Unità Didattica N°2   Le funzioni univoche

01) Definizione di applicazione o funzione o   mappa

02) Classificazione delle funzioni numeriche

03) Insieme di definizione e dominio di una funzione

04) Restrizione e prolungamento

05) Applicazione suriettiva , iniettiva , biiettiva

06) Estremi di una funzione , funzioni limitate

07) Funzioni monotone

08) Le funzioni pari e dispari e la simmetria rispetto agli assi cartesiani

09) Funzione inversa

10) Funzione composta

Definizione di funzione univoca

Dati due insiemi non vuoti A e B (eventualmente coincidenti) definiamo **funzione univoca** di **A** verso **B** una legge f ,di natura qualsivoglia , che ad ogni elemento $x \in A$ associa un solo elemento $y = f(x) \in B$.

In simboli abbiamo : $f : A \to B : x \in A \to f(x) = y \in B$ e leggiamo :

<< f di **A** verso **B** che associa ad ogni elemento $x \in A$ un solo elemento $y = f(x) \in B$ >>, oppure , più semplicemente , $f : x \to f(x)$ (f che porta **x** in ***f*(x)**)

$f : x \to y$ (***f* che porta x in y**)

A è detto **insieme di partenza** , **B** è detto **insieme di arrivo**

L ' elemento $f(x) \in B$ si chiama **valore** di x in f o **immagine** di x tramite f o **corrispondente** di x in f . Si dice pure che **x** è la **controimmagine** di $f(x) \in B$

L ' insieme **A** è detto **dominio** della funzione f o (**insieme di esistenza**) e può essere indicato con uno dei seguenti simboli : **dom** f , **D** , $\mathbf{D_f}$, $\mathbf{C_e}$, **E** , **I**

L'insieme delle immagini prende il nome di **codominio** della funzione f e può essere indicato con uno dei seguenti simboli : **codom** f , $\mathbf{C_f}$, ***f*(A)** . In generale risulta : $f(A) \subseteq B$

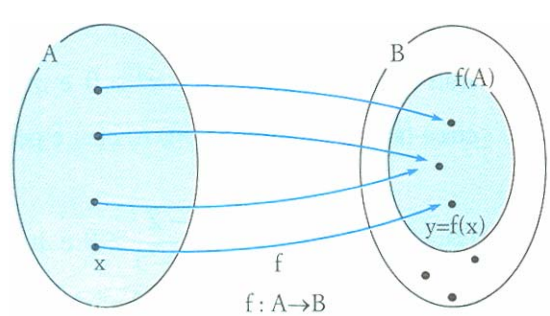
L ' insieme **G** formato dalle coppie ordinate $(x,y) = (x, f(x))$ tale che risulti:

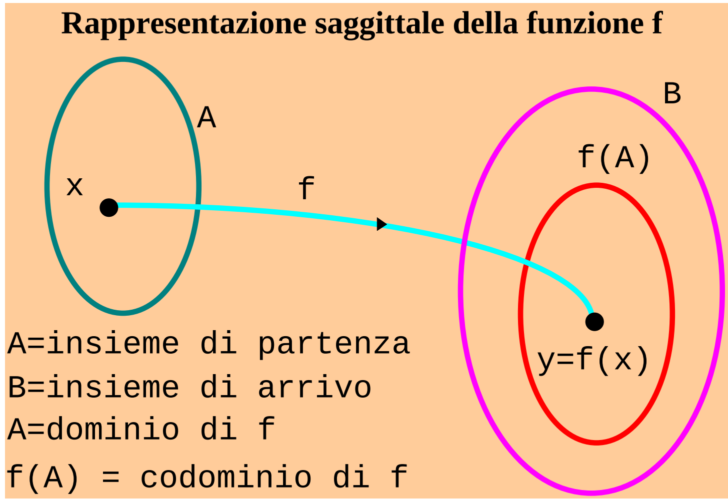
$$G = \{(x,y) \in A \times B \wedge f : x \to f(x) = y \in B\}$$

prende il nome di **grafico** della funzione f e si indica col seguente simbolo : $G(f) = G_f$.

Risulta : $G(f) = \subseteq A \times B$

Se riferiamo il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani , allora il grafico della funzione f(x) è una linea piana avente equazione cartesiana y = f(x) . Essa è la curva piana descritta dal punto $P[x, f(x)]$ quando la x assume tutti i valori del dominio della funzione f(x) .





