Unità Didattica N° 5 Il riferimento cartesiano

Coordinata ascissa

Si fissi sopra la retta orientata x di versore $\vec{i}$ il punto O . Considerato un qualsiasi punto P della retta x , resta univocamente definito il vettore P - O e quindi il numero reale relativo :

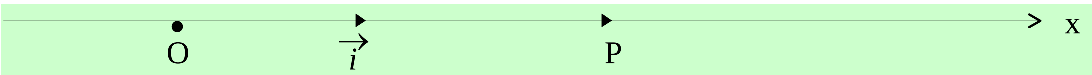
$$x = \frac{P-O}{\vec{i}}$$

x prende il nome di **ascissa** del punto P,O si chiama **origine** delle ascisse o semplicemente **origine** , la retta orientata x **asse delle ascisse** .

E' evidente che nota l'ascissa x si può ricavare la posizione del punto P e viceversa , quindi vi è **corrispondenza biunivoca** fra i numeri reali relativi ed i punti di una retta sulla quale abbiamo scelto una origine ed un versore .

Da tutto ciò si deduce che ogni punto di una retta orientata x di dato versore può rappresentare un numero reale relativo e viceversa ogni numero reale relativo ha come immagine geometrica un punto di una retta orientata sulla quale abbiamo fissato un'origine ed un versore . Per i motivi sopra esposti è lecito usare la parola **punto** al posto della parola **numero** e viceversa .

Si dice pure che **P** è l ' **immagine geometrica** del numero reale relativo x .



Coordinate cartesiane nel piano

Si fissino nel piano O_x (di versore $\vec{i}$), O_y O_y (di versore $\vec{j}$) uscenti da uno stesso punto O .

Considerato nel piano un qualsiasi punto P si traccino per esso le rette parallele all'asse x ed all'asse y . E' valida la seguente relazione vettoriale :

$$P - O = (P_1 - O) + (P_2 - O) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

i numeri reali relativi x ed y si dicono le coordinate cartesiane del punto P . Si scrive $P(x,y)$ e si legge << **P di coordinate x ed y** >> . x è detta **ascissa** ed y **ordinata** del punto P .

Spesso si dice brevemente punto (x,y) in luogo di punto di ascissa x ed ordinata y .

La retta orientata **x** (di versore $\vec{i}$) è detta **asse delle ascisse** o asse delle x , mentre la retta orientata y (di versore $\vec{j}$) è detta **asse delle ordinate** o asse delle y .

Le due rette x ed y costituiscono una **coppia di assi coordinati cartesiani ortogonali** oppure **obliqui** a seconda che esse sono ortogonali oppure no . Il punto O è detto **origine degli assi** .

Da tutto ciò si deduce che c'è una corrispondenza biunivoca fra coppie ordinate di numeri reali relativi e i punti del piano e viceversa .

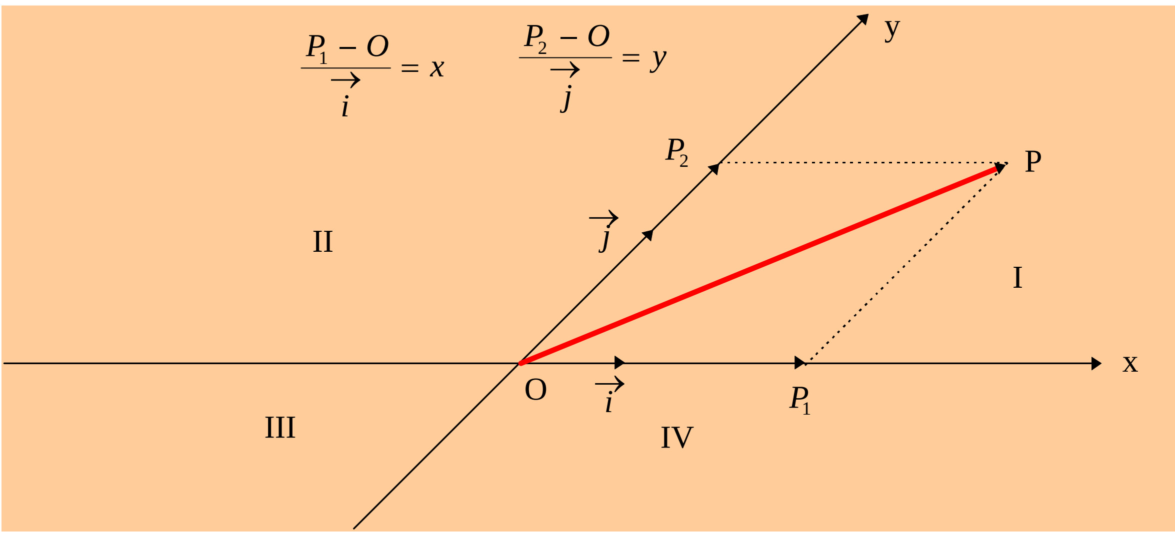
Infatti da una ben determinata posizione del punto P si deducono in maniera univoca le sue coordinate cartesiane (x, y) .

