Unità Didattica N° 2
Le funzioni

Definizione di funzione univoca

Dati due insiemi non vuoti A e B (eventualmente coincidenti) definiamo **funzione univoca** di A verso B (o **mappa** o **applicazione** di A in B) una legge f ,di natura qualsivoglia , che ad ogni elemento $x \in A$ associa un solo elemento $y = f(x) \in B$.

In simboli abbiamo : $f : A \to B : x \in A \to f(x) = y \in B$ e leggiamo :

<< **f di A verso B che associa ad ogni elemento $x \in A$ un solo elemento** $f(x) = y \in B$ >>

oppure , più semplicemente , $f : x \to f(x)$ (f che porta x in $f(x)$)

$f : x \to y$ (f che porta x in y)

A è detto **insieme di partenza** B è detto **insiem e di arrivo**

L ' elemento $f(x) \in B$ si chiama <u>valore di x in f</u> o **immagine** di x tramite f o *corrispondente* di x in f .

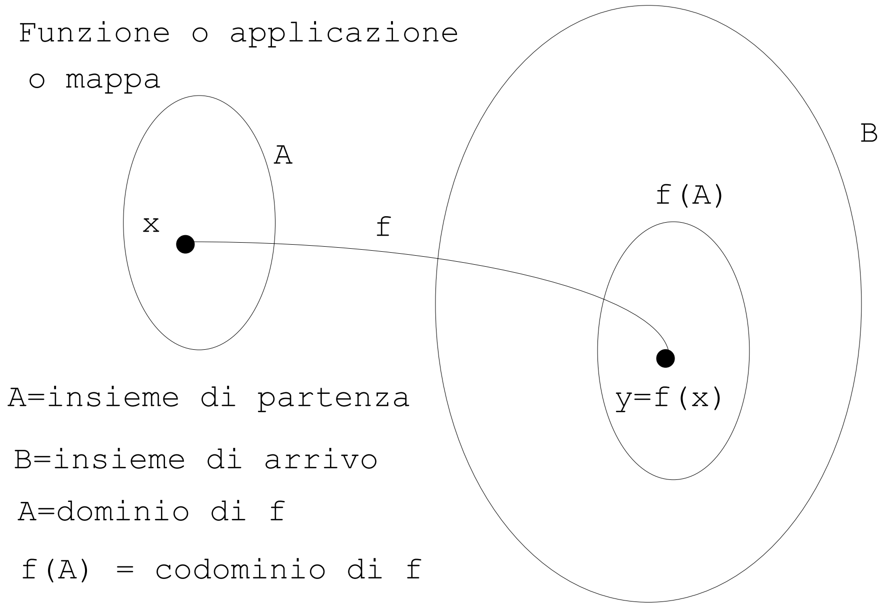
L'insieme A è detto **dominio** della funzione f o insieme di definizione o insieme di esistenza) e può essere indicato con uno dei seguenti simboli : dom f , D , D_f , C_e , E ,I

L'insieme delle immagini prende il nome di **codominio** della funzione f e può essere indicato con uno dei seguenti simboli : codom f , C_f , $f(A)$ In generale risulta : $f(A) \subseteq B$

L'insieme G formato dalle coppie ordinate $(x,y) = (x,f(x))$ tale che risulti:

$$G = \{(x,y) \in A \times B \wedge f : x \to f(x) \}$$

prende il nome di g r a f i c o della funzione f e si indica col seguente simbolo : $G(f) = G_f$.



Il generico elemento x dell'insieme A prende il nome di **variabile indipendente** della funzione f .

Il corrispondente valore $y = f(x) \in B$, che rappresenta l ' immagine di x tramite f , è detto anche **variabil e dipendente** .

Se A e B sono **insiemi numerici** , f è detta **funzione numerica** .

Se f è data mediante una formula ,allora il simbolo f rappresenta il complesso delle operazioni che bisogna eseguire sulla x per ottenere la corrispondente immagine $f(x) = y$.

In questo caso per dire che f è una funzione è tollerata la scrittura $y = f(x)$, che è concettualmente errata in quanto essa rappresenta l'equazione cartesiana del grafico della funzione f .

Dicesi **dominio** della funzione numerica $f : x \to f(x)$ l'insieme dei valori numerici che bisogna attribuire alla x perchè le corrispondenti immagini siano **reali** e **finite**

Le scritture f , $f(x)$, $y=f(x)$ rappresentano , rispettivamente , una **funzione** , l ' immagine dell'elemento x tramite f , l ' **equazione cartesiana** del grafico di f .