OSSERVAZIONE

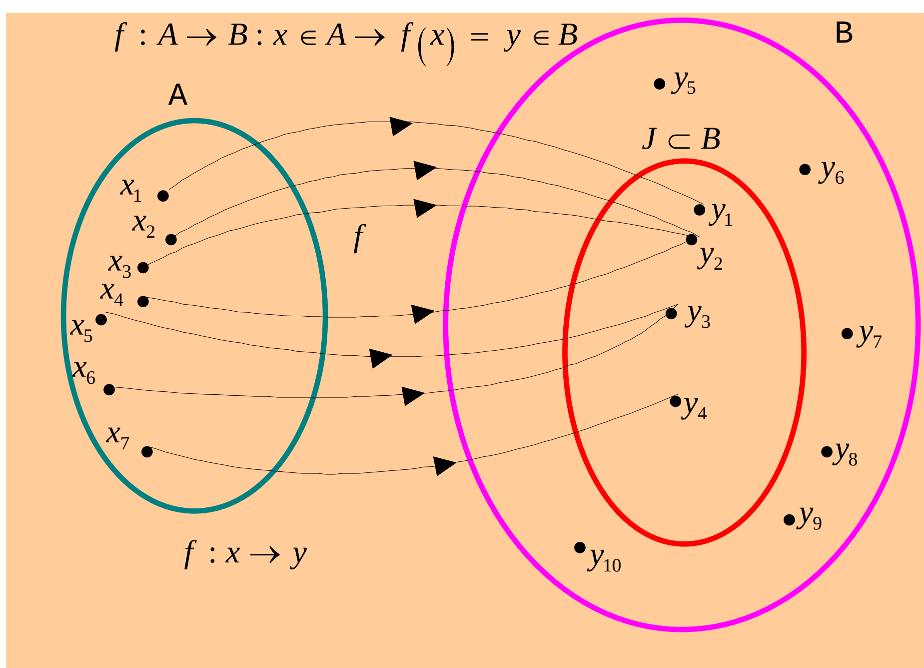
- Se non conosciamo l'insieme di partenza **A** , allora diciamo **dominio** della funzione ***f*** l'insieme di tutti gli elementi **x** che hanno immagine y o $f(x)$ appartenente all'insieme di arrivo **B** .

Sia $f : x \to y$ una **funzione numerica** . Dicesi **dominio** della funzione numerica f l'insieme dei valori numerici che bisogna attribuire alla **x** perché le corrispondenti immagini siano **reali e finite** .

Rappresentazione sagittale

di una

funzione univoca



Il generico elemento x dell'insieme A prende il nome di **variabile indipendente** della funzione f .
Il corrispondente valore $y = f(x) \in B$, che rappresenta l ' **immagine** di x tramite f , è detto anche **variabile dipendente .** Se A e B sono *insiemi numerici* , f è detta **funzione numerica** .
Se f è data mediante una formula , allora il simbolo f rappresenta il complesso delle operazioni che bisogna eseguire sulla **x** per ottenere la corrispondente immagine $f(x) = y$.
Dicesi **dominio** della funzione numerica $f : x \rightarrow f(x)$ l ' insieme dei valori numerici che bisogna attribuire alla x perché le corrispondenti **immagini** siano **reali e finite**
Le scritture f , $f(x)$, $y = f(x)$ rappresentano, rispettivamente ,una **funzione** ,l'*immagine* dell'elemento x tramite f , l ' <u>equazione cartesiana</u> del grafico di f .
Per questo motivo si parla spesso ,anche se impropriamente , di funzione $f(x)$ o di funzione $y = f(x)$ al posto di **funzione** f .