Viceversa , assegnata la coppia ordinata (x, y) , restano univocamente individuati su O_x e O_y i punti P_1 e P_2 , e conseguentemente P , come quarto vertice del parallelogramma costruito su OP_1 e OP_2 .

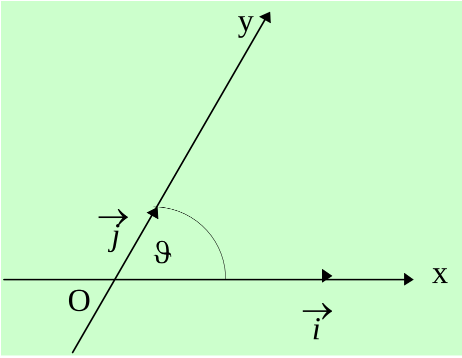
I due assi O_x ed O_y dividono il piano cartesiano in quattro regioni angolari (dette **quadranti**) in ciascuna delle quali i punti hanno coordinate di segno determinato:

$P_1 \hat{O} P_2$ è il primo quadrante $P_o \hat{O} B$ è il secondo quadrante , $B \hat{O} C$ è il terzo quadrante , $C \hat{O} P_1$ è il quarto quadrante .

Le rette O_x , O_y e le due bisettrici degli assi cartesiani dividono il piano in otto regioni angolari dette ottanti .

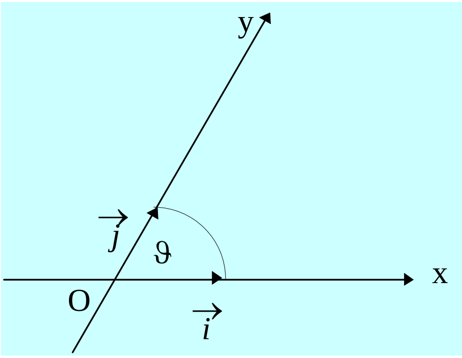


Varie specie di sistemi di riferimenti



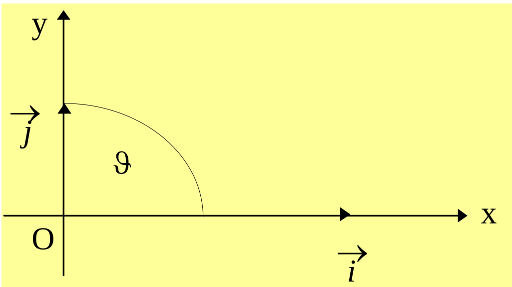
Sistema di riferimento generico :

$\vartheta \neq 90°$ $\quad |\vec{i}| \neq |\vec{j}|$



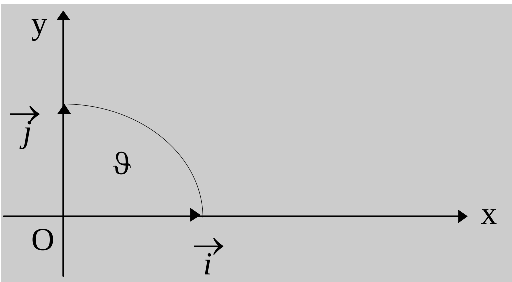
Sistema di riferimento normale :

$\vartheta \neq 90°$ $\quad |\vec{i}| = |\vec{j}|$



Sistema di riferimento ortogonale :

$\vartheta = 90°$ $\quad |\vec{i}| \neq |\vec{j}|$



Sistema di riferimento ortonormale :

$\vartheta = 90°$ $\quad |\vec{i}| = |\vec{j}|$

Rappresentazione cartesiana di un vettore

Sia $B - A$ un'immagine geometrica del vettore libero $\vec{a}$. Possiamo scrivere :

$B - A = (H - A) + (B - H)$ cioè : $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$

I numeri reali relativi a_x , a_y si dicono le **componenti cartesiane** (o le **coordinate cartesiane**) del vettore $\vec{a}$ secondo le direzioni orientate di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (del riferimento cartesiano)