Per questo motivo si parla spesso ,anche se impropriamente , di funzione $f(x)$ o di funzione $y = f(x)$ al posto di funzione f .

Per le **funzioni numeriche** abbiamo detto che il simbolo f riassume il complesso delle operazioni da eseguire sulla variabile indipendente x per ottenere l ' immagine $f(x)$.

Le operazioni da eseguire sulla x possono essere **algebriche** o **trascendenti** .

Sono **operazioni algebriche** le operazioni razionali (addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisione) e le **operazioni irrazionali** (estrazione di radice) , sono **operazioni trascendenti** quelle non algebriche che introducono algoritmi più complessi.

Una funzione dicesi **algebrica** quando la variabile indipendente è assoggettata , almeno una volta , ad operazioni algebriche , in caso contrario dicesi **trascendente** .

Le funzioni trascendenti più semplici sono : 1) la **funzione esponenziale**
2) la **funzione logaritmo** 3) le **funzioni goniometriche**

$$\text{Funzioni}\begin{cases} \text{Algebriche} \begin{cases} \text{1) razionali intere} \\ \text{2) razionali fratte} \\ \text{3) irrazionali} \end{cases} \\ \text{Trascendenti} \begin{cases} \text{1) goniometriche} \\ \text{2) logaritmiche} \\ \text{3) esponenziali} \end{cases} \end{cases}$$

Le **funzioni algebriche** sono quelle funzioni per le quali le operazioni che agiscono sulla variabile indipendente sono : l'addizione , la sottrazione , la moltiplicazione , la divisione , l'elevamento a potenza , l'estrazione di radice .

Le funzioni algebriche prendono il nome di **funzioni razionali intere** se le operazioni da eseguire sulla variabile indipendente sono solo addizioni ,sottrazioni , moltiplicazioni ed elevamento a potenza .

Quando in aggiunta vi è anche l ' operazione di divisione si hanno le funzioni **razionali fratte** .
Se compaiono le estrazioni di radici abbiamo le **funzioni irrazionali** .

Una funzione f è espressa **analiticamente** quando le immagini f(x) si ottengono mediante almeno una delle seguenti operazioni : addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisioni , elevamento a potenza , estrazione di radice e di logaritmo , calcolo di funzioni goniometriche o di funzioni goniometriche inverse ,..

Una funzione esprimibile analiticamente e che non sia algebrica si dice **funzione trascendente** .

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ y &= (x - 1)(x^2 + 2) \end{aligned}\right\} \text{ funzioni razionali intere}$$

$$\left. y = \frac{x - 1}{x + 2} + \frac{1}{x} \right\} \text{ funzione razionale fratta}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= x + \sqrt{x^2 - 12} \\ y &= \frac{\sqrt[3]{2x} - 3x}{2x + 1} \end{aligned}\right\} \text{funzioni irrazionali}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 5^{x} \\ y &= \ln(x^2 + 1) \end{aligned}\right\} \text{ funzioni trascendenti}$$

Funzioni monotone

Consideriamo la funzione $f:A \to B: x \in A \to f(x) \in B$ ed indichiamo con x_1 ed x_2 due punti qualsiasi dell'intervallo [a,b] $\subseteq$ A . Una funzione f(x) si dice :

1) **strettamente crescente** nell'intervallo [a,b] se : $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; f(x_2) > f(x_1)$

2) **semplicemente crescente** in [a,b] se : $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; f(x_2) \geq f(x_1)$

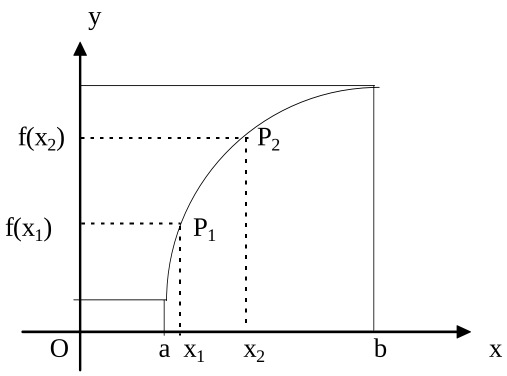
3) **strettamente decrescente** in [a,b] se : $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; f(x_2) < f(x_1)$

4) **semplicemente decrescente** in [a,b] se : $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; f(x_2) \leq f(x_1)$

