Unità Didattica N°23

La definizione di limite

1) **Variabile che tende ad un numero, variabile infinitesima**

2) **Definizione di limite finito per una funzione in un punto** $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$

3) **Limite destro e limite sinistro**

4) **Variabile infinitamente grande**

5) **Definizione di limite infinito per una funzione in un punto** $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$

6) **Un limite fondamentale:** $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

7) **Definizione di limite finito per una funzione all'infinito:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$

8) **Un altro limite fondamentale:** $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

9) **Definizione di limite infinito per una funzione all'infinito:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Variabile che tende ad un numero, variabile infinitesima

Quando la variabile x tende al numero x_o scriviamo $x \to x_o$. Adesso vogliamo precisare il significato matematico di questa scrittura. Diciamo che **la variabile x tende al numero** x_o e scriviamo $x \to x_o$ quando scelto un numero positivo ε in maniera arbitraria e come tale piccolo a piacere, risulta: $|x - x_o| < \varepsilon$ cioè $x_o - \varepsilon < x < x_o + \varepsilon$. In simboli abbiamo:

$$x \to x_o \Leftrightarrow |x - x_o| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x_o - \varepsilon < x < x_o + \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

Se $x_o = 0$, allora diciamo che la variabile x è **infinitesima** o che tende al valore zero. Questo significa che ,scelto in maniera arbitraria un numero positivo ε, deve risultare: $|x| < \varepsilon$ Pertanto, dire che x è una **variabile infinitesima** significa affermare che essa, in valore assoluto, può assumere valori minori di un numero positivo scelto piccolo a piacere.

Una **variabile infinitesima** si dice che tende a zero e si scrive: $x \to 0$

$$x \to 0 \Leftrightarrow |x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Definizione di limite finito per una funzione in un punto

Sia f una funzione definita nell'intervallo [a,b], escluso al più in un suo punto di accumulazione x_o. Col simbolo $I - \{x_o\}$ indichiamo l'insieme differenza che si ottiene togliendo dall'insieme I il suo elemento x_o.

Definizione: Si dice che la funzione f(x) tende (o converge) al numero ℓ per $x \to x_o$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

se, scelto un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un intorno completo $I(x_o)$ del punto x_o, tale che si abbia:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_o) : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

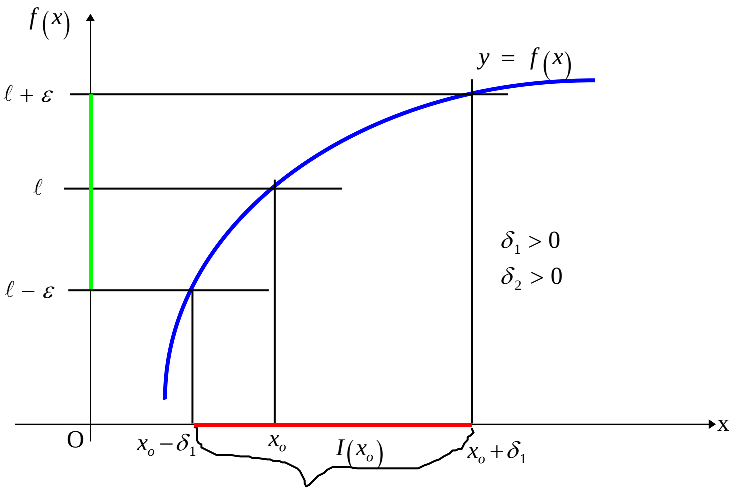
$I(x_o) =]x_o - \delta_1 ; x_o + \delta_2[$ con $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$