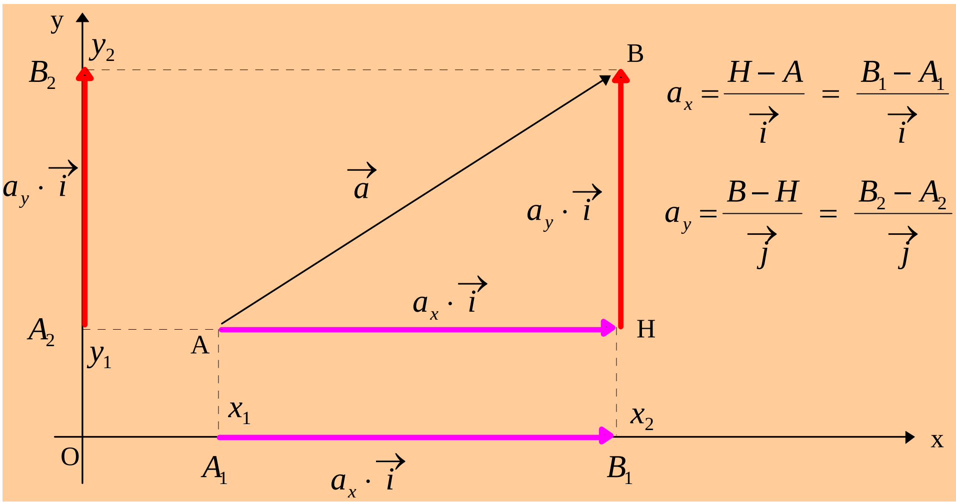
$$a_x = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{j} \quad , \quad a_y = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{i}$$

Le componenti a_x ed a_y possono considerarsi in luogo del vettore che rappresentano .

Con uno dei seguenti simboli :

$$\vec{a}(a_x, a_y) \ , \ \vec{a} = (a_x, a_y) \ , \ \vec{a} = [a_x, a_y] \ , \ \vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \ , \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

intenderemo il vettore $\vec{a}$ di componenti (coordinate) cartesiane a_x , a_y quando la base del piano vettore euclideo è la coppia ordinata di versori $(\vec{i}, \vec{j})$.



TEOREMA

<< $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ **sono C.N.S. perché risultino uguali i vettori** $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$
$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$ >>

Dimostrazione della necessità

Hp { $\vec{a} = (a_x, a_y) = \vec{b} = (b_x, b_y)$ Th { $a_x = b_x$, $a_y = b_y$

I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, essendo uguali , sono rappresentati dai segmenti orientati equipollenti $A - C$ e $B - D$. Il quadrilatero ABCD è un parallelogramma . Risulta .

$$H - C = a_x \vec{i} \ , \ A - H = a_y \vec{j} \ , \ K - D = b_x \vec{i} \ , \ B - K = b_y \vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = a = BD = b \quad per \quad Hp \\ A\hat{C}H = B\hat{D}H \quad perchè \quad angoli \\ aventi\ i\ lati\ paralleli\ ed\ equiversi \\ A\hat{H}C = B\hat{H}K = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} = \overset{\Delta}{BKD} \Rightarrow \begin{cases} CH = DK \\ AH = BK \end{cases}$$

CH = DK $\Rightarrow$ H - C = K - D $\Rightarrow$ $a_x \vec{i} = b_x \vec{i}$ $\Rightarrow$ $a_x = b_x$

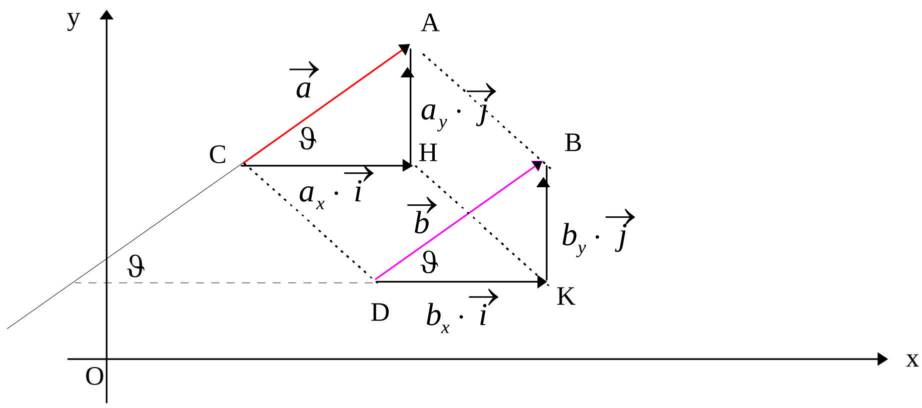
AH = BK $\Rightarrow$ A - H = B - K $\Rightarrow$ $a_y \vec{j} = b_y \vec{j}$ $\Rightarrow$ $a_y = b_y$

Dimostrazione della sufficienza

I segmenti orientati H-C , A-H , K-D e B-K siano rispettivamente le immagini geometriche dei vettori $a_x \vec{i}$, $a_y \vec{j}$, $b_x \vec{i}$ e $b_y \vec{j}$.

H-C = K-D $\Rightarrow$ CDHK parallelogramma $\Rightarrow$ { CD = HK , CD // HK
A-H = B-K $\Rightarrow$ ABKH parallelogramma $\Rightarrow$ { AB = HK , AB // HK e quindi

{ AB = CD , AB // CD } $\Rightarrow$ ABCD parallelogramma $\Rightarrow$ B-D = A-C $\Rightarrow$ $\vec{a} = \vec{b}$



Consideriamo i vettori $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$, $\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j}$ ed il numero $m \in R$.