Classificazione delle funzioni numeriche

Per le **funzioni numeriche** abbiamo detto che il simbolo f riassume il complesso delle operazioni da eseguire sulla variabile indipendente x per ottenere l'immagine f(x) .
Le operazioni da eseguire sulla x possono essere **algebriche** o **trascendenti** . Sono **operazioni algebriche** le operazioni razionali (addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisione) e le **operazioni irrazionali** (estrazione di radice) , sono **operazioni trascendenti** quelle non algebriche che introducono algoritmi più complessi.
Una funzione dicesi **algebrica** quando la variabile indipendente è assoggettata soltanto ad operazioni algebriche , in caso contrario dicesi **trascendente** .
Le funzioni trascendenti più semplici sono :

1) la funzione esponenziale (a^x con $a > 0 \wedge a \neq 1$)
2) la **funzione logaritmo** ($\log_a x$ con $x > 0$ e $a > 0 \wedge a \neq 1$)
3) le ***funzioni goniometriche*** ($\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $\cot g\, x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$)

$$\text{Funzioni}\begin{cases}\text{Algebriche}\begin{cases}1)\ \text{razionali intere}\\2)\ \text{razionali fratte}\\3)\ \text{irrazionali}\end{cases}\\ \text{Trascendenti}\begin{cases}1)\ \text{goniometriche}\\2)\ \text{logaritmiche}\\3)\ \text{esponenziali}\end{cases}\end{cases}$$

Le funzioni algebriche sono quelle funzioni per le quali le operazioni che agiscono sulla variabile indipendente sono : l'**addizione** , la **sottrazione** , la **moltiplicazione** , la **divisione** , l ' **elevamento a potenza** , l ' **estrazione di radice** .

Le funzioni algebriche prendono il nome di **funzioni razionali intere** se le operazioni da eseguire sulla variabile indipendente sono solo addizioni ,sottrazioni , moltiplicazioni ed elevamento a potenza . Quando in aggiunta vi è anche l ' **operazione di divisione** si hanno le **funzioni razionali fratte** . Se compaiono le **estrazioni di radici** abbiamo le **funzioni irrazionali** .

Una funzione f è espressa analiticamente quando le immagini $f(x)$ si ottengono mediante almeno una delle seguenti operazioni : addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisioni , elevamento a potenza , estrazione di radice e di logaritmo , calcolo di funzioni goniometriche o di funzioni goniometriche inverse ,..

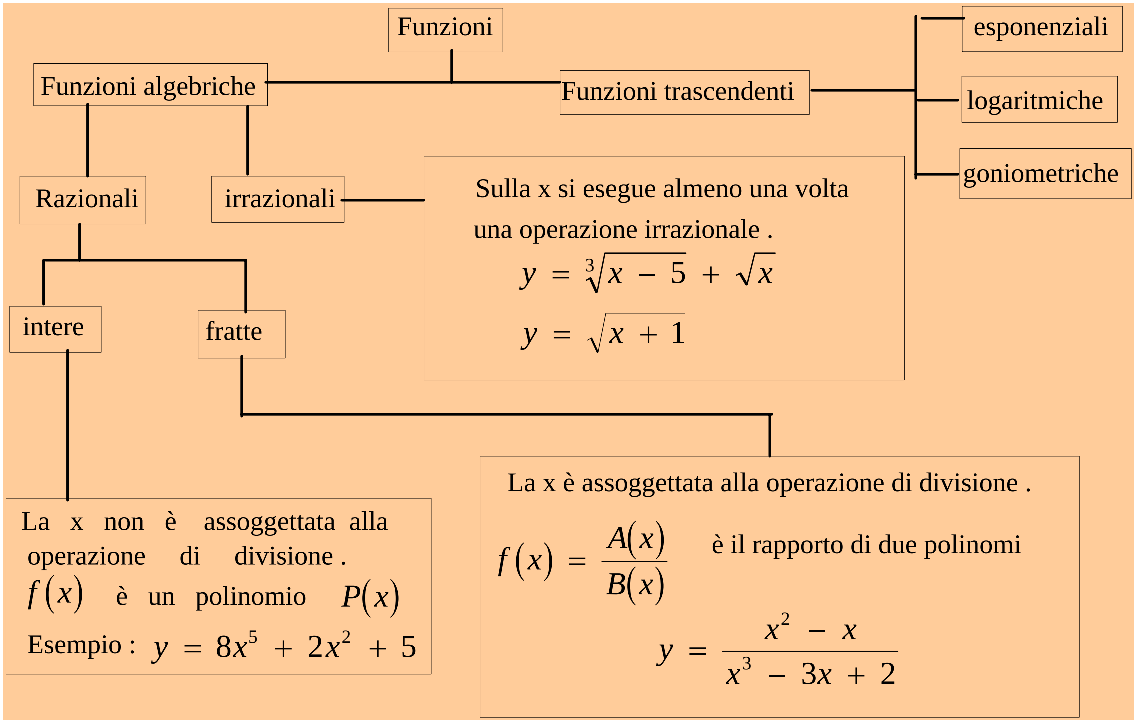
Una funzione esprimibile analiticamente e che non sia algebrica si dice **funzione trascendente** .