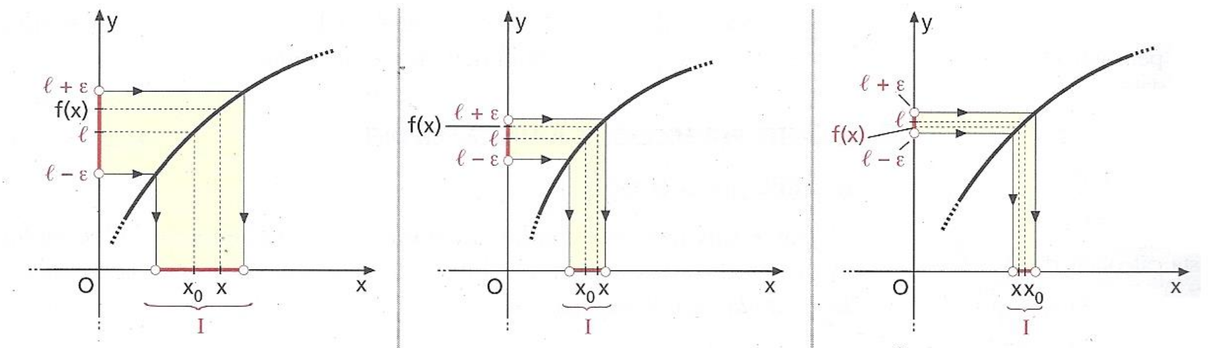
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$I(x_o) \text{ ——— } \forall\, x \in I(x_o) - \{x_o\} \text{ ——— } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

L'esistenza del limite della funzione $f(x)$ quando $x \to x_o$ è illustrata graficamente dalla seguente figura.





a. Fissiamo ε > 0. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che f(x) ∈]ℓ − ε; ℓ + ε[per ogni $x \in I$.

b. Se riduciamo ε, potremmo essere costretti a scegliere un intorno di x_0 più piccolo.

c. Più piccolo scegliamo ε, più piccolo diventa, in genere, l'intorno I.

Per verificare che $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$ si procede come segue:

1) Si sceglie un numero ε positivo ed arbitrario **2)** Si risolve l'inequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$

3) Se , tra le soluzioni dell'inequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ esiste un intorno completo $I(x_o)$ del punto x_o, allora il limite è verificato, in caso contrario il limite non è verificato e la scrittura $\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$ è falsa.

Verificare che: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=3$

$\forall\varepsilon>0$ $\quad\left|\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}-3\right|<\varepsilon$ $\quad\left|\dfrac{(x-2)(x^2-1)}{(x-2)}-3\right|<\varepsilon$ $\quad|x^2-4|<\varepsilon$

$-\varepsilon<x^2-4<\varepsilon$, $\quad 4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon$, $\quad\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon}$ $\qquad I(2)=\left]\sqrt{4-\varepsilon},\sqrt{4+\varepsilon}\right[$

Conclusione: $\forall\varepsilon>0$ $\quad\left|\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}-3\right|<\varepsilon$ $\quad\forall x\in I(2)-\{2\}$ $\quad\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=3$

Osservazione

• In generale, al diminuire di ε diminuisce l'ampiezza ρ dell'intervallo $I(2)$.

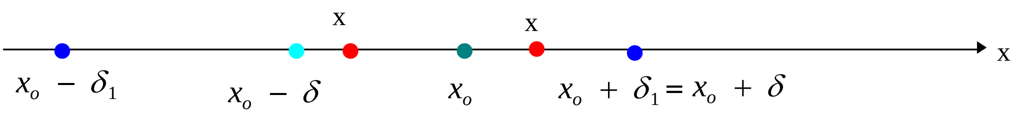
$$\rho=(x_o+\delta_2)-(x_o-\delta_1)=\delta_1+\delta_2$$

con δ_1 e δ_2 (e quindi δ e ρ) funzioni di ε. In generale risulta: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\rho=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\delta_1+\delta_2)=0$

• Nella definizione di limite non è restrittivo sostituire l'intorno completo $I(x_o)$ con un **intorno simmetrico** (o **circolare**) del punto x_o.

Infatti l'intorno $I(x_o)=]x_o-\delta_1;x_o+\delta_2[$ può essere sostituito con l'**intorno circolare** $I(x_o,\delta)=]x_o-\delta;x_o+\delta[$ dove δ è il **più piccolo** dei due numeri positivi δ_1, δ_2.

$$\lim_{x\to x_o}f(x)=\ell\iff\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:|f(x)-\ell|<\varepsilon\quad\forall\ 0<|x-x_o|<\delta\ et\ x\neq x_o$$



$$0<|x-x_o|<\delta\iff x\in\left]x_o-\delta,x_o+\delta\right[$$

• La funzione $f(x)$ può non essere definita nel punto x_o ed esistere il $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=\ell$, come può esistere $f(x_o)$ ed essere uguale o diverso da ℓ. Di conseguenza il punto $P(x_o,\ell)$ può appartenere oppure non appartenere al grafico della funzione $f(x)$ in quanto abbiamo detto che $f(x_o)$ può non esistere e nel caso che esista può essere diverso da ℓ.

