin\alpha\, sin\beta}{sin\alpha\, sin\beta + \cos\alpha\, sin\beta} = \frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{sin\alpha\, sin\beta} - \dfrac{sin\alpha\, sin\beta}{sin\alpha\, sin\beta}}{\dfrac{sin\alpha\cos\beta}{sin\alpha\, sin\beta} - \dfrac{\cos\alpha\, sin\beta}{sin\alpha\, sin\beta}}$$

cos sin $\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.



$$\cot g(\alpha + \beta) = \frac{\cot g\alpha \cot g\beta - 1}{\cot g\alpha + \cot g\beta} \qquad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{matrix} \right\} \neq k\pi$$

Alla stessa maniera si dimostra che : $\cot g(\alpha - \beta) = \frac{\cot g\alpha \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - \cot g\alpha} \qquad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - \beta \end{matrix} \right\} \neq k\pi$

<< **Calcolare i valori naturali delle funzioni circolari degli angoli di 15° e 75°** >>

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75°$$

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75°$$

$$tg\,15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3} = \mathrm{cotg}\,75° \qquad \mathrm{cotg}\,45° = \frac{1}{tg\,15°} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = \mathrm{tg}\,75°$$

$$sec\,45° = \frac{1}{\cos 15°} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} = \mathrm{cosec}\,75°$$

$$\mathrm{co}sec\,45° = \frac{1}{\sin 15°} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sec 75°$$

Angolo formato da due rette

E' noto dalla geometria euclidea che due rette r ed r_1 non orientate formano quattro angoli a due a due uguali ed a due a due supplementari . Questo significa che , in generale , le due rette formano quattro angoli di cui due sono acuti ed uguali tra loro, gli altri due sono ottusi,uguali fra loro e supplementari dei precedenti . Se le due rette sono fra loro ortogonali allora i quattro angoli sono uguali fra loro e sono pertanto retti . Noto il valore ϑ di uno di essi possiamo facilmente calcolare i valori degli altri tre . Supponiamo che le rette considerate abbiano equazioni :

$$r: \ y = mx + n \quad \text{oppure} \quad ax + by + c = 0 \ , \ m = -\frac{a}{b}$$

$$r_1: \ y = m_1 x + n_1 \quad \text{oppure} \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ , \ m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$$

Poiché risulta : $tg\,\delta = m_1$, $tg\,\varphi = m$, $\delta = \varphi + \vartheta$ ($\vartheta = \delta - \varphi$)

possiamo scrivere : $tg\,\vartheta = tg(\delta - \varphi) = \dfrac{tg\,\delta - tg\,\varphi}{1 + tg\,\varphi\, tg\,\delta}$ $\quad tg\,\vartheta = \dfrac{m_1 - m}{1 + m m_1} = \dfrac{a b_1 - a_1 b}{a a_1 + b b_1}$ [1]

$\beta = \pi - \vartheta \Rightarrow tg\,\beta = tg(\pi - \vartheta) = -tg\,\vartheta \Rightarrow$ $\quad tg\,\beta = \dfrac{m - m_1}{1 + m m_1} = \dfrac{a_1 b - a b_1}{a a_1 + b b_1}$ [2]

Quindi se intendiamo riferirci all'angolo acuto ϑ dobbiamo scrivere :

$$tg\,\widehat{r r_1} = \left|\frac{m_1 - m}{1 + m m_1}\right| = \left|\frac{a b_1 - a_1 b}{a a_1 + b b_1}\right| \qquad tg\,\vartheta = \left|\frac{m_1 - m}{1 + m m_1}\right| = \left|\frac{a b_1 - a_1 b}{a a_1 + b b_1}\right|$$

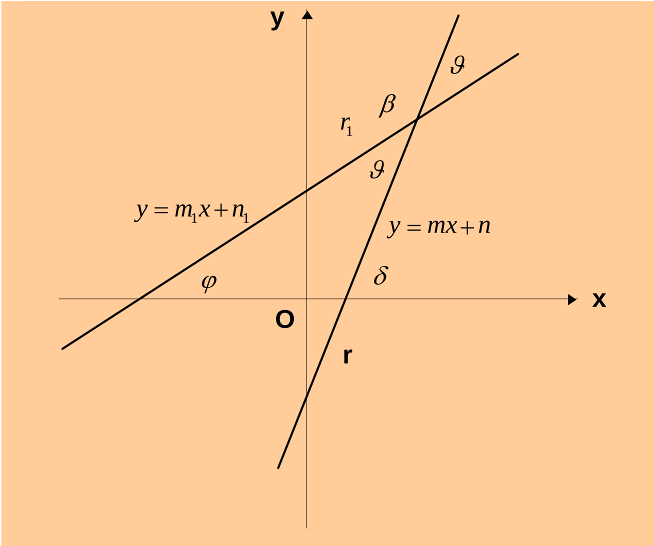
$r_1 \,//\, r \Rightarrow m_1 - m = 0 \Rightarrow m_1 = m$

che esprime la **condizione di parallelismo** già trovata per altra via .