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ y = (x-1)(x^2+2) \end{array}\right\} \text{funzioni razionali intere}$$

$$y = \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x} \quad \textbf{funzione razionale fratta}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x + \sqrt{x^2 - 12} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{2x - 3x}}{2x+1} \end{array}\right\} \textbf{funzioni irrazionali}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 5^x \\ y = \ln(x^2+1) \end{array}\right\} \textbf{funzioni trascendenti}$$



Insieme di definizione e dominio di una funzione

Dicesi **insieme di definizione** (**I.D.**) di una funzione $f(x)$ l'intervallo o l'unione di intervalli in cui essa va studiata . Dicesi **dominio** o ***insieme di esistenza*** della funzione $f(x)$ il sottoinsieme dell'insieme di definizione nel quale la funzione $f(x)$ è reale e finita .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & se \quad x \le 50 \\ x^2 + 1 & se \quad x > 50 \end{cases} \qquad \textbf{I.D.} = \mathrm{R} \qquad \mathrm{dom}\, f = [0, +\infty[$$

Alcuni autori non fanno distinzione fra dominio di una funzione ed insieme di definizione . Per questi autori i due concetti coincidono .

Restrizione e prolungamento

Consideriamo la funzione $f : A \to B : x \in A \to f(x) = y \in B$ con **A insieme di partenza** e **B insieme di arrivo**. Sia A' un sottoinsieme di A ($A' \subset A$) . La funzione **g** che porta A' in B dicesi **restrizione** di f ad A' e si scrive : $g : A' \to B : x \in A' \to f(x) = y \in B$

In A' risulta : $g(x) = f(x)$.

Quindi effettuare una **restrizione** significa considerare una nuova funzione **g** che , pur essendo rimasta inalterata la legge di corrispondenza che fa passare dalla **x** alla sua immagine $f(x)$, differisce dalla f perchè ha un dominio diverso . .

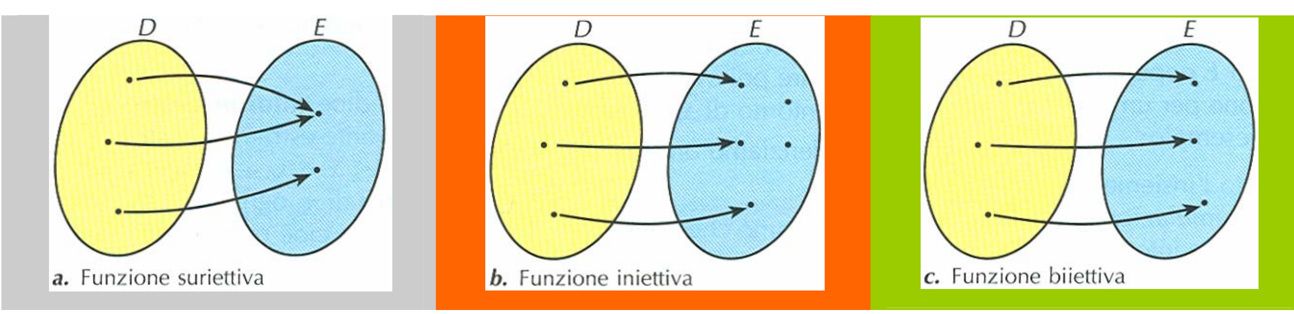
Consideriamo la funzione : $f : x \in R \to \sin x$ Una sua restrizione è la seguente :

$$g : x \in [0, \pi] \to \sin x$$

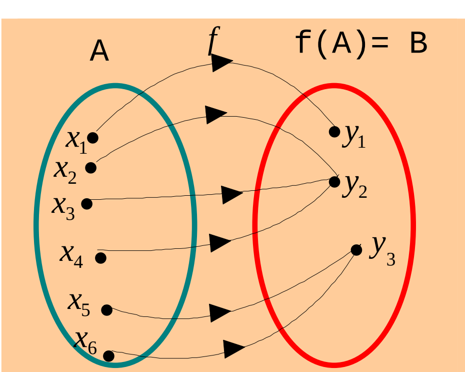
Se $A \subset A''$, la funzione **p** che porta A'' in B dicesi **prolungamento** di f su A'' e si scrive :