• Se risulta << $\ell=0$ >> , la funzione $f(x)$ è **infinitesima** nel punto x_o (o per $x\to x_o$).

In questo caso scriviamo: $\underset{x\to x_o}{Lim}\, f(x) = 0$ e diciamo che la funzione $f(x)$ tende a zero per x che tende ad x_o se, scelto un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un intorno completo del punto x_o tale che si abbia:

$$|f(x)| < \varepsilon \quad [\ cioè\ -\varepsilon < f(x) < \varepsilon\ ] \quad \forall\ x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

Limite destro e limite sinistro

Consideriamo la funzione $f(x) = 4x + 3\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 4x - 3 & se \quad x < 0 \\ 4x + 3 & se \quad x > 0 \end{cases}$, definita $\forall x \neq 0$.

Studiamo il suo comportamento in un intorno completo del punto zero. Osservando il grafico della funzione si può facilmente constatare che quando la x tende a zero dalla sinistra ($x\to 0-$) essa tende al numero -3, mentre per x che tende a zero dalla destra ($x\to 0+$) essa tende al numero $+3$.

Cominciamo col verificare che $\lim_{x\to 0-}\left(4x + 3\frac{|x|}{x}\right) = -$ cioè che $\lim_{x\to 0-}(4x-3) = -3$ con $x \in]-\infty, 0[$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad |4x - 3 + 3| < \varepsilon \ , \ |4x| < \varepsilon \ , \ -\frac{\varepsilon}{4} < x < 0$ (**intorno sinistro del punto zero**).

In questo caso diciamo che -3 è il **limite sinistro** della funzione proposta per $x\to 0-$ e scriviamo:

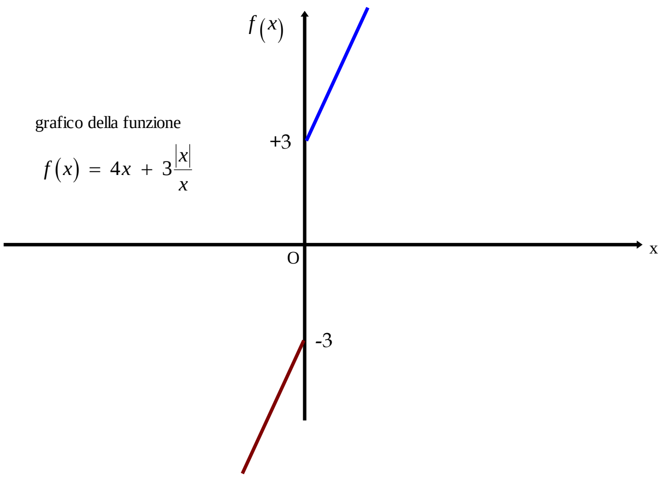
$$\underset{x\to 0-}{Lim}\left(4x + 3\frac{|x|}{x}\right) = -3$$

Poi verifichiamo che: $\underset{x\to 0+}{Lim}\left(4x + 3\frac{|x|}{x}\right) = +3 \quad \underset{x\to 0-}{Lim}(4x + 3) = +3$ Risulta:

$\forall \varepsilon > 0 \quad |4x + 3 - 3| < \varepsilon \ , \ |4x| < \varepsilon \ , \ 0 < x < \frac{\varepsilon}{4}$ (**intorno destro del punto zero**)

In questo caso diciamo che -3 è il **limite destro** della funzione proposta per $x\to 0+$ e scriviamo: $\underset{x\to 0-}{Lim}\left(4x + 3\frac{|x|}{x}\right) = +3$

Poiché, scelto ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$, non esistono un intorno completo $I(0) =]\delta_1, \delta_2[$ del punto zero ed un numero ℓ tale che si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I(0) - \{0\}$, diciamo che non esiste il limite della funzione data per $x\to 0$, mentre esistono e sono diversi fra loro, il **limite sinistro** ed il **limite destro**.



