Unità Didattica N° 12

I logaritmi e le equazioni esponenziali

1) Potenza con esponente intero di un numero reale.
2) Potenza con esponente razionale.
3) Potenza con esponente reale di un numero reale positivo.
4) Funzione esponenziale e curva esponenziale.
5) Equazione esponenziale normale
6) Risoluzione di alcune equazioni esponenziali.
7) Definizione di logaritmo.
8) Funzione logaritmo..e curva logaritmica.
9) Teoremi fondamentali sui logaritmi
10) Equazioni esponenziali ed equazioni logaritmiche
11) Inequazioni logaritmiche.
12) Inequazioni esponenziali.

Potenza con esponente intero di un numero reale

Se **a** è un numero reale ed **n** un numero intero positivo , sappiamo che il simbolo a^n rappresenta il prodotto di n fattori tutti uguali ad a , cioè :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \cdots\cdots a}$$

Le potenze ad esponente negativo vengono definite mediante la seguente identità : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Per le potenze ad esponente intero (positivo o negativo) valgono le cinque seguenti proprietà :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n : a^m = a^{n-m} \qquad (ab)^n = a^n \cdot a^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Inoltre si pone per convenzione : $a^0 = 1$

Potenze con esponente razionale

Abbiamo definito la potenza di un numero reale **a** avente come esponente un numero intero relativo Vogliamo ampliare il concetto di potenza analizzando il caso in cui la base della potenza è un numero reale positivo (o nullo) e l'esponente è un numero razionale (cioè un numero frazionario) Se **a** è un numero reale non negativo ed m ed n sono due numeri interi positivi , le **potenze ad esponente razionale** vengono definite dalle due seguenti identità :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad\qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

dove il radicale è considerato in senso aritmetico . Non si definiscono le potenze con esponente razionale dei numeri negativi . << **Ogni potenza avente base positiva ed esponente razionale è equivalente ad un radicale** , e viceversa , **ogni radicale è equivalente ad una potenza avente base positiva ed esponente razionale** >>.

Le potenze ad esponente razionale conservano tutte le proprietà formali delle potenze ad esponente intero , cioè se $a, b \in R^+$, $m, n, p, q \in N$ abbiamo :

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \qquad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} \qquad (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Potenza con esponente reale di un numero reale positivo

Il simbolo a^r rappresenta la potenza erresima del numero **a** solo se **a** è un numero reale positivo ed **r** un numero reale qualsiasi . Per le potenze con esponente reale valgono tutte le proprietà formali valide per le potenze ad esponente razionale .

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad$ $a^r : a^s = a^{r-s}$ $\qquad$ $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$ $\qquad$ $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

Nel campo dei numeri reali non ha senso definire la potenza di un numero reale negativo avente esponente reale . Quindi quando parliamo di **potenza con esponente reale** è sottinteso che la base di tale potenza sia un numero reale positivo .

Funzione esponenziale e curva esponenziale

La potenza a^x ha significato solo se $a > 0$. Sotto questa ipotesi resta definita la seguente funzione esponenziale f : $\quad f : R \to R^+ : x \in R \to f(x) = a^x \in R^+ \quad$ con $a > 0$.

Dopo avere riferito il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani , consideriamo la funzione esponenziale a^x $(a \in R^+)$. Quando la variabile indipendente x varia assumendo tutti valori del dominio di a^x il punto $P(x, a^x)$ descrive una curva piana γ [grafico della funzione a^x indicato col simbolo $G(a^x)$] detta **curva esponenziale** . Diciamo pure che la curva esponenziale γ ha **equazione cartesiana** $y = a^x$.

Elenchiamo le principali proprietà della **funzione esponenziale** .

$a > 1$

1) a^x è **strettamente crescente** $\forall\, x \in R^+$ $\quad$ 2) $\quad dom\, a^x = R \qquad cod\, om\, a^x = R^+$

3) $a^x > 0 \ \forall\, x \in R$ $\qquad$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ <u>asintoto orizzontale sinistro</u>

6) $a^{x_2} > a^{x_1} \iff x_2 > x_1$, $\qquad a^{x_2} < a^{x_1} \iff x_2 < x_1$

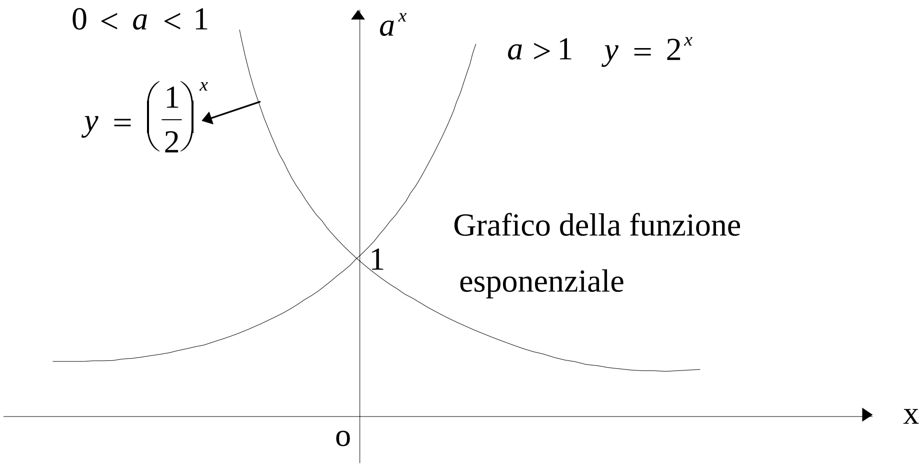
$0 < a < 1$

1) a^x è **strettamente decrescente** $\forall\, x \in R^+$ $\quad$ 2) $\quad dom\, a^x = R \qquad cod\, om\, a^x = R^+$

3) $a^x > 0 \ \forall \ x \in R$ 4) $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

5) $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$ <u>**asintoto orizzontale destro**</u>

6) $a^{x_2} > a^{x_1} \ \Leftrightarrow \ x_2 < x_1$, $a^{x_2} < a^{x_1} \ \Leftrightarrow \ x_2 > x_1$



OSSERVAZIONE

Bisogna distinguere tra **funzione esponenziale** a^x (f) , **immagine della funzione esponenziale** [$f(x)$] , ***grafico della funzione esponenziale*** [$G(a^x)$] e **curva esponenziale** γ associata alla funzione esponenziale . Spesso tali concetti non vengono usati con la dovuta precisione . Si dice , ad esempio , funzione $y = a^x$ al posto di curva piana di equazione $y = a^x$. Tuttavia tale uso improprio è generalmente tollerato in quanto i concetti di funzione , grafico di una funzione , curva piana sono fra loro collegati nel senso che data la funzione f ad essa possiamo associare l'immagine $f(x)$ a cui corrisponde il grafico $G(f)$ che , a sua volta , può essere considerato come una curva piana γ di equazione $y = f(x)$. Questo significa che dalla funzione f possiamo passare alla sua immagine $f(x)$ ed anche al grafico $G(f)$ della funzione f . Infatti , data la funzione f risultano univocamente individuati la sua immagine $f(x)$ ed il suo grafico $G(f)$ che , a sua volta, può essere considerato come una curva piana avente equazione cartesiana $y = f(x)$. Quindi il **grafico** della funzione f è una curva piana avente equazione cartesiana $y = f(x)$. Fatte queste premesse risulta giustificata la seguente terminologia imperfetta : << Consideriamo la funzione esponenziale $y = a^x$ >>

Equazione esponenziale normale

Chiamiamo **equazione esponenziale** ogni equazione in cui l'incognita figura come esponente di uno o più termini . Dicesi **equazione esponenziale normale** (o tipica o canonica) ogni equazione che può essere ricondotta alla seguente forma : $a^x = b$ **[1]**

L'equazione [1] è :

1) **indeterminata** se $a = b = 1$ in quanto ogni valore di $x \in R$ è una sua soluzione