$\vec{b} = m \cdot \vec{a}$ $\Leftrightarrow$ $b_x = ma_x$ $by_x = ma_y$

$b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = m(\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j})$, $b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = ma_x \vec{i} + ma_y \vec{j}$ $b_x = ma_x$, $b_y = ma_y$

$\vec{b} = -\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ $b_x = -a_x$, $b_y = -a_y$

$b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = -(a_x \vec{i} + a_y \vec{j})$, $b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = -a_x \vec{i} - a_y \vec{j} \Rightarrow$ $b_x = ma_x$, $b_y = ma_y$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$

$c_x \vec{i} + c_y \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$, $c_x \vec{i} + c_y \vec{j} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$

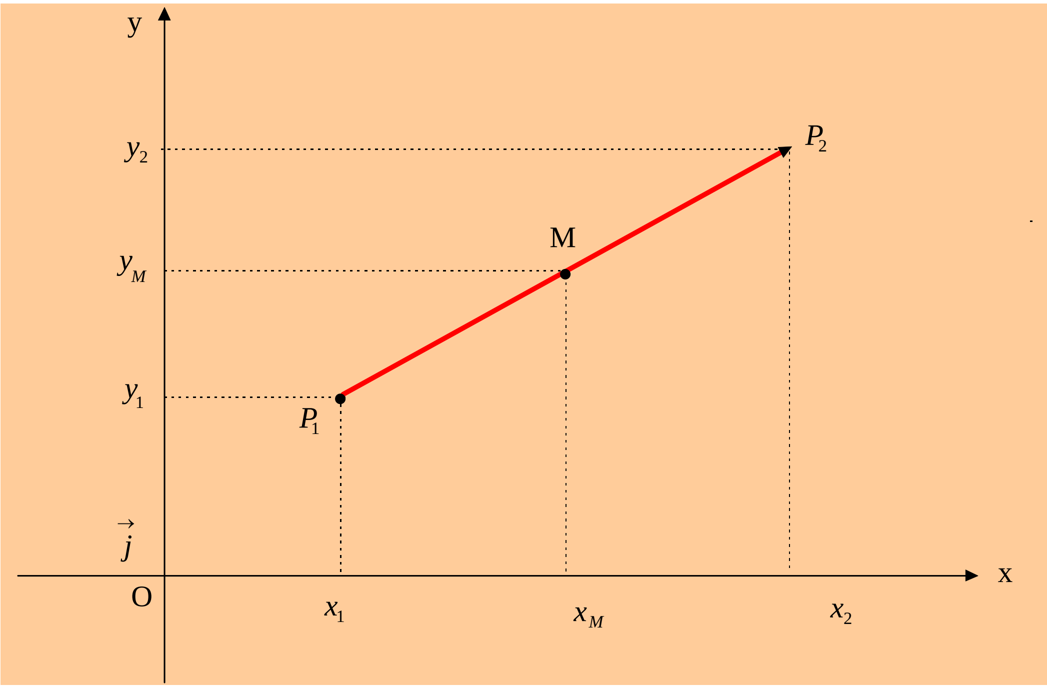
$c_x = a_x + b_x$ $c_y = a_y + b_y$

Le coordinate del punto medio di un segmento

Sia $M(x_M, y_M)$ il punto medio del segmento di estremi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

$$M - P_1 = P_2 - M \quad \Rightarrow \quad (x_M - x_1)\vec{i} + (y_M - y_1)\vec{j} = (x_2 - x_M)\vec{i} + (y_2 - y_M)\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Le coordinate del baricentro di un triangolo

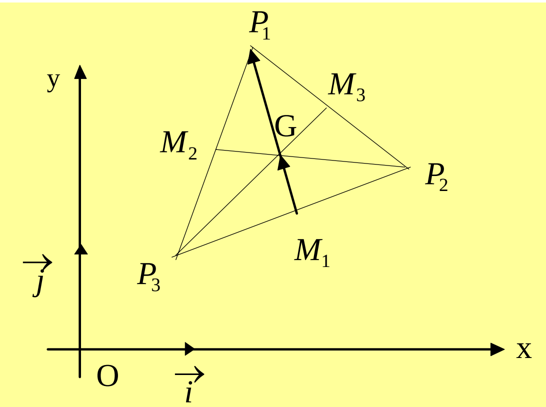
Sia $G(x_G, y_G)$ il b**aricentro** del triangolo di vertici $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$.