$r_1 \perp r \Rightarrow \vartheta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow tg\,\vartheta = \infty \Rightarrow$

$$1 + m \cdot m_1 = 0$$

che esprime la **condizione di perpendicolarità** già trovata per altra via .



Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione si ricavano da quelle di addizione ponendo in esse $\alpha = \beta$.

Esse ci consentono,noti i valori delle funzioni circolari dell'angolo α , di calcolare quelle dell'angolo doppio 2α .

$$sin 2\alpha = sin\alpha \cos\alpha + sin\alpha \cos\alpha = 2 sin\alpha \cos\alpha \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq \begin{cases} (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \ , \ (2k+1)90° \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{\cot g^2\alpha - 1}{2\cot g\,\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq k\frac{\pi}{2}$$

<< **Calcolare i valori naturali delle funzioni circolari degli angoli di** 36° e 54° >>

$$\cos 36° = \cos 2\cdot 18° = \cos^2 18° - sin^2 18° = \frac{5+\sqrt{5}}{8} - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°$$

$$sin 36° = 2 sin 18° \cos 18° = 2\frac{\sqrt{5}-1}{4}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(10+2\sqrt{5})}}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{4} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54°$$

$$tg\, 36° = \frac{sin 36°}{\cos 36°} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \text{cotg } 54°$$

$$\text{cotg } 36° = \frac{1}{tg\, 36°} = \frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \text{tg } 54°$$

Formule parametriche

Le formule parametriche sono formule che ci consentono di esprimere razionalmente le funzioni circolari di un angolo mediante la tangente goniometrica dell'angolo metà .

Esse si deducono dalle formule di duplicazione .

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in Z$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in Z$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq \begin{cases} (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \ , \ (2k+1)90° \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cot g\,2\alpha = \frac{\cot g^2\alpha - 1}{2\cot g\,\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq k\frac{\pi}{2}$$

Formule di bisezione

Le formule di bisezione permettono di esprimere le funzioni circolari dell'angolo α mediante quelle dell'angolo doppio 2α . Si ricavano dalle formule di duplicazione .

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \ \Rightarrow \ \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \ \Rightarrow \ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$tg\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in Z \qquad \cot g\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}}$$

Dimostrare le due seguenti identità : $tg\,\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ $\qquad tg\,\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$$\text{tg }\alpha = \frac{sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{2sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{sin 2\alpha}{2\cdot\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$\text{tg }\alpha = \frac{sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{2sin\alpha}{2sin\alpha} = \frac{2sin^2\alpha}{sin 2\alpha} = \frac{2\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}{sin 2\alpha} = tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Calcolare i valori delle funzioni circolari degli angoli di 22°30’ e 67°30’ .

$$\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = sin\,67°30'$$

$$sin\,22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \cos 67°30'$$

$$tg\,22°30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}} = \sqrt{2}-1 = ctg\,67°30'$$

$$\cot g\,22°30' = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = tg\,67°30'$$

Formule di prostaferesi

Le formule di prostaferesi servono a trasformare somme algebriche in prodotti , servono cioè a rendere logaritmica una espressione polinomia .

Esse si ricavano dalle formule di addizione e sottrazione tenendo presemnte le seguenti relazioni :

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta &= p\\ \alpha-\beta &= q\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned}\alpha &= \frac{p+q}{2}\\ \beta &= \frac{p-q}{2}\end{aligned}\right.$$

$$sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta) = sin\alpha\cos\beta + sin\beta\cos\alpha + sin\alpha\cos\beta - sin\beta\cos\alpha = 2\,sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin(90° - q) = 2\sin\frac{p + (90° - q)}{2}\cos\frac{p - (90° - q)}{2}$$

$$\sin p + \cos q = 2\sin\left(45° + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2} - 45°\right)$$

$$\sin p - \cos q = \sin p - \sin(90° - q) = 2\cos\frac{p + (90° - q)}{2}\sin\frac{p - (90° - q)}{2}$$

$$\sin p - \cos q = 2\cos\left(45° + \frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2} - 45°\right)$$

$$tg\, p \pm tg\, q = \frac{\sin p\cos q \pm \sin q\cos p}{\cos p\cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p\cos q} \qquad \cot g\, p \pm tg\, q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p\sin q}$$

<< **Risolvere la seguente equazione goniometrica** $\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$ >>

Applicando le formule di **prostaferesi** otteniamo :

$$2\cos\frac{8x}{2}\sin\frac{2x}{2} = 2\cos\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2} \quad \text{cioè} \quad : \quad \cos 4x\sin x = \cos 4x\cos 2x \ ;$$

$$\cos 4x(\sin x - \cos 2x) = 0 \ , \ \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \ , \ x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \ , \ 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k 30° + k\cdot 180° \ , \ \sin x = -1 \Rightarrow x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$$

Formule di triplicazione

Si ricavano applicando le formule di addizione.