2) **impossibile** se $a = 1$ e $b \neq 1$ in quanto si avrebbe per ogni $x \in R$ $1 = b \neq 1$

3) **determinata** ed ammette come unica soluzione il **numero zero** se $a \neq 1$ e $b = 1$, in quanto l'equazione $a^x = b$ assume la forma : $a^0 = 1$ $1 = 1$

Teorema

Se **a** e **b** sono numeri reali positivi diversi da uno , l'equazione esponenziale $a^x = b$ ammette una ed una sola soluzione x_1 , precisamente una **radice positiva** (<u>negativa</u>) se $a > 1$ e $b > 1$ oppure $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$ [$a > 1$ e $0 < b < 1$ oppure $0 < a < 1$ e $b > 1$] .

$$2^x = 8 \ , \ 2^x = 8 \ , \ x = 3 \ , \ \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27} \ , \ \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \ , \ x = 3$$

Risoluzione di alcune equazioni esponenziali

L ' equazione esponenziale $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ è equivalente all'equazione algebrica : $f(x) = g(x)$

Risulta pure : $a^{f(x)} = 1 \Rightarrow a^{f(x)} = a^0 \Rightarrow f(x) = 0$

$$\sqrt{125^{x+1}} \cdot \sqrt{25^{-x+2}} = 625 \qquad 5^{\frac{3(x+1)}{2}} \cdot 5^{\frac{2(-x+2)}{3}} = 5^4 \qquad 5^{\frac{3(x+1)}{2} + \frac{2(-x+2)}{3}} = 5^4$$

$$\frac{3(x+1)}{2} + \frac{2(-x+2)}{3} = 4 \qquad 9x + 9 - 4x + 8 = 24 \ , \ 5x = 7 \ , \ x = \frac{7}{5}$$

$$a^x \cdot \sqrt{a^{x+3}} = a^4 \qquad a^x \cdot a^{\frac{x+3}{2}} = a^4 \qquad a^{x + \frac{x+3}{2}} = a^4 \qquad x + \frac{x+3}{2} = 4 \ , \ 2x + x + 3 = 8$$

$$3x = 5 \qquad x = \frac{5}{3}$$

Le equazioni esponenziali $k \cdot a^{2 \cdot f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$ $\qquad$ $k \cdot a^{f(x)} + \dfrac{n}{a^{f(x)}} + p = 0$

si risolvono ponendo : $y = a^{f(x)}$. Otteniamo rispettivamente le due seguenti equazioni algebriche :

$m y^2 + n y + p = 0$ $\qquad$ $my + \dfrac{n}{y} + p = 0$ $\qquad$ cioè : $\qquad$ $m y^2 + p y + n = 0$

Se y_1 ed y_2 sono le radici reali delle equazioni algebriche trovate , abbiamo :

$$a^{f(x)} = y_1 \quad , \quad a^{f(x)} = y_2$$

Se poi risulta : $y_1 = a^t$, $y_2 = a^s$ abbiamo : $f(x) = t$ $\quad$ $f(x) = s$

$2^{1+\sqrt{x}} + 2^{1-\sqrt{x}} = \dfrac{17}{2}$ $\quad$ $2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{2^{\sqrt{x}}} = \dfrac{17}{2}$ pongo : $2^{\sqrt{x}} = y$ Ottengo : $2y + \dfrac{2}{y} = \dfrac{17}{2}$

$4y^2 - 17y + 4 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = \dfrac{1}{4}$, $2^{\sqrt{x}} = 4$, $2^{\sqrt{x}} = 2^2$, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$

$2^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$, $\sqrt{x} = -2$ Questa equazione non ammette radici reali

Definizione di logaritmo

Se $a, b \in R^+$, definiamo **logaritmo** del numero **b** nella base **a** e lo indichiamo col simbolo $\log_a b$ la radice dell'equazione $a^x = b$, cioè **logaritmo del numero b nella base a è l'esponente x che bisogna dare ad a per avere b** . In simboli abbiamo :

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Sussistono pertanto le due seguenti identità : $\quad$ $a^{\log_a b} = b$ $\quad$ $\log_a a^x = x$

A volte il numero **b** è detto **argomento** del logaritmo .

ESEMPI

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \ , \ \log_{10} 0{,}01 = \log_{10} 10^{-2} = -2 \ , \ \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$$

$\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a b + \log_a \dfrac{1}{b} = 0$

L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri reali assoluti rispetto ad una data base **a** costituisce un **sistema di logaritmi nella base a** . Quando scegliamo come base il numero 10 abbiamo il cosiddetto **sistema di logaritmi decimali** o ***volgari*** o di **Briggs** : simbolo usato :

$$\log b$$

Abbiamo il **sistema di logaritmi naturali** o ***neperiani*** o **iperbolici** quando assumiamo come base il numero : $e = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ Simbolo usato : $\ln b$

Il numero **e** , le cui proprietà verranno studiate in analisi matematica , è un **numero irrazionale trascendente** compreso tra due e tre . Un suo valore approssimato è :

e = 2,71828182....

Logaritmo significa **numero della ragione** .

Vediamo adesso come è possibile passare da un sistema di logaritmi in base **a** ad un altro in base a .

$$\log_\alpha b = \frac{\log_a b}{\log_a \alpha}$$

Si può dimostrare che : $\log_\alpha a \cdot \log_a \alpha = 1$ cioè : $\log_\alpha a = \frac{1}{\log_a \alpha}$

Funzione logaritmo e curva logaritmica

Noi sappiamo che $\log_a x$ ha significato se $a > 0$, $a \neq 1$ ed $x > 0$. sotto queste ipotesi resta definita la seguente **funzione logaritmo** :

$f : R^+ \to R : x \in R^+ \to f(x) = \log_a x \in R$ con $a > 0$, $a \neq 1$ ed $x > 0$

Diciamo pure che :

$\log_a$ rappresenta la **funzione logaritmo**

$\log_a x$ rappresenta l ' **immagine** della funzione logaritmo relativa al punto $x \in R^+$

$y = \log_a x$ rappresenta l ' **equazione cartesiana** del grafico della funzione logaritmo di x in base a . Per questo motivo sono tollerate le affermazioni :

<< ***considero la funzione*** $\log_a x$ >> , << **considero la funzione** $y = \log_a x$ >> .

$G(\log_a x)$ = luogo geometrico dei punti $P(x, \log_a x)$ del piano cartesiano quando la x descrive il dominio della funzione logaritmo di x in base a = **grafico** della funzione logaritmo