Risulta : $M_1\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ Dalla geometria euclidea sappiamo che : $P_1G = 2GM_1$

Risulta pertanto valida la seguente relazione vettoriale : $P_1 - G = 2(G - M_1) \Rightarrow$

$$\left(x_1 - x_G\right)\vec{i} + \left(y_1 - y_G\right)\vec{j} = 2\left(x_G - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)\vec{i} + 2\left(y_G - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_G = 2x_G - x_2 - x_3 \\ y_1 - y_G = 2y_G - y_2 - y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad , \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

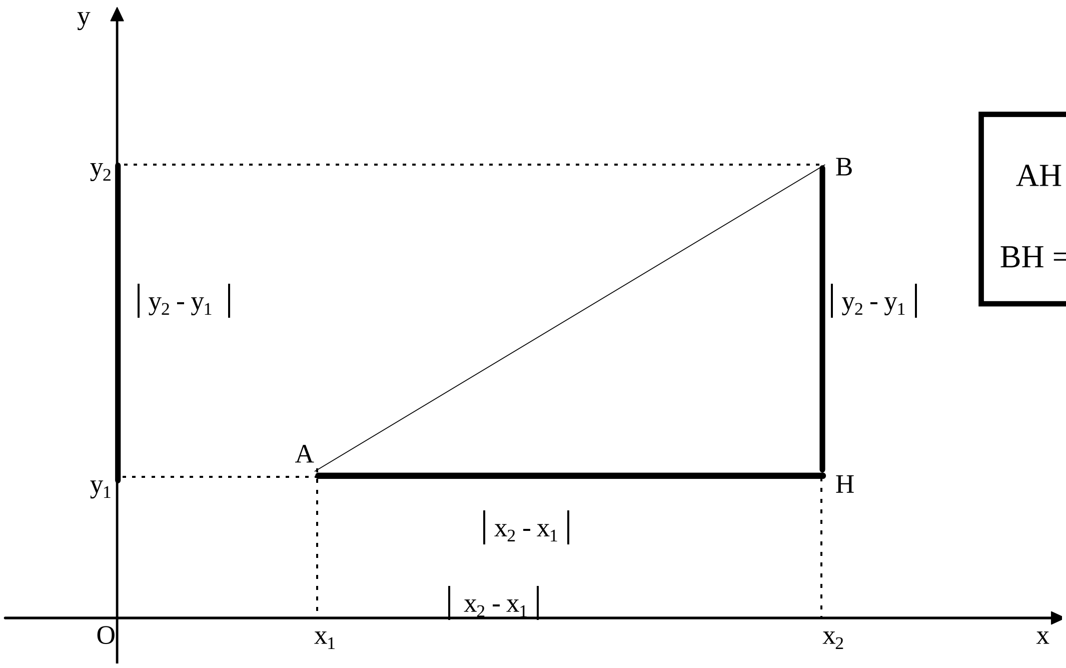


Coordinate del baricentro di un triangolo di cui conosciamo le coordinate dei suoi vertici

La distanza tra due punti

La distanza tra i punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ si calcola applicando la seguente formula :

$$d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$AH = |x_2 - x_1|$

$BH = |y_2 - y_1|$

Dimostrazione

Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB .

$$d(A.B) = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A(-1,2) , B(-5,3) $\quad d(A,B) = \sqrt{(-5+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

Osservazione

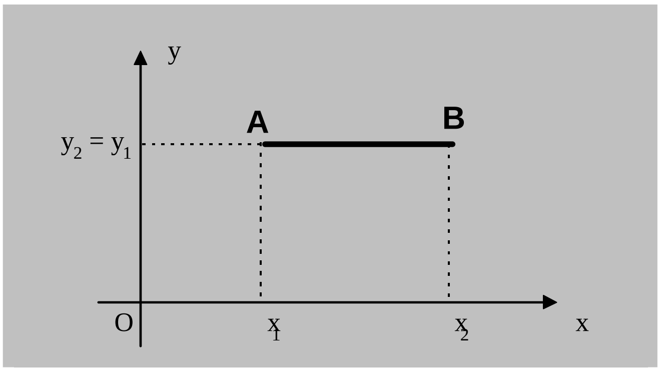
Se i punti A e B hanno la stessa ordinata ($y_1 = y_2$) allora il segmento AB è parallelo all'asse delle ascisse .

In questo caso abbiamo :

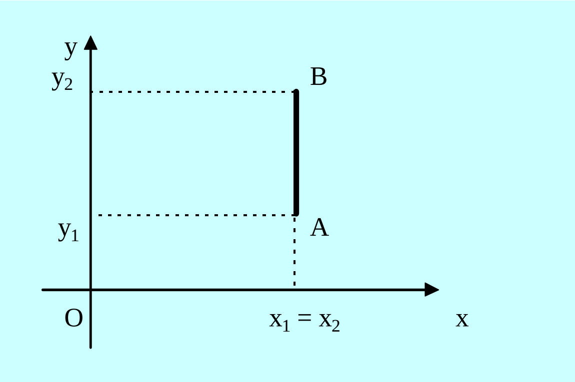
$$\boxed{d(A,B) = |x_2 - x_1|}$$

Possiamo anche dire che :

$d(A,B)$ = **ascissa maggiore - ascissa minore**



Se i punti A e B hanno la stessa ascissa ($x_1 = x_2$) allora il segmento AB è parallelo all'asse delle ordinate .