$p : A'' \to B : x \in A'' \to f(x) \in B$ In A'' risulta : $p(x) = f(x)$

Applicazione suriettiva , iniettiva , biiettiva

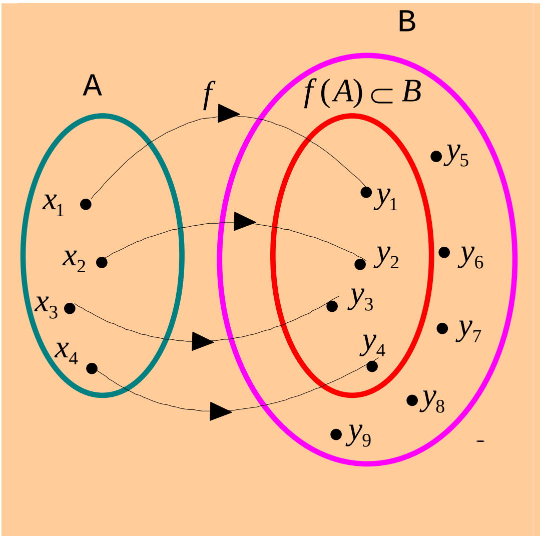


a. Funzione suriettiva b. Funzione iniettiva c. Funzione biiettiva



Una **funzione f di A in B** si dice **suriettiva** quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento $x \in A$.

In questo caso risulta : $f(A) = B$

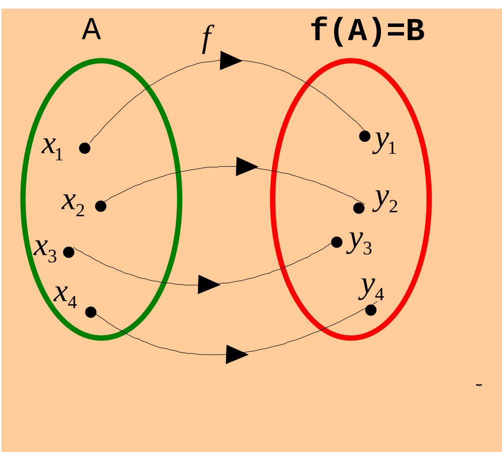


Una applicazione f di A in B si dice **iniettiva** quando a due qualsiasi elementi distinti di A corrispondono due elementi distinti di B e le **immagini** degli elementi di A non esauriscono gli elementi di B .

In questo caso risulta : $f(A) \subset B$ .Questo significa che :

$$\forall\ x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

cioè elementi distinti dell'insieme di partenza A hanno immagini distinte .



Una applicazione f che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva dicesi **biiettiva** .

Essa dicesi anche **corrispondenza biunivoca** tra gli insiemi A e B . In questo caso ogni elemento y dell'insieme B è l'immagine di un solo elemento x dell'insieme di partenza A , ed ogni elemento x è la **controimmagine** di un solo elemento y dell'insieme di arrivo B . In questo caso risulta $f(A) = B$.

Per la **funzione biiettiva** (o corrispondenza biunivoca) si adopera il seguente simbolo :

$$A \xleftrightarrow{f} B \qquad \text{oppure :} \qquad f : A \longleftrightarrow B$$

Una **funzione biietiva** di A in B è tale che ad ogni $x \in A$ corrisponde una sola $y \in B$ ed ogni $y \in B$ è immagine di una sola $x \in A$.

Estremi di una funzione ; funzioni limitate

Sia f una funzione numerica definita nell ' insieme **A** . Poichè il **codominio** di f è un insieme numerico ad esso possono riferirsi tutte le nozioni concernenti gli insiemi numerici introdotte nei paragrafi precedenti .

Tuttavia invece di dire che il codominio di f è *limitato superiormente* , il codominio di f è dotato di *massimo* , etc.. si preferisce dire , con linguaggio più conciso , che la funzione f è **limitata superiormente** , la funzione f è dotata di **massimo** e parlare di maggioranti della funzione f , di *estremo superiore* della funzione f ,...

Si dice che la funzione f è **limitatata superiormente** (***inferiormente***) se il suo codominio codom $f = f(A)$ è limitato **superiormente** (***inferiormente***) . La funzione f si dice **limitata** in A quando il suo codominio è limitato sia inferiormente che superiormente .