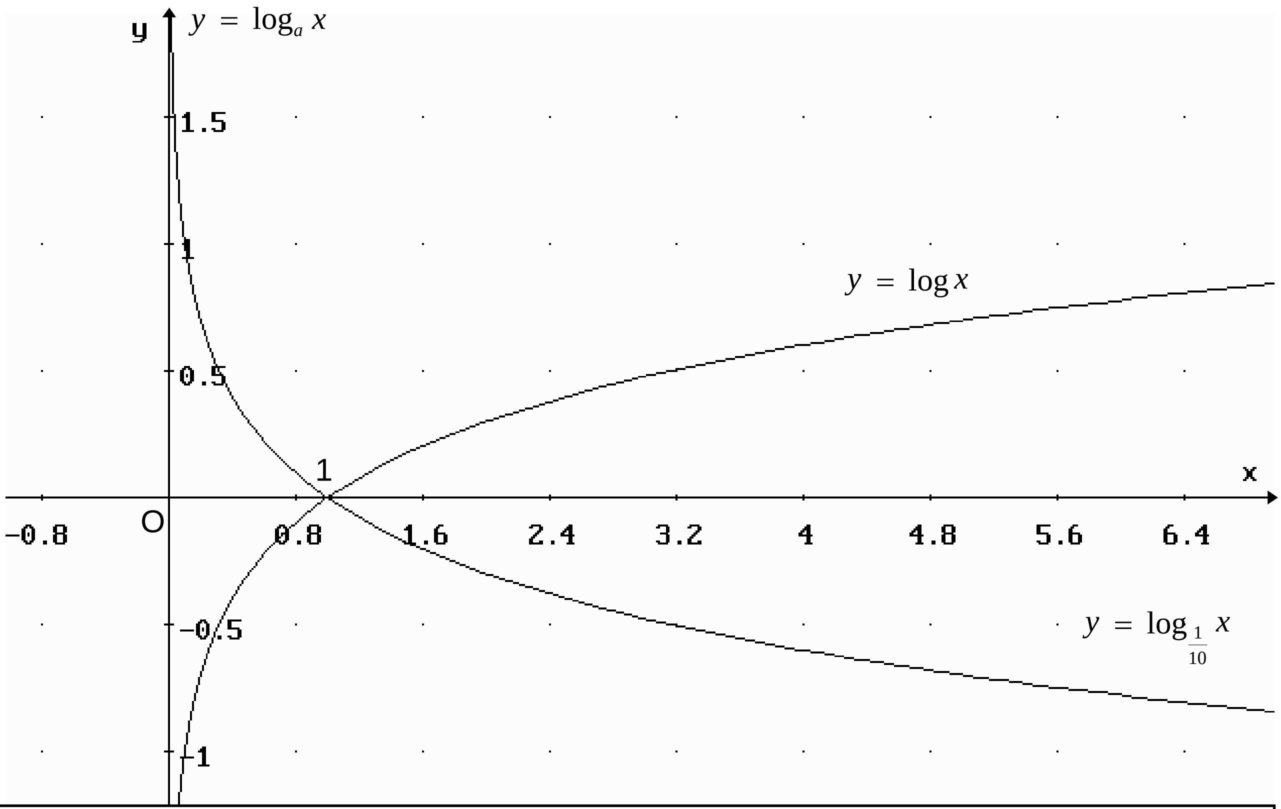


Grafico della funzione logaritmo $y = \log x$ $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

Consideriamo la funzione logaritmo $\log_a x$ dopo avere riferito il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani . Quando la variabile indipendente x varia assumendo tutti i valori del dominio di $\log_a x$, il punto $P(x, \log_a x)$ descrive una curva piana γ (grafico di $\log_a x$ indicato col simbolo $G(\log_a x)$) detta **curva logaritmica** . Si dice anche che la curva logaritmica ha equazione $y = \log_a x$. La curva logaritmica di equazione $y = \log_a x$ e la curva esponenziale di equazione $y = a^x$ sono una **simmetrica dell'altra rispetto alla bisettrice fondamentale degli assi cartesiani** , cioè rispetto alla retta di equazione $y = x$.

Elenchiamo le principali proprietà della funzione logaritmo $\log_a x$:

$a > 1$

1) $\log_a x$ è **strettamente crescente** $\forall x \in R^+$ 2) $d\,\mathrm{om} \log_a x =]0, +\infty[$

2) $cod\,\mathrm{om} \log_a x = R$ 4) $\log_a x > 0 \ \forall \ x \in]1, +\infty[$ 5) $\log_a x < 0 \ \forall \ x \in]0,1[$

6) $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 7) $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty \Rightarrow x = 0$ **asintoto verticale** destro in basso

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ 9) $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1$ $\log_a x_2 < \log_a x_1 \Rightarrow x_2 < x_1$

$0 < a < 1$

1) $\log_a x$ è **strettamente decrescente** $\forall x \in R^+$ 2) $\operatorname{dom}\log_a x =]0,+\infty[$

2) $\operatorname{codom}\log_a x = R$ 4) $\log_a x > 0 \ \forall x \in]0,1[$ 5) $\log_a x < 0 \ \forall x \in]1,+\infty[$

6) $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 7) $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = +\infty \Rightarrow x = 0$ **asintoto verticale** destro in alto

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ 9) $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 < x_1$ $\log_a x_2 < \log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1$

Teoremi fondamentali sui logaritmi

Il logaritmo di un prodotto di fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori

$$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$$

Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e quello del divisore .

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo della base della potenza

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Il logaritmo di un radicale è uguale al quoziente tra il logaritmo del radicando e l'indice del radicale .

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a b \qquad \log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a b$$

ESEMPI

$$\log \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log(a + x) + \log(a - x) - \frac{1}{2}\log(a^2 + x^2)$$

Altre proprietà dei logaritmi

I logaritmi nella stessa base di numeri reciproci sono numeri reali opposti

$$\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$$

Logaritmi in basi reciproche di numeri reciproci sono uguali

$$\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \log_a x \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \qquad \log_a b = \log_{a^n} b^n \qquad \log_a b = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b}$$

Equazioni logaritmiche

Un ' **equazione** dicesi **logaritmica** quando l'incognita o una sua funzione figura almeno una volta come argomento di un logaritmo .

L ' equazione logaritmica $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ **[A]** con $a > 0$ ed $a \neq 1$ **è** **equivalente** al seguente sistema misto : $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ **[B]**

L ' equazione $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ **equivale** al sistema misto : $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \ , \ a(x) \neq 1 \end{cases}$

L ' equazione : $k \cdot \log_a^2 f(x) + h \cdot \log_a f(x) + n = 0$ si risolve ponendo $\log_a f(x) = y$

Otteniamo il seguente sistema misto : $\begin{cases} f(x) > 0 \\ k y^2 + h y + n = 0 \Rightarrow y_1 , y_2 \end{cases}$ $f(x) = a^{y_1}$, $f(x) = a^{y_2}$

L ' equazione : $k \cdot \log_a f(x) + \dfrac{h}{\log_a f(x)} + n = 0$ si risolve ponendo : $\log_a f(x) = y$

Otteniamo il seguente sistema misto :

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ k y + \dfrac{h}{y} + n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) > 0 \\ k y^2 + n y + h = 0 \Rightarrow y_1 , y_2 \end{cases}$, $f(x) = a^{y_1}$, $f(x) = a^{y_2}$

$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$ $\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \\ x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 & x_1 = -3\ (R.A.) \ , \ x_2 = 4\ (R.N.A.) \\ x^2 - 3x - 5 > 0 & per \ \ x < \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2} \approx -1{,}2 \ , \ x > \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2} \approx 4{,}2 \\ 7 - 2x > 0 & per \ \ x < \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Inequazioni logaritmiche

Sono **inequazioni** in cui l ' incognita figura almeno una volta come argomento di un logaritmo .Esempio di inequazione logaritmica : $\log_2(x^2 - 5x) - 8\log_7(x + 1) > 5\log x$

Per risolvere le inequazioni logaritmiche bisogna tenere presente :

1) le proprietà fondamentali delle inequazioni algebriche

2) le proprietà dei logaritmi ed anche che : $\log_a x = y \iff x = a^y$

3) che la funzione logaritmo $\log_a x$ è **strettamente crescente** se $a > 1$, **strettamente decrescente** se $0 < a < 1$

4) che l'argomento di ogni logaritmo presente nell'inequazione sia positivo (**condizione di realtà**)

$2\log_5(x - 3) - \log_5(3x - 1) < \frac{1}{2}\log_5(1 + x)^2$ per $x > 3$

Per la realtà dei logaritmi deve essere :

$$\begin{cases} x - 3 > 0 & per\ x > 3 \\ 3x - 1 > 0 & per\ x > \frac{1}{3} \\ (1 + x)^2 > 0 & per\ x \neq -1 \end{cases}$$ il sistema è verificato per $x > 3$

Infine , ricordando che per $x > 3$ l'espressione $1 + x$ risulta positiva , per le note proprietà dei logaritmi , l'inequazione data può essere scritta come segue :

$$\log_5(x - 3)^2 - \log_5(3x - 1) < \log_5\sqrt{(1 + x)^2} \quad , \quad \log_5\frac{(x - 3)^2}{3x - 1} < \log_5(1 + x)$$

$$\frac{(x - 3)^2}{3x - 1} < 1 + x \ ; \quad x > 3 \ \Rightarrow \ (x - 3)^2 < (3x - 1)(1 + x) \ ; \ -2x^2 - 8x + 10 < 0$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \ \ per\ x < -5\ ed\ x > 1 \end{cases}$$

Il sistema (e quindi anche l'inequazione data) è verificato per $x > 3$

Inequazioni esponenziali

Una inequazione si dice **esponenziale** quando l'incognita figura come esponente di uno o più termini $2^{x^2+1} - 5^{x^3+2} > 8 \cdot 7^{x-1}$ è un esempio di inequazione esponenziale . La risoluzione delle inequazioni esponenziali presenta , in generale , notevoli difficoltà .