In questo caso abbiamo :

$$d(A,B) = |y_2 - y_1|$$

Possiamo anche dire che :

$d(A,B)$ = **ordinata maggiore - ordinata minore**

La divisione di un segmento secondo un dato rapporto

Dividere il segmento P_1P_2 secondo un dato rapporto $k = \frac{m}{n}$ significa trovare un punto **Q** della retta P_1P_2 per il quale si verifica la relazione : $\frac{QP_1}{QP_2} = k = \frac{m}{n}$ con $k, m, n \in R^+$

RISOLUZIONE CARTESIANA

Supponiamo che sia : $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $Q(X, Y)$. Il punto $Q_1(X_1, Y_1)$,interno al segmento P_1P_2, è definito dalla seguente relazione vettoriale : $(Q_1 - P_1) = k\cdot(P_2 - Q_1)$ da cui si deduce che : $(X_1 - x_1)\cdot\vec{i} + (Y_1 - y_1)\cdot\vec{j} = k(x_2 - X_1)\cdot\vec{i} + k(y_2 - Y_1)\cdot\vec{j}$

$$\begin{cases} X_1 - x_1 = k(x_2 - X_1) \\ Y_1 - Y_1 = k(y_2 - Y_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{x_1 + k\,x_2}{1 + k} = \dfrac{n\,x_1 + m\,x_2}{m + n} \\ Y_1 = \dfrac{y_1 + k\,y_2}{1 + k} = \dfrac{n\,y_1 + m\,y_2}{m + n} \end{cases} \quad [1]$$

Se $k = 1$ **Q** è il punto medio del segmento P_1P_2 e le [1] esprimono le coordinate del punto medio di tale segmento .

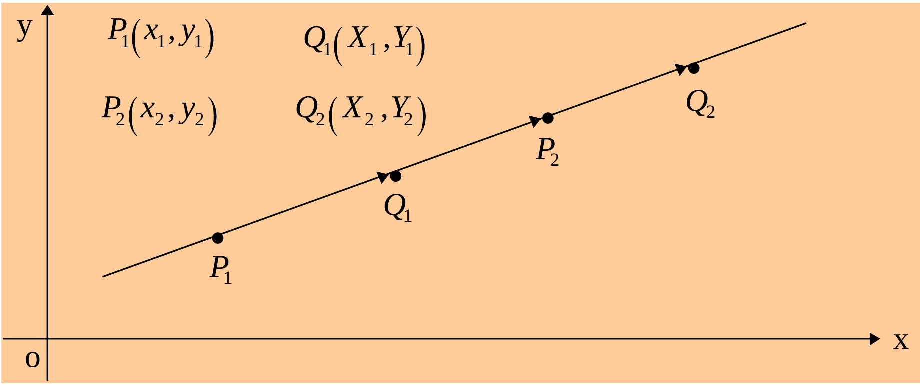
Il punto $Q_2(X_2, Y_2)$, eterno al segmento P_1P_2 , è definito dalla seguente relazione vettoriale :

$$(Q_2 - P_1) = k\cdot(Q_2 - P_2)$$

da cui si deduce che : $(X_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (Y_1 - y_1)\cdot\vec{j} = k(X_2 - x_2)\cdot\vec{i} + k(Y_2 - y_2)\cdot\vec{j}$

$$\begin{cases} X_2 - x_1 = k(X_2 - x_2) \\ Y_1 - y_1 = k(Y_2 - y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{x_1 - k\,x_2}{1 - k} = \dfrac{n\,x_1 - m\,x_2}{n - m} \\ Y_2 = \dfrac{y_1 - k\,y_2}{1 - k} = \dfrac{n\,y_1 - m\,y_2}{n - m} \end{cases}$$