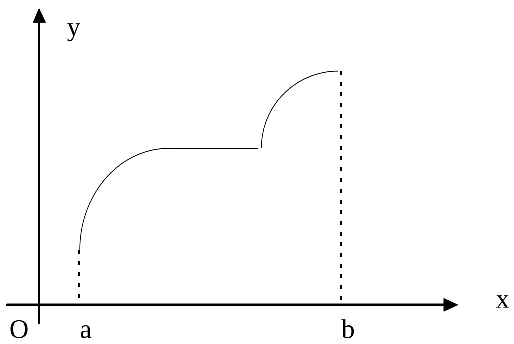
5) **strettamente monotona** in [a,b] se è ivi strettamente crescente o strettamente decrescente

6)**semplicemente monotona** in [a,b] se è ivi semplicemente crescente o semplicemente decrescente

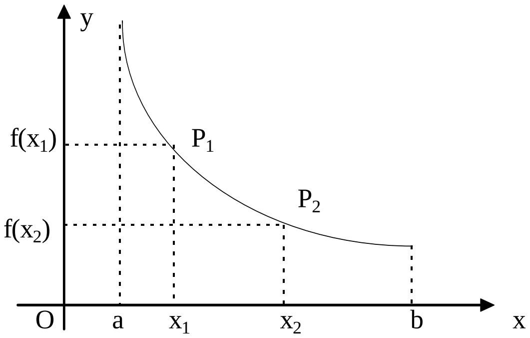
7) **monotona** in [a,b] se è ivi strettamente monotona o semplicemente monotona .



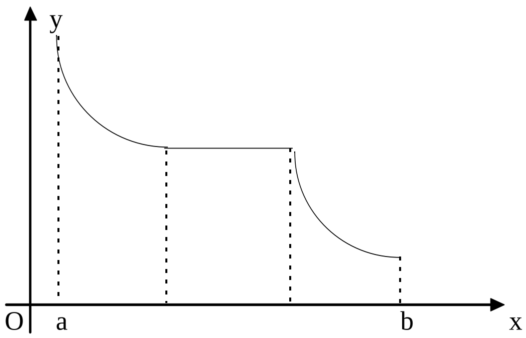
Funzione strettamente crescente



Funzione semplicemente crescente



funzione strettamente decrescente



Funzione semplicemente decrescente

Funzioni periodiche

Una **funzione** f(x) si dice **periodica** se esiste un numero positivo T tale che si abbia :

$$[A] \qquad f(x + T) = f(x) \quad \forall\, x \in \text{dom}\, f$$

Se T è un valore per cui la [A] è verificata , essa è vera anche per il valore $k \cdot T$ con k = ± 1 , ± 2 , ± 3 ,....

Si chiama **periodo principale** o , semplicemente **periodo** , della funzione f(x) il più piccolo dei numeri T per cui la relazione [A] è verificata , cioè il periodo della funzione f(x) è il più piccolo numero T per il quale risulta : :

$$\boxed{f(x + kT) = f(x) \qquad \text{con } k \in Z}$$

Il periodo di una funzione periodica dipende dalla sua espressione analitica .

Una funzione di periodo T può essere studiata in un opportuno intervallo di ampiezza T , ad esempio in uno dei seguenti intervalli : ...[-2T,-T] , [-T,0], [0,T],[T,2T].....

Si può dimostrare che :

■ Se la funzione f(x) è periodica ed ha come periodo principale il numero T allora la funzione $f(nx + m)$ ha periodo principale $\frac{T}{n}$.

■ Se la funzione f(x) è periodica ed ha come periodo principale il numero T allora la funzione $f\left(\frac{x}{n} + m\right)$ ha periodo principale nT .

■le funzioni $y = a \cdot \cos(nx + m)$ ed $y = b \cdot sin(nx + m)$ hanno periodo $T = \frac{2\pi}{n}$.

■ le funzioni $y = a \cdot \cos\left(\frac{x}{n} + m\right)$ ed $y = b \cdot sin\left(\frac{x}{n} + m\right)$ hanno periodo T = 2πn .