Per la risoluzione delle **inequazioni esponenziali** sono particolarmente utili le seguenti considerazioni :

1) bisogna tenere presente le proprietà delle inequazioni algebriche

2) la funzione esponenziale a^x , **sempre positiva** , è **strettamente crescente** se $a > 1$, **strettamente decrescente** se $0 < a < 1$.

$(a > 1 , a^{x_2} > a^{x_1}) \Leftrightarrow x_2 > x_1)$ e quindi l'inequazione esponenziale $a > 1 , a^{f(x)} > a^{g(x)}$ si tramuta nell ' **inequazione algebrica** $f(x) > g(x)$.

$(a > 1 , a^{x_2} < a^{x_1}) \Leftrightarrow x_2 < x_1)$ e quindi l'inequazione esponenziale $a > 1 , a^{f(x)} < a^{g(x)}$ si tramuta nell ' **inequazione algebrica** $f(x) < g(x)$.

$(0 < a < 1 , a^{x_2} > a^{x_1}) \Leftrightarrow x_2 < x_1)$ e quindi l'inequazione esponenziale $0 < a < 1 , a^{f(x)} > a^{g(x)}$ si tramuta nell ' **inequazione algebrica** $f(x) < g(x)$.

$(0 < a < 1 , a^{x_2} < a^{x_1}) \Leftrightarrow x_2 > x_1)$ e quindi l'inequazione esponenziale $0 < a < 1 , a^{f(x)} < a^{g(x)}$ si tramuta nell ' **inequazione algebrica** $f(x) > g(x)$.

$3^{4x-1} - 81 > 0$ per $x > \frac{5}{4}$ $\qquad 3^{4x-1} > 3^4$, $4x - 1 > 4$, $x > \frac{5}{4}$

$3^{2x} - 108 \cdot 3^x + 2187 < 0$ per $3 < x < 4$ $\qquad$ Pongo : $3^x = y$ $(3^{2x} = y^2)$

$y^2 - 108y + 2187 < 0$ per $27 < y < 81$, $27 < 3^x < 81$, $3^3 < 3^x < 3^4$, $3 < x < 4$

$\sqrt[x]{2^9} - 2^x < 0$ per $-3 < x < 0$, $x > 0$, $2^{\frac{9}{x}} < 2^x$, $\dfrac{9}{x} < x$, $\dfrac{9 - x^2}{x} < 0$

x		-3		0		3	
$9 - x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{9 - x^2}{x}$	$+$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$

$25^x - 5^x > 0$ per $x > 0$ $5^{2x} - 5^x > 0$, $5^x\left(5^x - 1\right) > 0$ $5^x > 0$ $\forall x \in R$ e quindi

$5^x - 1 > 0$, $5^x > 1$, $5^x > 5^0$ $x > 0$

$2^{x+1} + \dfrac{8}{2^x} > 17$ per $x < -1$, $x > 3$ Pongo : $y = 2^x > 0$ $\forall x \in R$ Ottengo :

$2y^2 - 17y + 8 > 0$ per $y < \dfrac{1}{2}$, $y > 8$, $2^x < 2^{-1}$ e $2^x > 2^3$ e quindi : $x < -1$, $x > 3$

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali :

01) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 = 5\left(\frac{3}{2}\right)^x$ [0]

02) $3^x - 6 = 3^{3-x}$ [2]

03) $15\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 34\left(\frac{3}{5}\right)^x + 15 = 0$ [1 ; - 1]

04) $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$ [1]

05) $3^{2x} - 82\cdot 3^x + 81 = 0$ [0 , 4]

06) $5^{2x} + 125 = 6\cdot 5^{x+1}$ [1 , 2]

07) $5^x + 1 = 6\cdot 5^{-x}$ [$\log_5 2$]

08) $2\left(\frac{7}{2}\right)^x + 7\left(\frac{2}{7}\right)^x = 9$ [0,1]

09) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 62$ [5]

10) $36^x - 10\cdot 2^x\cdot 3^{x+1} = 216$ [2]

11) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x - 30 = 0$ [1]

12) $2^{x+1} + 2^x = 24$ [3]

13) $6^{x-2} + 6^x = 222$ [3]

14) $3^{x+2} = 3^{x-1} + 26$ [1]

15) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 48 + 3\cdot 2^x$ [5]

16) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 2\cdot 5^x$ [1]

17) $3\cdot 2^{x-2} - 2^x + 7^{x-2} = 0$ [2]

18) $\left(3^{2x} - 3\right)^2 - 3^{2x}\left(2 - 3^{2x}\right) = 3$ [0 , ½]

19) $\dfrac{2^{2x} - 2^{x+2}}{2^x - 4} = 8$ [3 , (2)]

20) $\dfrac{2^{x+3} - 60}{2^x - 4} = 1$ [3]

21) $5^{2x}\left(5^{2x} - 27\right) + \left(5^x + 5\right)^2 = 10\cdot 5^x$ [0,1]

22) $27\left(3^{x-3} - 3\right) = 81\cdot 3^{-x} - 1$ [4]

23) $\dfrac{2^{\sqrt{x+1}}\cdot 2^{\sqrt{2x-5}}}{8} = 1$ [3]

24) $\dfrac{3^{\sqrt{x^2+16}}}{3^{\sqrt{6x+7}}} = \dfrac{27}{3^x}$ [$-\frac{7}{6}$, 3]

25) $\dfrac{4^{1+\sqrt{x}} + 4^{1-\sqrt{x}} - 10}{2^x - 8} = 0$ [$\frac{1}{4}$]

26) $\dfrac{2}{9^x - 1} = \dfrac{2}{3^x - 1} - \dfrac{3}{4}$ [1 +

27) $\dfrac{2^{2x}}{5\cdot 2^x - 2\cdot 3^x} = \dfrac{3^{2x}}{3^{x+1}}$ [0 , 1]

28) $\dfrac{3^{x+1}}{3^{2x}} = \dfrac{2\cdot 5^x + 5\cdot 3^x}{5^{2x}}$ [1]

29) $3^{x-1} = \dfrac{2^{2x}}{3^{x+1}}$ [0]

30) $3^{x-\frac{1}{4}} = \dfrac{9}{3^{x-\frac{7}{4}}}$ [2]

31) $\dfrac{4}{4^x + 2^x - 2} + \dfrac{2^x + 3}{2^x + 2} = \dfrac{2^x + 2}{2^{x+1} - 2}$ [$\frac{1}{2}$]

32) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \dfrac{3\cdot 2^{x+1} - 2\cdot 3^x}{3^{x+1}}$ [1]

33) $2^{4x} - 2^{3x} - 2^{x+2} + 4 = 0$ [0 , $\frac{2}{3}$]

34) $3^{3x} - 3^{2x} - 3^{x+1} + 3 = 0$ [0, $\frac{1}{2}$]

35) $10^{2x} - 4\cdot 5^{2x} - 2^{2x} + 4 = 0 \quad (0, 1)$

36) $3\cdot 2^{2x} = 2(4^x + 1)(1 - 4^x) \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$

37) $(3^x - 2)^2 + 3^x\cdot(3^x - 1) = 7 \quad (1)$

38) $(2^x + 1)\cdot(2^{x+2} + 3) = 5 \quad (-2)$

39) $2\left[3^x(3^x - 4) - 3^x + 2\right] = (1 - 3^x)(1 + 3^x) \quad (1; -1)$

40) $3^{x+2} + 3^{1-x} = 28 \quad (1; -2)$

41) $3^{\sqrt{x}} + 3^{4-\sqrt{x}} = 18 \quad (4)$

42) $2^{x+2} + 3 = 2^{-x} \quad (-2)$

43) $2^{2x+\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}-2x} = 9 \quad \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