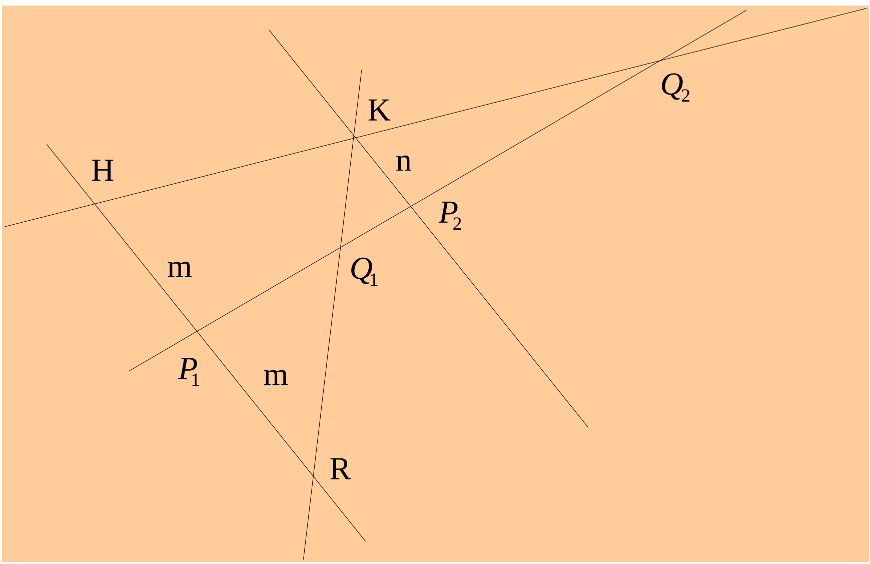
RISOLUZIONE SINTETICA

Si tracciano due qualsiasi rette fra loro parallele , una passante per P_1 e l'altra per P_2 . Sulla prima consideriamo i segmenti P_1H e P_1R aventi come misura il numero **m** e sulla seconda il segmento P_2K avente come misura il numero **n** . $Q_1 = KR \cap P_1P_2$ $Q_2 = HK \cap P_1P_2$

Q_1 e Q_2 sono i punti richiesti . Infatti : $R\overset{\Delta}{P_1}Q_1\ [s]\ Q_1\overset{\Delta}{P_2}K \Rightarrow Q_1P_1 : Q_1P_2 = P_1R : P_2K$ cioè :

$$\frac{Q_1P_1}{Q_1P_2} = \frac{m}{n} = k$$

$P_1\overset{\Delta}{H}Q_2\ [s]\ P_2\overset{\Delta}{K}Q_2 \Rightarrow Q_2P_1 : Q_2P_2 = P_1H : P_2K$ cioè : $\dfrac{Q_2P_1}{Q_2P_2} = \dfrac{m}{n} = k$



Coordinate polari

Un altro modo di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti **P** del piano euclideo e le coppie ordinate di numeri reali è quello di introdurre un **sistema di coordinate polari** .

Fissiamo nel piano euclideo un punto **O** detto **Polo** , una semiretta orientata **p** di origine **O** detta **asse polare** ,il verso antiorario come **verso positivo delle rotazioni** ,e l'unità di misura **U** per i segmenti .

Fissato in tal modo il riferimento , un qualsiasi punto **P** del piano determina i seguenti due numeri :

$\boxed{\rho = \frac{OP}{U} \geq 0}$ e $\boxed{\vartheta = p\hat{O}P}$ definito a meno di multipli di 2π ed **indeterminato** solo se $P \equiv O$

con : $0 \leq \vartheta < 2\pi$ **[1]**

Il numero positivo ρ è detto **raggio vettore** o **raggio polare** o **modulo** del punto **P**

ϑ (che varia tra zero e 2π) è detto **anomalia** o **argomento** o **angolo polare** di **P** .

Si viene così ad associare ad ogni punto **P** del piano una coppia di numeri reali ρ e ϑ (con $\rho \geq 0$ e $0 \leq \vartheta < 2\pi$) i quali prendono il nome di **coordinate polari** del punto **P** (rispetto al polo O ed all'asse polare p) .

Viceversa , data una qualunque coppia ordinata di numeri $\rho > 0$ e ϑ (con $0 \leq \vartheta < 2\pi$) , risulta individuato uno ed un sol punto **P** , come intersezione della circonferenza di centro O e raggio ρ con la semiretta uscente dal punto O e tale che ϑ sia l'angolo di cui deve ruotare in senso antiorario la retta orientata $\vec{p}$ fino alla sua sovrapposizione sulla retta orientata $\overrightarrow{OP}$.

Infatti dare $\rho > 0$ significa dire che il punto P cercato dista ρ dal centro O cioè si trova sulla circonferenza di centro O e raggio ρ ; dare ϑ significa dire che P si trova sulla semiretta uscente dal polo O e formante con l'asse polare l'angolo ϑ . In tal guisa , viene a stabilirsi una **corrispondenza biunivoca** (con la sola eccezione del polo) tra i punti **P** del piano e le coppie ordinate (ρ, ϑ) di numeri reali .

Per avere tutti i punti del piano [1] basta fare variare il **raggio vettore** ρ da **zero** a $+\infty$ e (a meno di multipli di 2π) l ' **anomalia** ϑ da **zero** incluso a 2π escluso .