Se α è un **numero maggiorante** (**minorante**) dell ' insieme $f(A)$, si dice che α è **maggiorante** (**minorante**) della funzione f , e ciò significa che : $f(x) \leq \alpha$ $[\ f(x) \geq \alpha\ ]$ $\forall\ x \in A$.

L ' **estremo superiore** (***inferiore***) del codominio $f(A)$ si chiama l ' **estremo superiore** (**inferiore**) della funzione f e si indica con uno dei seguenti simboli :

$$\sup f \quad , \quad \sup_{x \in A} f \quad , \quad \sup f(A) \quad [\ \inf f \quad , \quad \inf f(A) \quad , \quad \inf_{x \in A} f(x)\ ]$$

Quando l'estremo superiore (inferiore) della funzione f è un valore da essa assunto , cioè quando esiste un punto x_o (x_1) di A tale che : $f(x_o) = \sup f$ $[\ f(x_1) = \inf f\ ]$

diciamo che la funzione f è dotata di **massimo** (di minimo) , e l'estremo superiore (inferiore) si chiama , più precisamente , il **massimo** (il minimo) della funzione f , e si indica con uno dei seguenti simboli : $\max f$, $\max\limits_{x \in A} f(x)$ $[\ \min f$, $\min\limits_{x \in A} f(x)$

Ogni punto nel quale la funzione assume il suo **massimo** (minimo) valore si chiama **punto di massimo** (di minimo) della funzione .

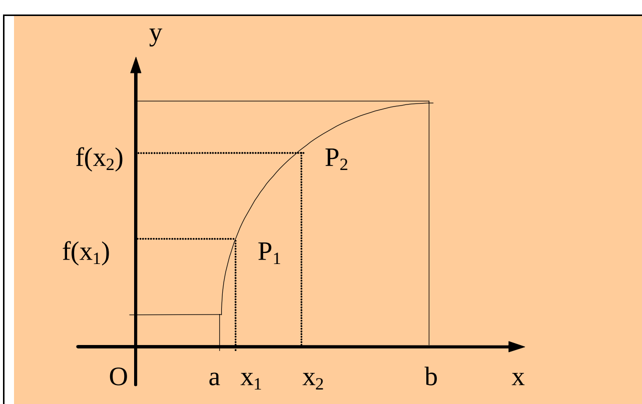
Se la funzione f non è limitata superiormente (inferiormente) essa è sprovvista di maggioranti (minoranti) e pertanto qualunque sia il numero reale α esiste almeno un punto $x_\alpha \in A$ (e quindi ne esistono infiniti) tale che : $f(x_\alpha) > \alpha$ $[\ f(x_\alpha) < \alpha\ ]$ e si conviene di attribuire alla funzione f l'estremo superiore $+\infty$ (l'estremo inferiore $-\infty$) e si scrive : $\sup f = +\infty$ $[\ \inf f = -\infty\ ]$.

Se la funzione f è **limitata** sia superiormente che inferiormente si dice semplicemente che f è **limitata** . La differenza (non negativa) $\omega(f) = \sup f - \inf f$ si chiama l ' **oscillazione** della funzione f . L ' oscillazione è finita se , e soltanto se , la funzione f è *limitata* . Se la funzione f non è limitata si dice che ha oscillazione $+\infty$. La funzione f ammette il **massimo assoluto** se essa è inferiormente limitata e se in A esiste un punto x_1 in cui risulta $f(x_1) = \inf f$. Si dice che f ammette in A il **massimo assoluto** se essa è superiormente limitata e se in A esiste almeno un punto x_o in cui risulta $f(x_o) = \sup f$. Il minimo assoluto **m** ed il massimo assoluto **M** , a volte , vengono indicati rispettivamente con : $m = \min f$ $M = \max f$