44) $2^{1-x} - 2^{1+x} = 3 \quad (-1)$

45) $2^{4-x} + 2^{x+1} = 33 \quad (4; -1)$

46) $\dfrac{3^x}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2^x}{3\sqrt{3}} \quad \left(-\frac{3}{2}\right)$

47) $2^{2x} - 3\cdot 2^x - 4 = 0 \quad (2)$

48) $4^x - 5\cdot 2^{x+1} + 16 = 0 \quad (1; 3)$

49) $3\cdot 2^{4x} - 5\cdot 4^x = 2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)$

50) $3^x - 3^{x-2} = 2^{2x} - 2^{2x-1} \quad (2)$

51) $2^x + 3^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} + 3^{x-4} - 2^{x-4} \quad (4)$

52) $3^x + 3^{x+3} = 252 \quad (2)$

53) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 31 \quad (0)$

54) $2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 10 \quad (4)$

55) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 39 \quad (1)$

56) $\sqrt[4]{2^{x^2+5}} = 2\sqrt{2\cdot 2^x} \quad (1 \pm \sqrt{2})$

57) $\sqrt[x-1]{2^{x-2}}\cdot\sqrt[x-2]{2^{x-1}} = \sqrt[x-2]{\sqrt[x-1]{2^{2x-1}}} \quad (3)$

58) $\dfrac{\sqrt[3]{2^{x+2}}}{\left(\sqrt{2^x}\right)^{1-x}} = 2^{x^2} \quad \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$

59) $\sqrt[4]{3^{x^2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3^x}{9}} = \sqrt[4]{27^{x^2-4}}\cdot\sqrt[6]{3^{x+4}} \quad \left(2; -\frac{5}{3}\right)$

60) $\left(\sqrt{3^{x-3}}\right)^x = \dfrac{3}{3^x} \quad (-1; 2)$

61) $6^x - 9\cdot 2^x = 2\cdot 3^x - 18 \quad (1; 2)$

62) $3^{x-\frac{7}{4}} = \dfrac{4\cdot 3^{x-1} - 3}{3^{x-\frac{1}{4}}}$

63) $\left(2^x\cdot\sqrt{2} - 4\right)\left(2^{x+1} - 1\right)\left(2^x + 2\right) = 0 \quad \left(-1; \frac{3}{2}\right)$

64) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x - \left(\dfrac{2}{7}\right)^{x+1} = 5 \quad \left(\log_{\frac{2}{7}} 7\right)$

65) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt{2}}\right)^x = \sqrt[4]{\dfrac{2^{x^2-2x}}{4}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2^{x+2}}{\sqrt{2}}} \quad \left(3, -\frac{3}{5}\right)$

66) $\dfrac{1}{5^x + 1} + \dfrac{5^x}{5^x + 2} = \dfrac{17}{5^x\left(5^x + 3\right) + 2} \quad (\log_5 3)$

67) $10^x(10^{2x} + 5) = 6(10^{2x} - 2)$

$(\log 3, \log 4)$

$$\frac{1}{\sqrt[3x]{9^{1+x}}} = \left(3^{\frac{1+x}{3x}}\right)\cdot\sqrt[x]{5^{1-x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3x]{4^{1+x}}} = \left(2^{\frac{1+x}{3x}}\right)\cdot\sqrt[x]{3^{1-x}}$$

Risolvere le seguenti inequazioni esponenziali

01) $3^x + \frac{1}{3\cdot 3^x} > \frac{28}{9}$ $[\ x < -2 \ \vee \ x > 1\ ]$

02) $7\cdot 49^x - 50\cdot 7^x + 7 > 0$ $[\ x < -1 \ \vee \ x > 1\ ]$

03) $2^{2x} - 5\cdot 2^x + 4 < 0$ $[\ 0 < x < 2\ ]$

04) $\left(3^{x+1}\right)^{x-1} - 3^{2x^2-1}\cdot 3^{2-x^2} + 216 > 0$ $[\ -2 < x < 2\ ]$

05) $\sqrt[x]{5^{x+1}} > 25$ $[\ 0 < x < 1\ ]$ **06)** $8^x - 3\cdot 4^x > 2^{x+2} - 12$ $[\ x < 1 \ \vee x > \frac{\log 3}{\log 2}\ ]$

07) $2^{\frac{11}{2x+3}} > 32^{\frac{1}{2-x}}$ $[\ -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3} \ \vee \ x > 2\ ]$

08) $4^x + 2^{x+1} - 3 > 0$ $[\ x > 0\ ]$

09) $25^x - 5^x > 0$ $[\ x > 0\ ]$

10) $2^{x+1} + \frac{8}{2^x} > 17$ $[\ x < -1 \ \vee \ x > 3\ ]$

11) $\sqrt[x]{2^9} - 2^x < 0$ $[\ -3 < x < 0 \ \vee \ x > 3\ ]$

12) $3^{2x} - 108\cdot 3^x + 2187 < 0$ $[\ 3 < x < 4\ ]$

13) $3^{4x-1} - 81 > 0$ $[\ x > \frac{5}{4}\ ]$ **13)** $2\cdot 2^x > 5 - 4^{x-1}$ $[\ x > 1\ ]$

14) $2^x + 2^{x+1} - 2^{x-1} > 20$ $[\ x > 3\ ]$

15) $\frac{2\cdot e^x - 1}{e^x - 3} > 0$ $[\ x < -\ln 2 \ \vee \ x > \ln 3\ ]$

16) $\frac{3^{x+1}}{27^{2x}} < \frac{1}{3^{x^2+5}}$ $[\ 2 < x < 3\ ]$

17a) $3^{x+2} < 2^{4x+8}$ 17) $\sqrt{2^x} \geq 8\sqrt[3]{4^{x-1}}$ $[\ x \leq -14\ ]$

18) $2^{\frac{2x+4}{x}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ $[\ x < 0 \ \vee \ x > 2\ ]$

19) $\frac{3^{x+1} - 3^{x-1}}{2\cdot 3^x + 3^{2x} + 1} > \frac{1}{2}$ $[\ -1 < x < 1\ [$

20) $2^{x+1} < \left(4^x - 5\cdot 2^x\right)^{\frac{1}{2}}$ $[\ \forall\ x \in \varnothing\ ]$

21) $3^{x+2} + 3^x < 30$ $[\ x < 1\ ]$ **22)** $3^{-x} > 3^{-1}$ $[\ x < 1\ ]$

23) $\dfrac{5^x}{5^x - 1} + \dfrac{3}{5^x + 1} < -\dfrac{2}{1 - 5^{2x}}$ [$\forall\ x \in R$]

24) $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x+1]{9} < 3$ [$x < -1 \ \vee \ 1 - \sqrt{2} < x < 0 \ \vee \ x > 1 + \sqrt{2}$]

25) $\sqrt[x]{5 \cdot 2^x} \cdot \sqrt[x-1]{5} < 2$ [$x < 0 \ \vee \ \dfrac{1}{2} < x < 1$]

26) $3 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{4x} - 7 \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2x} + 4 < 0$ [$-\dfrac{1}{2} < x < 0$]

27) $\dfrac{55 \cdot 2^x}{5^{x+1}} - \dfrac{10}{5^{2x}} > 2^{2x}$ [$x < 0 \ \vee \ x > 1$]

28) $\dfrac{2^{x+1}}{2^x - 1} - \dfrac{4}{2^x + 1} > \dfrac{8}{2^{2x} - 1}$ [$x < 0 \ \vee \ x > 1$]

29) $3^{x+3} + 3^x - \dfrac{135}{3^{x-1}} > \dfrac{247}{3^{x-4}}$ [$x > 3$]