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha =$

$\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha =$

$= \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha =$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

In maniera del tutto analoga si dimostrano le seguenti identità :

$$tg\,3\alpha = \frac{3tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \qquad \cot g\,3\alpha = \frac{\cot g^3\alpha - 3\cot g\,\alpha}{3\cot g^2\alpha - 1}$$

Verificare la seguente identità : $\boxed{\dfrac{tg\,3y}{tg\,y} = \dfrac{2\cos 2y + 1}{2\cos 2y - 1}}$

$$\frac{tg\,3y}{tg\,y} = \frac{tg\,y\left(3 - tg^2 y\right)}{tg\,y\left(1 - 3tg^2 y\right)} = \frac{3 - \dfrac{1 - \cos 2y}{1 + \cos 2y}}{1 - \dfrac{3(1 - \cos 2y)}{1 + \cos 2y}} = \frac{3 + 3\cos 2y - 1 + \cos 2y}{1 + \cos 2y - 3 + 3\cos^2 y} = \frac{2\cos 2y + 1}{2\cos 2y - 1}$$

Eliminare l'angolo ϑ dal seguente sistema :

$$\begin{cases} x = 3\cos\vartheta + \cos 3\vartheta \\ y = 3\sin\vartheta + \sin 3\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\cos\vartheta + 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta \\ x = 3\sin\vartheta + 4\sin^3\vartheta - 3\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4\cos^3\vartheta \\ y = 4\sin^3\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \left(\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \sin\vartheta = \left(\dfrac{y}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos^2\vartheta = \left(\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \sin^2\vartheta = \left(\dfrac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases} \qquad \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1 = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{cioè :}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{x^2}{16}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{16}} = 1}$$

Risolvere il seguente sistema goniometrico $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \end{cases}$ Dividendo membro a membro otteniamo :

$tg\dfrac{x+y}{2} = 1$ cioè : $\dfrac{x+y}{2} = 45° + k180°$ $x + y = 90° + k360°$ $\boxed{y = 90° + k360° - x}$

Sostituendo nella seconda equazione del sistema otteniamo : $\cos x + \cos(90° - k360° - x) = 1$

$\cos x + \sin x = 1$ Si tratta di una equazione lineare in seno e coseno le cui soluzioni sono :

$x = k360°$ $x = 90° + k360°$

Formule di Werner

Le formule di Werner servono a trasformare prodotti in somme algebriche .

Esse si deducono facilmente utilizzando le formule di addizione e sottrazione in tutte le loro possibili combinazioni .

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2} \qquad \cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Risolvere la seguente equazione goniometrica $4 \cdot \sin x \cdot \sin 3x = 1$

$2(\cos 2x - \cos 4x) = 1$ Ma : $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ Quindi : $4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 1 = 0$

$\cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ $2x = \pm 36° + k360°$ $x = \pm 18° + k180°$

$\cos 2x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ $2x = \pm 108° + k360°$ $x = \pm 54° + k180°$

Le **formule di Werner** possono essere dimostrate vettorialmente .

Formule di moltiplicazione

Le formule di moltiplicazione si ottengono ponendo nelle formule di addizione $\beta = (n - 1)\alpha$.

$$sin(\alpha + \beta) = sin\, n\alpha = sin\,\alpha \cos(n-1)\alpha + \cos\alpha\, sin(n-1)\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos n\alpha = \cos\alpha \cos(n-1)\alpha + sin\,\alpha\, sin(n-1)\alpha$$

$$tg(\alpha + \beta) = tg\, n\alpha = \frac{tg\,\alpha + tg(n-1)\alpha}{1 - tg\,\alpha\, tg(n-1)\alpha}$$

$$\cot g(\alpha + \beta) = \cot g\, n\alpha = \frac{\cot g\,\alpha \cot g(n-1)\alpha - 1}{\cot g\,\alpha + \cot g(n-1)\alpha}$$

Formule di Simpson

Possono essere utili le seguenti due formule di Simpson :

$$sin\, n\beta = 2\cos\beta\, sin(n-1)\beta - sin(n-2)\beta$$

$$\cos n\beta = 2\cos\beta \cos(n-1)\beta - \cos(n-2)\beta$$

Si ricavano dalle identità

$$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta) = 2 sin\,\alpha \cos\beta \qquad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 sin\,\alpha\, sin\beta$$

ponendo $\alpha = (n - 1)\beta$.

Infatti , in tal caso , abbiamo : $\alpha + \beta = n\beta - \beta + \beta = n\beta$,

$\alpha - \beta = n\beta - \beta - \beta = (n - 2)\beta$.

<< **Applicando le formule di Simpson calcolare il seno ed il coseno degli angoli** 3β e 4β >>

$\sin 3\beta = 2\cos\beta \sin 2\beta - \sin\beta = 4\sin\beta \cos^2\beta - \sin\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$.

$\sin 4\beta = 2\cos\beta \sin 3\beta - \sin 2\beta = 2\cos\beta\,(3\sin\beta - 4\sin^3\beta) - 2\sin\beta\cos\beta =$

$= \cos\beta\,(6\sin\beta - 8\sin^3\beta - 2\sin\beta) = \cos\beta\,(4\sin\beta - 8\sin^3\beta)$

$\cos 3\beta = 2\cos\beta \cos 2\beta - \cos\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$

$\cos 4\beta = 2\cos\beta \cos 3\beta - \cos 2\beta = 8\cos^4\beta - 8\cos^2\beta + 1$