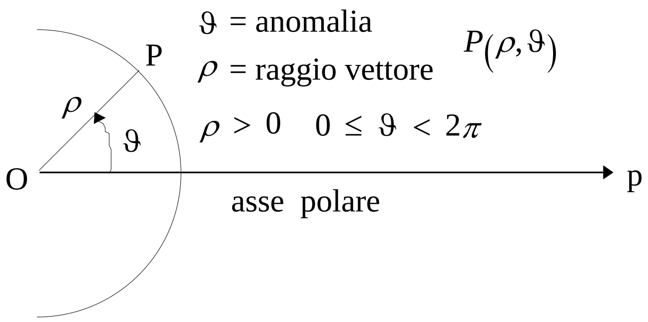
[1] Con l'unica esclusione del punto O , polo del riferimento polare

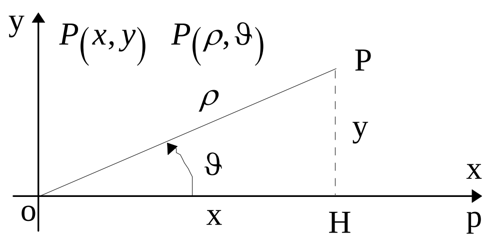
Osservazione N° 1

Onde evitare l'introduzione di **angoli concavi** (cioè $> \pi$) si preferisce (secondo Oscar Chisini) attribuire a ϑ il valore che appare più naturale , quello cioè $\leq$ in valore assoluto di π e col segno necessario . Pertanto le [1] diventano : $\rho > 0 \quad , \; -\pi < \vartheta \leq \pi$ **[2]**

ed i punti $P(\rho, 315°)$ e $P_1(\rho, -45°)$ coincidono , cioè rappresentano lo stesso punto .

$\vartheta < 0$ **significa che la rotazione avviene in senso orario**





Con questa convenzione , ϑ è l'angolo convesso di cui deve ruotare in senso orario o in senso antiorario l'asse polare $\vec{p}$ fino alla sua sovrapposizione sulla retta OP .

Osservazione N° 2

- I punti dell'asse polare hanno anomalia **0**
- I punti della semiretta opposta all'asse polare hanno anomalia $\vartheta = \pi$ ($\vartheta = 180°$)
- I punti del piano che hanno **raggio vettore** $\rho = \rho_o$ sono tutti i punti della circonferenza di centro O e raggio ρ_o .
- I punti che hanno uguale anomalia sono situati sulla stessa semiretta
- In generale l'asse polare è una semiretta orizzontale orientata verso destra a partire dal polo **O**

Relazione fra le coordinate polari e le coordinate cartesiane

In molti problemi è molto utile e comodo utilizzare **coordinate polari** al posto delle coordinate cartesiane . Vediamo adesso come è possibile passare da un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani a quello riferito ad un sistema polare . .

Ammettiamo che un sistema di assi cartesiani sia sovrapposto ad un sistema di assi polari , supponiamo cioè che le due origini coincidano e che il semiasse positivo delle x coincida con l'asse polare del sistema polare .

I due riferimenti , quello cartesiano e quello polare , si dicono **associati** quanto l'asse polare **p** coincide col semiasse positivo delle ascisse in modo che l'origine degli assi cartesiani coincida col polo del sistema polare .

Detto **P** un punto qualsiasi del piano , indichiamo con (x,y) e (ρ,ϑ) rispettivamente le **coordinate cartesiane** e **polari** di questo punto .

Poiché risulta : $\overline{OH} = \overline{OP}\cdot\cos\vartheta$, $\overline{HP} = \overline{OP}\cdot sin\,\vartheta$ possiamo scrivere :

$x = \rho\cos\vartheta$ $\qquad$ $y = \rho\, sin\,\vartheta$ $\qquad$ **[3]**

Inoltre : $x^2 = \rho^2\cos^2\vartheta$, $y^2 = \rho^2 sin^2\vartheta$, $x^2 + y^2 = \rho^2\left(\cos^2\vartheta + sin^2\vartheta\right) = \rho^2$ da cui :

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\cos\vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$sin\,\vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$tg\,\vartheta = \dfrac{y}{x}$	$\vartheta = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$	**[4]**

Le formule [3] servono per esprimere l'equazione cartesiana di una curva in equazione polare , quando assumiamo come polo l'origine del sistema cartesiano e come asse polare il semiasse positivo delle x ; le [4] servono per il passaggio inverso cioè per il passaggio dal riferimento polare a quello cartesiano .

Le varie **convenzioni** che si seguono per le **coordinate polari** sono le seguenti :

1) **Coordinate polari ordinarie** $\rho > 0 \quad 0 \le \vartheta < 2\pi$ oppure $\rho > 0$, $-\pi < \vartheta \le \pi$

2) **Coordinate polari generalizzate** $\rho > 0$, $-\infty < \vartheta < +\infty$

3) **Coordinate polari generali** $-\infty < \rho < +\infty \quad -\infty < \vartheta < +\infty$

4) $-\infty < \rho < +\infty \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$