30*) $\dfrac{4^x}{4^{x+1} - 4} + \dfrac{1}{16^x - 4^x} < \dfrac{1}{4^x - 1}$ [$x < 0$]

31*) $\sqrt{2\left(5^x + 24\right)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$ [$\dfrac{\log 7}{\log 5} \leq x \leq 2$]

32) $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+1} - 2 \leq 0$

33) $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$ **34)** $5^{2x+1} > 5^x + 4$ **35)** $\sqrt{2^x} \geq 8 \cdot \sqrt[3]{4^{x-1}}$

36) $\dfrac{2^{x+1} - 7}{x - 1} < \dfrac{10}{3 - 2x}$ **37)** $\left(4x^2 + 2x + 2\right)^{x^2 - x} > 1$

38) $\dfrac{1}{3^x + 3} < \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$ **39)** $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

40) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$

41) $\dfrac{16^x - 5 \cdot 4^x + 4}{x - 3} < 0$] $x < 0 \ \vee \ 1 < x < 3$]

42) $\dfrac{6}{2^x - 1} + \dfrac{3}{2^x + 1} > \dfrac{2}{2^x - 1} + 5$ [$0 < x < 1$]

43) $\dfrac{2^{2x} - 2^x - 2}{3^x - 3} > 0$ **44)** $\dfrac{5^x - 5}{3^{2x} - 3^x - 2} < 0$

Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

1. $log_2 32$. R: 5.

2. $log_3 27$. R: 3.

3. $log_{\frac{1}{2}} 32$. R: –5.

4. $log_{\frac{1}{2}} 16$. R: –4.

5. $log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$. R: 3.

6. $log_{\frac{3}{4}} \frac{16}{9}$. R: –2.

7. $log_{\frac{3}{4}} \frac{256}{81}$. R: –4.

8. $log_{\frac{1}{2}} 16$. R: –4.

9. $log_2 \sqrt[5]{16}$. R: $\frac{4}{5}$.

10. $log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{27}$. R: $\frac{6}{5}$.

11. $log_{\sqrt{2}} 4$. R: 4.

12. $log_2 4\sqrt[3]{2}$. R: $\frac{7}{3}$.

13. $log_{\sqrt{2}} 8\sqrt[3]{4}$. R: $\frac{22}{3}$.

14. $log_{\sqrt[3]{4}} \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$. R: $-\frac{9}{10}$.

15. $log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. R: $\frac{2}{3}$.

16. $log_{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}} \sqrt[4]{125}$. R: $-\frac{9}{4}$.

17. $log_{\sqrt[5]{\frac{1}{4}}} \sqrt[6]{32}$. R: $-\frac{25}{12}$.

18. $log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27}\right)$. R: $-\frac{17}{12}$.

19. $log_{\sqrt{5}} \left(5\sqrt[3]{25}\right)$. R: $\frac{10}{3}$.

20. $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}\right)$. R: $-\frac{5}{2}$.

21. $log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt{3}}$. R: –3.

22. $log_{\sqrt{2}} \sqrt{2\sqrt[3]{4}}$. R: $\frac{5}{3}$.

23. $log_{(\sqrt{3}-1)} \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. R: 1.

24. $log_{\sqrt{x}} \left(x^2 \sqrt[5]{x^2}\right)$. R: $\frac{24}{5}$.

32 $log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{81}$; $log_x \sqrt[3]{x^2}$; $log_a \frac{1}{a^5}$; $log_5 \sqrt[n]{5^3}$. $\left[-\frac{4}{3};\ \frac{2}{3};\ -5;\ \frac{3}{n}\right]$

33 $log_3 \sqrt[5]{81}$; $log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{16}$; $log_{\frac{1}{3}} 9^{\frac{1}{5}}$; $log_2 \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$. $\left[\frac{4}{5};\ -\frac{4}{5};\ -\frac{2}{5};\ -\frac{2}{7}\right]$

34 $log_4 2$; $log_8 2$; $log_9 3$; $log_8 13$. $\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right]$

35 $log_8 32$; $log_3 \sqrt{\frac{1}{243}}$; $log_9 27$; $log_4 8$. $\left[\frac{5}{3};\ -\frac{5}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right]$

36 $log_8 4$; $log_{125} 5$; $log_{125} \frac{1}{5}$; $log_{\frac{1}{9}} 3$. $\left[\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}\right]$

37 $log_{\frac{4}{9}}\frac{2}{3}$; $log_{\frac{4}{9}}\frac{3}{2}$; $log_{25}5$; $log_{25}\frac{1}{5}$. $\left[\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right]$

38 $log_7\sqrt[7]{\frac{1}{49}}$; $log_{16}\frac{1}{2}$; $log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{2}$; $log_{\frac{1}{16}}2$. $\left[-\frac{2}{7};\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\right]$

39 $log_{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{25}$; $log_{0,3}\frac{100}{9}$; $log_7\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$; $log_{\frac{1}{7}}\sqrt[5]{49}$. $\left[-\frac{2}{3};\ -2;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{2}{5}\right]$

40 $log_{\frac{1}{5}}0,00032$; $log_{49}7$; $log_{81}27$; $log_{16}8$. $\left[5;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{4}\right]$

41 $log_{36}6$; $log_{32}8$; $log_{16}\frac{1}{8}$; $log_9\sqrt[5]{3}$. $\left[\frac{1}{2};\ \frac{3}{5};\ -\frac{3}{4};\ \frac{1}{10}\right]$

42 $log_{\sqrt{3}}\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$; $log_{16}4^{-\frac{1}{3}}$; $log_4 64^{-2}$; $log_{0,09}0,3$. $\left[-\frac{2}{5};\ -\frac{1}{6};\ -6;\ \frac{1}{2}\right]$

43 $log_{32}\sqrt[3]{16}$; $log_{\frac{49}{25}}\frac{5}{7}$; $log_{27}\sqrt[4]{3}$; $log_{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{8}$. $\left[\frac{4}{15};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{12};\ -9\right]$

Calcolare il valore della x sapendo che :

25. $log_2 x = 3$. R: 8.

26. $log_3 x = -2$. R: $\frac{1}{9}$.

27. $log_{\frac{1}{2}} x = -3$. R: 8.

28. $log_{\frac{1}{3}} x = -3$. R: 27.

29. $log_{\sqrt{3}} x = 4$. R: 9.

30. $log_{\sqrt[4]{5}} x = 8$. R: 25.

31. $log_{\sqrt{\frac{1}{2}}} x = -2$. R: 2.

32. $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -\frac{1}{2}$. R: $\sqrt[4]{2}$.

33. $log_{\sqrt{3}} x = -2$. R: $\frac{1}{3}$.

34. $log_{\sqrt{3}} x = \frac{5}{2}$. R: $3\sqrt[4]{3}$.

35. $log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}$. R: $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

36. $log_{2\sqrt{3}} x = 2$. R: 12.

37. $log_{\sqrt{2}} x = \frac{1}{2}$. R: $\sqrt[4]{2}$.

38. $log_{\sqrt[3]{4}} x = -3$. R: $\frac{1}{4}$.

39. $log_{\frac{3}{4}} x = -\frac{1}{2}$. R: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

40. $\log_x 16 = 4.$ R: 2.

41. $\log_x 27 = -3.$ R: $\frac{1}{3}$.

42. $\log_x \sqrt[3]{2} = \frac{2}{3}.$ R: $\sqrt{2}$.

43. $\log_x \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}.$ R: $\frac{1}{8}\sqrt[4]{8}$.

44. $\log_x \sqrt{3} = \frac{1}{2}.$ R: 3.

45. $\log_x (2\sqrt{2}) = \frac{3}{4}.$ R: 4.

46. $\log_x \left(5\sqrt[3]{2}\right) = \frac{1}{3}.$ R: 250.

47. $\log_x \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\right) = \frac{23}{150}.$ R: $4096\sqrt{2}$.

48. $\log_x \sqrt{3} = 2.$ R: $\sqrt[4]{3}$.