■ se T_1 e T_2 sono rispettivamente i periodi delle funzioni $f(x)$ e g(x) allora il periodo T della funzione $f(x) \pm g(x)$ coincide col minimo comune multiplo di T_1 e T_2 , cioè : $T = m.c.m(T_1, T_2)$

■ se f(x) e g(x) sono due funzioni aventi uguale periodo T_1 , allora il periodo **T** della funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è $\dfrac{T_1}{2}$

■ se f(x) e g(x) sono due funzioni aventi periodi T_1 , T_2 diversi fra loro , allora il periodo T della funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è : $T = m.c.m(T_1, T_2)$

■ le funzioni $\cos^{2n} x$, $sin^{2n} x$ hanno periodi T = π , mentre le funzioni

$$\cos^{2n+1} x \ , \ sin^{2n+1} x \quad \text{hanno periodo } 2\pi$$

■ le funzioni $tg^n x$, $\cot g^n x$ hanno periodo T = π

Funzioni inverse

■ Le **funzioni inverse** possono essere definite solo se la corrispondenza tra gli elementi del dominio e del codominio è una **corrispondenza biunivoca** .

La funzione inversa di f(x) si indica col simbolo $f^{-1}(x)$.

DEFINIZIONE

Si chiama **funzione inversa** di una funzione biiettiva f , e la si indica col simbolo f^{-1} , la corrispondenza che ad ogni elemento f(x) del codominio di f fa corrispondere la sua (unica) **controimmagine** :

$$\boxed{f^{-1} : y \rightarrow x \quad \text{oppure} \quad f^{-1} : f(x) \rightarrow x}$$

con $x = f^{-1}(y) = g(y)$

E' possibile avere l'espressione analitica della funzione inversa quando l ' equazione y=f(x) è risolubile rispetto ad x , cioè quando attraverso operazioni algebriche o trascendenti possiamo ottenere la seguente equazione : $x = g(y)$, dom f^{-1} = codom f codom f^{-1} = dom f

■ una **funzione strettamente monotona** in un intervallo [a,b] , essendo una corrispondenza biunivoca , è **invertibile** in tale intervallo .

■ Se la funzione f <u>non è strettamente monotona</u> in [a,b] , esistono sempre intervalli parziali [c,d] contenuti in [a,b] dove f è strettamente monotona e quindi invertibile .

In questo caso si dice che la funzione f è **localment e invertibile** nell ’ intervallo [c,d] .

■ Le due seguenti funzioni , una inversa dell’altra , hanno lo stesso grafico :

$$y = f(x) \quad , \quad x = f^{-1}(y) = g(y)$$

■ I grafici delle due seguenti funzioni , una inversa dell’altra , $y = f(x)$ ed $y = f^{-1}(x)$ sono curve simmetriche rispetto alla bisettrice fondamentale (y = x) degli assi cartesiani .

■ la funzione x = siny è strettamente crescente nell’intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi è ivi localmente invertibile . La funzione inversa di x = siny è indicata col simbolo y = arcsin x .

$$\text{dom sin } y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{codom sin } y = [-1,1]$$

$$\text{dom arcsin } x = [-1,1] \qquad \text{codom arcsin } x = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

■ la funzione x = cosy è strettamente decrescente nell’intervallo $[0, \pi]$ e quindi è ivi localmente invertibile .

La funzione inversa di x = cosy è indicata col simbolo y = arccos x .

$$\text{dom cos } y = [0, \pi] \qquad \text{codom cos } y = [-1,1]$$

$$\text{dom arccos } x = [-1,1] \qquad \text{codom arccos } x = [0, \pi]$$

■ la funzione x = tgy è strettamente crescente nell’intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e quindi è ivi localmente invertibile .

La funzione inversa di x = tg y è indicata col simbolo y = arctg x .

$$\text{dom tg } y = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{codom tg } y = \left]-\infty, +\infty\right[$$

$$\text{dom arctg } x = \left]-\infty, +\infty\right[\qquad \text{codom arctg } x = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

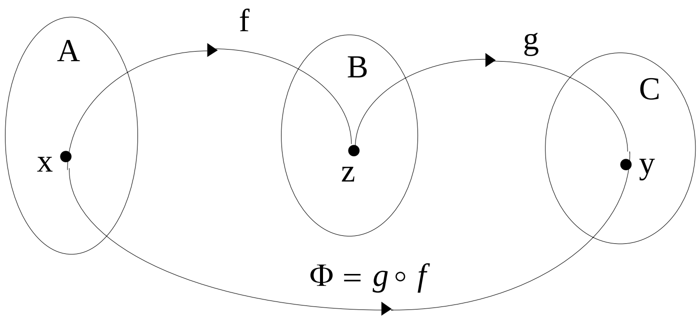
■ la funzione x = cotgy è strettamente decrescente nell’intervallo $]0,\pi[$ e quindi è ivi localmente invertibile .