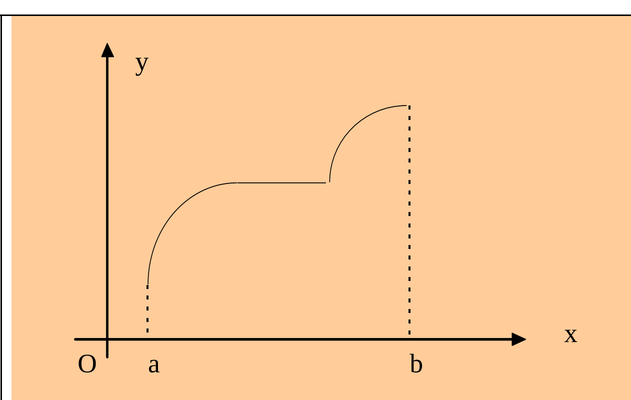
Funzioni monotone

Consideriamo la funzione $f: A \to B: x \in A \to f(x) \in B$ ed indichiamo con x_1 ed x_2 due punti qualsiasi dell ' intervallo [a,b] $\subseteq$ A . Una funzione $f(x)$ si dice :

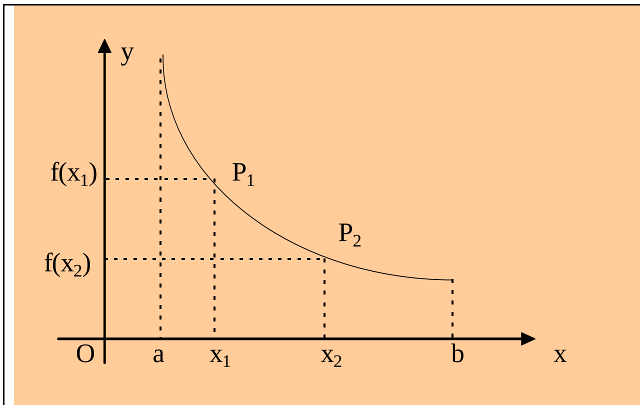
1) **strettamente crescente** nell ' intervallo [a,b] se : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
2) **semplicemente crescente** in [a,b] se : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
3) **strettamente decrescente** in [a,b] se : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
4) ***semplicemente decrescente*** in [a,b] se : $\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
5) **strettamente monotona** in [a,b] se è ivi strettamente crescente o strettamente decrescente
6) **semplicemente monotona** in [a,b] se è ivi semplicemente crescente o semplicemente decrescente
7) ***monotona*** in [a,b] se è ivi strettamente monotona o semplicemente monotona .



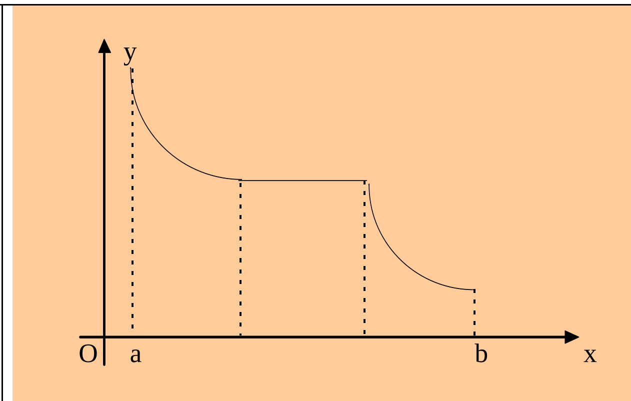
Funzione strettamente crescente



Funzione semplicemente crescente



Funzione strettamente decrescente



Funzione semplicemente decrescente

Le funzioni pari e dispari e la simmetria rispetto agli assi cartesiani

Una funzione $f : A \to B : x \in A \to f(x) = y \in B$ si dice **pari** se risulta :

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall\, x \in A$$

si dice **dispari** se risulta : $f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in A$.

Per **simmetrie evidenti** intendiamo le simmetriche rispetto agli assi cartesiani ed alla loro origine , le simmetrie rispetto alle bisettrici degli angoli formati dagli assi cartesiani e le simmetriche rispetto alle rette orizzontali ed alle rette verticali .

A volte è utile stabilire se il $G(f)$ è **simmetrico** rispetto ad una generica retta del piano o rispetto ad un generico punto del piano .

1) $f(-x) = f(x) \Rightarrow G(f)$ ***simmetrico rispetto all'asse delle ordinate*** .

$f(x)$ è una **funzione pari** .

In questo caso basta studiare la funzione nell'intervallo $[0,+\infty[$ ed estendere per simmetria i risultati ottenuti al resto del dominio .

2) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow G(f)$ ***simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani*** . $f(x)$ è una **funzione dispari** . Anche in questo caso basta studiare la funzione nell'intervallo $[0,+\infty[$ ed estendere per simmetria i risultati ottenuti al resto del dominio .