49. $\log_x \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3.$ R: $\frac{1}{2}\sqrt[6]{96}$.

50. $\log_x \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{2}.$ R: $\sqrt[6]{243}$.

51. $\log_x \sqrt{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$ R: 8.

52. $\log_x \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}.$ R: 8.

53. $\log_x \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2}.$ R: $\sqrt[3]{2}$.

54. $\log_x \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}.$ R: $\frac{2}{3}$.

102. $\log_3 x = \frac{1}{3}\log_3 a - \frac{2}{3}\log_3 b + \frac{5}{2}\log_3 c - 3\cdot\log_3 d.$ R: $\frac{c^2\sqrt[3]{a}\sqrt{c}}{d^3\sqrt[3]{b^2}}$.

103. $\log_m x = \frac{1}{2}\log_m a + \frac{3}{4}\log_m b - 3\log_m c.$ R: $\frac{\sqrt{a}\;\sqrt[4]{b^3}}{c^3}$.

104. $\log_m x = 2\cdot\log_m a + 3\log_m b + 5\cdot\log_m c.$ R: $a^2b^3c^5$.

105. $\log_m x = 2\cdot\log_m a - 3\cdot\log_m b + \frac{1}{2}\log_m c.$ R: $\frac{a^2\sqrt{c}}{b^3}$.

106. $\log_2 x = 3\cdot\log_2 a - \frac{1}{2}\log_2 b + \frac{3}{4}\log_m c.$ R: $\frac{a^3\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}}.$

107. $\log_4 x = \frac{1}{4}\log_4(a+y) - \frac{1}{2}\log_4 a + 2\cdot\log_4 y - \frac{2}{3}\log_4(a-y).$

R: $\frac{y^2\sqrt[4]{a+y}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{(a-y)^2}}.$

108. $\log_3 x = \frac{3}{2}\log_3 a + \frac{2}{3}\log_3 b - \frac{1}{2}\log_3(2a-b) - \frac{1}{2}\log_3(2a+b).$

R: $\frac{a\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}}.$

109. $\log_m x = \frac{2}{3}\log_m(a-2b) + \frac{2}{3}\log_m(a+2b) - 2\cdot\log_m a + 3\cdot\log_m b.$

R: $\frac{b^3\sqrt[3]{(a^2-4b^2)^2}}{a^2}.$

110. $\log_m x = \frac{2}{3}\log_m a + \frac{1}{3}\log_m b + \frac{1}{2}\log_m(a+b) - \frac{1}{3}\log_m(a-b).$

R: $\frac{\sqrt[3]{a^2b}\sqrt{a+b}}{\sqrt[3]{a-b}}.$

111. $\log_m x = \frac{3}{4}\log_m(a+5b) + \frac{1}{4}\log_m a - \frac{1}{3}\log_m(a-5b) - \frac{2}{3}\log_m b.$

R: $\frac{\sqrt[4]{a(a+5b)^3}}{\sqrt[3]{b^2(a-5b)}}.$

Semplificare le seguenti espressioni

37 $\log\left(x^2\sqrt[4]{\frac{xy}{\sqrt{x}}} : \sqrt{\frac{x}{y}}\right).$ $\left[2\log x + \frac{3}{8}\log y\right]$

38 $\log\sqrt[4]{\frac{ab^2c\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{abc}}} : \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}.$ $\left[\frac{1}{6}\log a + \frac{19}{48}\log b + \frac{3}{32}\log c\right]$

39 $\log\frac{\sqrt[4]{a^2b^3\sqrt[3]{ab}}}{\sqrt{ab\sqrt{a}}}.$ $\left[-\frac{1}{6}\log a + \frac{1}{3}\log b\right]$

40 $\log\left[\sqrt{\frac{a(a^2-1)\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a+1}}} : \sqrt{a(a-1)}\right].$ $\left[\frac{3}{8}\log a + \frac{1}{4}\log(a+1)\right]$

41 $\log\left[\sqrt{(a-1)\sqrt{(a-1)\sqrt{a^2-1}}} : \sqrt[3]{(a^2-1)^2}\right].$ $\left[\frac{5}{24}\log(a-1) - \frac{13}{24}\log(a+1)\right]$

42 $\log\left[3(x+1)^3\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x^2-1}}{3(x+1)}} : \sqrt{3x-3}\right].$ $\left[\frac{5}{8}\log 3 + \frac{23}{8}\log(x+1)\right]$

43 $\log \dfrac{x(x+y)^2\sqrt{(x-y)(x+y)^{-\frac{1}{2}}}}{(x^2-y^2)\sqrt{(x-y)\sqrt{x}}}$. $\left[\frac{3}{4}\log x+\frac{3}{4}\log(x+y)-\log(x-y)\right]$

44 $\log_8\left(4\sqrt[3]{\dfrac{8\sqrt[4]{2}}{2}}\right)-2\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{27}\sqrt[3]{9\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}:\sqrt{3}}\right)+\log_9\left(3\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right)$. $\left[-\frac{25}{6}\right]$

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche :

01) $\frac{1}{2}[\log(x+1)-\log 2]=\log(x+4)-\log 5$ $[\ 1\ ,\ \frac{7}{2}\ ]$

02) $2\log(x+4)-\log(6-x)=\log(2x+5)-\log 2$ $[\ -2\ ,\ -\frac{1}{4}\ ]$ B p. 29

03) $2\log(x+1)-\log(2x^2+4x-2)=0$ [1 , (- 3)] B p. 30

04) $\log x+\log(x^2+3x+5)=\log(x^3-4)$ N.S. B p. 31

05) $\log(x+1)+\log(x+3)-\log(x^2-3x+2)=\log 4$ $[\frac{1}{3}\ ,5\ ]$, p. 32

06) $\log(x-1)+\log(x+1)-\log(x^2-7x+12)=\log 4$ $[\frac{7}{3}\ ,7\ ]$, B p. 33

07) $\log(x+3)+\log(x-3)+co\log 7=\log(x+1)+co\lg 5$ $[\ 4\ ,\left(-\frac{13}{4}\right)\ ]$, B p. 34

08) $\log(x+3)+co\lg(5x+11)-co\lg(6x+10)+co\log 4=0$ $[\left(-\frac{7}{3}\right)\ ,1\ ]$, B p. 35

09) $\frac{1}{2}\log(x+4)-\log(2x+1)=\log 2$ $[\ 0\ ,\left(-\frac{15}{16}\right)\ ]$, B p. 37

10) $\frac{1}{2}(\log x-\log 3)=\log(x+1)-2\log 2$ $[\frac{1}{3},3]$, B p. 38

11) $\frac{1}{2}[\log(x+1)-\log 2]=\log(x+4)-\log 5$ $[1,\ \frac{7}{2}\ ]$, B p. 39

12) $\log(\sqrt{x+8}-3)-\log(2\sqrt{x+8}-1)=\log(\sqrt{x+8}-1)-\log(4\sqrt{x+8}+5)$ [8] , B p. 40

13) $\log(x\sqrt{2}+2)-\frac{1}{2}\log x=\log(2\sqrt{2}+2)-\frac{1}{2}\log 2$ [1 , 2] B p. 41

14) $\log\left(4+\sqrt[x+1]{25}\right)=\log\left(28-625^{\frac{1}{x+1}}\right)+\log 3$ $[-\frac{16}{3}\ ,5\ ,\ 1\ ]$ B p. 42

15) $\frac{1}{2}\log(2x+4)+\frac{1}{2}\log(2x-1)=\log x+\log 2$ $\left[\frac{2}{3}\right]$, B p. 51

16) $\dfrac{1}{5 - \log x} = 1 - \dfrac{2}{1 + \log x}$ [100 , 1000] B p. 50

17) $\dfrac{1}{1 + \log x} = \dfrac{2}{1 - \log x}$, $\left[10^{-\frac{1}{3}}\right]$ B p. 49