La funzione inversa di x = cotgy è indicata col simbolo y = arccotg x .

$$\text{dom cotg } y =]0,\pi[\qquad \text{codom sin } y =]-\infty, \infty[$$

$$\text{dom arccotg } x =]-\infty, \infty[\qquad \text{codom arccotg } x =]0,\pi[$$

Funzione di funzione



■ Sia f una funzione univoca di A in B [$f : x \rightarrow z$, $z = f(x)$] e g una funzione univoca di B in C [$g : z \rightarrow y$, $y = g(z)$] .

Il risultato finale è che ad ogni $x \in A$ corrisponde una sola $y \in C$.

Resta cosi definita una **funzione univoca** Φ di A in C [$\Phi : x \rightarrow y$] detta <u>funzione composta</u> o **funzione di funzione**

Si scrive $\Phi = g \circ f$ e si legge << f composto g >> . Con abuso di scrittura possiamo anche scrivere: $y = g(z)$, $z = f(x)$, $y = g[f(x)] = \Phi(x)$

■ Una funzione f si dice pari se risulta : $f(-x) = f(x) \ \forall x \in \text{dom } f$

Il grafico di una funzione pari è **simmetrico rispetto all'asse delle y** .

■ Una funzione f si dice dispari se risulta : $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \text{dom } f$

Il grafico di una funzione pari è **simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani** . .

■ $f(2a - x) = f(x) \Rightarrow G(x)$ simmetrico rispetto alla retta di equazione $\mathbf{x = a}$.

Dominio delle funzioni analitiche

1) Le **funzioni razionali intere** hanno come dominio l'insieme R

2) Le **funzioni razionali fratte** hanno come dominio l'insieme R meno l'insieme formato dagli zeri del denominatore

3) Le **funzioni irrazionali** contenenti radicali aventi indice pari hanno come dominio l'insieme dei numeri reali che rendono non negativi i radicandi . Tale insieme è un intervallo o una unione di intervalli che si ottengono risolvendo il sistema che si ottiene imponendo che ogni radicando sia ≥ 0

Le funzioni irrazionali contenenti radicali aventi indice dispari hanno come domino l'insieme R .

4) Le **funzioni logaritmiche** hanno come dominio l'insieme dei numeri reali che rendono positivi gli argomenti dei logaritmi

Tale insieme è un intervallo o una unione di intervalli che si ottengono risolvendo il sistema che si ottiene imponendo che ogni argomento sia > 0 .

5) Le **funzioni esponenziali** del tipo $y = a^x$ hanno come dominio l'insieme R .

6)Le funzioni y = arcsin f(x) y = arc cos f(x) hanno come dominio le soluzioni del sistema :

$$-1 \leq f(x) \leq +1$$

7) dom sin x = dom cos x = R 8) dom tg x = R - $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ 9) dom cotg x = R - $\left\{ k\pi \right\}$

10) Per le funzioni che risultano dalla composizione delle precedenti funzioni elementari , il dominio si determina tenendo conto di tutte le condizioni sopra esaminate .

Sintesi del concetto di funzione univoca

■ Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di R .

Si chiama **funzione reale di una variabile reale** qualunque legge che fa corrispondere ad ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \in B$

Si usa uno dei seguenti simboli : $f : A \to B$, $x \to f(x)$, $x \to y = f(x)$, $y = f(x)$

■ Si dice **dominio** della funzione f l ' insieme A dei valori della variabile x che hanno come immagine un numero reale e finito

■ L'insieme delle immagini f(x) si chiama **codominio** della funzione e si indica cosi :

$$\mathrm{cod\,om\,f} = f(A)$$

■ Si chiama **grafico** della funzione f , e si indica col simbolo G(f) , l'insieme di tutte le coppie ordinate [x,f(x)] con $x \in$ dom f ed $f(x) \in$ codom f .

■ Una **funzione si dice di tipo analitico** o <u>rappresentabile analiticamente</u> se la relazione di dipendenza che lega il valore della y a quello della x è rappresentata da una successione di operazioni da eseguirsi sulla variabile x .

Si dice allora che il **grafico della funzione f è una curva piana avente equazione y = f(x)**

x è detta **variabile indipendente** , y è detta **variabile dipendente** .