18) $\log_x 5 = \log_5 x$ [x = 5] B p. 48

19) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$ [2 , 3] B p. 47

20) $\dfrac{\log(x^3 + 8)}{\log(x + 2)} = 3$ $[0 , -\frac{1}{2}]$ B p. 45

21) $\dfrac{2\log x - 1}{\log(x + 1{,}1)} = 1$ [11 , (-1)] B p.45

22) $\frac{1}{2}\log(2x + 6) + \frac{1}{2}\log(2x + 1) = \log(x + 1) + \log 2$ **B** pag. 52 $x = -\frac{1}{3}$

23) $\log\sqrt{8 + x} + \frac{1}{2}\log(20 + 5x) = \log 15$ **B** pag. 53 [(-13) , 1]

24) $\log\sqrt{x + 4} + \log\sqrt{x + 9} = 1 + \log 0{,}6$ **B** pag. 54 [(-13) , 0]

25) $\log\sqrt{x + 3} + \log\sqrt{x + 8} = 1 - \operatorname{colog} 0{,}6$ **B** pag. 55 [(- 12) , 1]

26) $\log\left(12 - \sqrt[x]{8}\right) = \log\left(16 + \sqrt[x]{64}\right) - \log 2$ (3) **B** **pag. 56** **[3]**

27) $\log\left(2^x - 2\right) + \log\left[2^x(2^x + 5)\right] = \log\left(2^{x+2} - 3\cdot 2^x - 2\right) + \log 36$ **B** pag. 57 [1 , 2]

28) $\dfrac{2 - \log(x + 1)}{1 + \log(x + 1)} = \dfrac{1}{3 - \log(x + 1)}$ **B** pag. 58 $[x = 9 \;, x = 10^5 - 1]$

29) $\dfrac{3 - \log x}{1 + \log x} = \dfrac{1}{2 - \log x}$ **B** pag. 59 $[x = 10 \;, x = 10^5$

30) $\log x = \dfrac{4 + 3\log x}{\log x}$ **B** pag. 60 $[x = \frac{1}{10} \;, x = 10^4]$

31) $\log_2 x = \log_4(x + 4) + 0{,}5$ **B** p. 62 [(-2) , 4]

32) $\log\left(2^x - 3^{-1}\right) = \log\left(2^{2x-1} + 3\right) - \log\left(2^x + 1\right)$ **B** pag. 63 [1]

34) $x^{\log x} = 10$ **B** pag. 63 $[x = \frac{1}{10}]$

35) $\log\left(\sqrt{x} + 6\right) + \log\left(2\sqrt{x} + 6\right) = \log\left(3\sqrt{x} + 3\right) + \log\left(\sqrt{x} + 3\right)$ **B** pag. 66 [(9) , 81]

36) $\dfrac{1}{5 - \log x} = 1 - \dfrac{2}{1 + \log x}$ **B** p.67 [100 , 1000]

37) $x^x = 1$ **B** p.65 [1]

38) $x^{x^2 - 7x + 12} = 1$ **B** pag. 67 [1 , 3 , 4]

39) $x^{\log x - 1} = 10^6$ **B** pag. 68 $\left[-2 , 3 , \frac{1}{100} , 1000 \right]$

40) $\log_3(x + 2) - \frac{1}{2} = \log_9(x + 2)$ **B** pag. 87 [1]

41) $\log_2 x = \log_4(x + 4) + 0{,}5$ **B** pag. 88 [(-2) , 4]

42) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{1 - x^2} - 2x\right) + \log_3 x = 0$

43) $\log_2\left(\sqrt{1 + x} + 1\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + x - \sqrt{1 - x}\right)$

291 $\frac{\log x + 2}{\log x + 4} - \frac{1}{\log x} = \frac{1}{2}$ $\left[\left\{\frac{1}{100};\ 10.000\right\}\right]$

292 $\frac{1}{\log_2 x - 1} = \frac{3}{\log_2^2 x} + \frac{1}{\log_2^2 x - \log_2 x}$ $x = 8$

293 $\frac{2\log x - 1}{(\log x + 2)^2} - \frac{1}{\log x} + \frac{2}{\log x + 2} = 0$ $\left[\left\{\frac{1}{10};\ 10\sqrt[3]{10}\right\}\right]$

294 $\frac{\log x - 2}{\log^2 x - \log x} - \frac{2\log x - 3}{\log^2 x - 1} = \frac{4 - 3\log x}{\log^2 x + \log x}$ $x = 100$, $x = \sqrt{10}$

295 $\log^2 x = \frac{2}{\log x + 1}$ $x = 10$ **296** $2\log x - \log(x + 6) = \log 3$ $x = 6$

297 $\log(x - 1) + \log(x + 1) = \log(4x - 5)$ $x = 2$

298 $\log(x^2 + 2x + 1) - 1 = \log(x + 1)$ $x = 9$

299 $\log\sqrt{3x + 1} = \log(2x + 1)$ $x = 0$ $x = -\frac{1}{4}$

300 $\log_2\sqrt{x^2 - 5x + 8} = 1$ $[\{1;\ 4\}]$

301 $\log_3\sqrt[3]{x^2 - x + 7} = 1$ $[\{-4;\ 5\}]$

302 $2\log_2 x = 1 + \log_2(4 - x)$ $[\{2\}]$

303 $\log_2(x^2 - 5) = 2 + \log_2 x$ $[\{5\}]$

304 $\log_3(x^2+9) = 2 + \log_3(x+1)$ $[\{0;\ 9\}]$

305 $\log(2x-1) - 2\log(x+2) = \log(2-x) - \log(x^2+2x)$ $\left[\left\{\frac{4}{3}\right\}\right]$

306 $\log_3(x^2+3x-3) - \log_3(x-2) = 1 + \log_3(x+2)$ $[\{3\}]$

307 $2\log(x-1) + \log(x+3) = \log(x^3-1)$ $[\{4\}]$

308 $\log(3-2x) - \log(x-1) = \log(x-4) - \log 2$ $\{\emptyset\}$

309 $\log_2[(\sqrt{2}-1)x + (x-\sqrt{2})^2] = 1 + \log_2(4+\sqrt{2})$ $x=-2 \quad x = 3+\sqrt{2}$

310 $\log\sqrt[3]{5x - x^3 - 4} = \log(x-1)$ $x = \frac{3}{2}$

311 $\log\sqrt[3]{3x+1} = \log(x+1)$ $x = 0$

312 $\log_2\sqrt{x^3-2x^2+x} = 1 + \log_2(x-1)$ $x = 4$

313 $\frac{1}{2}\log_2(x+1) - 1 = \log_2\sqrt{x+2-\sqrt{3x+7}}$ $x = 3$

Risolvere le seguenti inequazioni logaritmiche

01) $\frac{3}{\log x - 1} + \frac{4}{\log x + 1} > \frac{13}{\log^2 x - 1}$ $\left[\frac{1}{10} < x < 10 \quad \vee \quad x > 100\right]$

02) $\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} + 1 > 0$ $\left[\frac{1}{4} < x < 1 \quad \vee \quad x > 2\right]$

03) $\frac{2}{1+\log_7 x} + \frac{1}{5-\log_7 x} > 1$ $\left[\frac{1}{7} < x < 49 \quad \vee \quad 7^3 < x < 7^5\right]$

04) $\frac{2+\log_3 x}{2-\log_3 x} + 2 > \frac{6}{1-\log_3 x}$ $\left[x < \frac{1}{9} \quad \vee \quad 3 < x < 9 \quad \vee \quad x > 27\right]$

05) $3\log x - \frac{4}{1+\log x} < 1$

06) $\frac{2}{2+\log_3 x} + \frac{1}{1+\log_3 x} > \frac{7}{6}$

07) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3\log_5 x} < \frac{2}{\log_5 x - 2}$

08) $\frac{\log_5 x + 5}{4\log_5^2 x - 1} > \frac{\log_5 x + 3}{2\log_5 x - 1} - \frac{6\log_5 x}{2\log_5 x + 1}$