Risultano pertanto giustificate le seguenti **definizioni**:

• ℓ_s è il **limite sinistro** della funzione $f(x)$ per $x \to x_o -$ (oppure ℓ_s è il limite di $f(x)$ quando la x tende ad x_o dalla sinistra) e scriviamo $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x) = \ell_s$ quando, scelto un numero ε positivo ed arbitrario, è possibile determinare in corrispondenza un intorno sinistro $I(x_o -) =]x_o - \delta_1, x_o[$ del punto x_o tale che si abbia: $|f(x) - \ell_s| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o -)$

In simboli abbiamo: $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x) = \ell_s \iff \forall \varepsilon > 0, \exists I(x_o -) : |f(x) - \ell_s| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o -)$

• ℓ_d è il **limite destro** della funzione $f(x)$ per $x \to x_o +$ (oppure ℓ_d è il limite di $f(x)$ quando la x tende ad x_o dalla destra) e scriviamo $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x) = \ell_d$ quando, scelto un numero ε positivo ed arbitrario, è possibile determinare in corrispondenza un intorno destro $I(x_o +) =]x_o, x_o + \delta_2[$ del punto x_o tale che si abbia: $|f(x) - \ell_d| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o +)$

In simboli abbiamo: $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x) = \ell_s \iff \forall \varepsilon > 0, \exists I(x_o +) : |f(x) - \ell_d| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o +)$

Osservazione

• La funzione $f(x)$ **ammette limite** per $x \to x_o$ quando e soltanto quando esistono finiti i limiti destro e sinistro e questi limiti sono uguali fra loro , cioè quando risulta: $\ell_s = \ell_d = \ell$

In caso contrario si dice che la funzione $f(x)$ **non ammette limite** nel punto x_o .

Ricordiamo inoltre che può esistere soltanto ℓ_s , o soltanto ℓ_d o entrambi ed essere $\ell_s \neq \ell_d$.

• Per indicare un limite sinistro o un limite destro possiamo usare uno dei seguenti simboli :

$$\ell_s \ , \ f(x_o -) \qquad , \qquad \ell_d \ , \ f(x_o +) \qquad f_+(x_o)$$

• Una funzione che ammette limite nel punto x_o si dice **regolare** nel punto x_o.

Variabile infinitamente grande

Si dice che la variabile x tende a **più infinito** e si scrive $x \to +\infty$ quando, scelto un numero k positivo ed arbitrario (e come tale grande a piacere) risulta $x > k$, mentre se risulta $x < -k$ allora la variabile x tende a **meno infinito** e si scrive $x \to -\infty$.

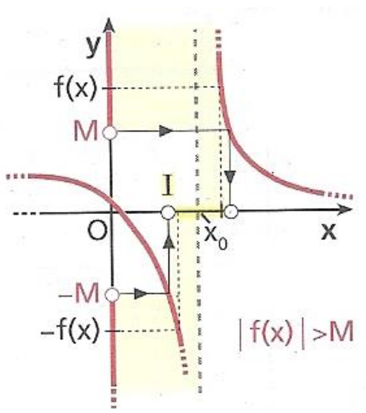
In generale diciamo che una variabile x è ***infinitamente grande*** o che **tende ad infinito** e scriviamo $x \to \infty$ se, scelto ad arbitrio un numero positivo k, risulta $|x| > k$. In simboli abbiamo:

$$x \to +\infty \iff x > k \quad \forall k \in R^+ \quad , \quad x \to -\infty \iff x < -k \quad \forall k \in R^+ \quad , \quad x \to \infty \iff |x| > k \quad \forall k \in R^+$$

Definizione di limite infinito per una funzione in un punto

Si dice che la funzione $f(\mathrm{x})$ **tende ad infinito** (o **diverge**) per x che tende a x_o e si scrive $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$ quando, scelto un numero K positivo ed arbitrario (e come tale grande a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un intorno completo $I(x_o)$ del punto x_o tale che si abbia:

$$|f(x)| > k \qquad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$



In forma compatta abbiamo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty \iff \forall K \in R^+, \exists I(x_o) : |f(x)| > K \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

Sono evidenti le seguenti definizioni di limite scritte in forma compatta:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \iff \forall K \in R^+, \exists I(x_o) : f(x) > K \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty \iff \forall K \in R^+, \exists I(x_o) : f(x) < -K \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$$

$$\forall K \in R^+$$

$$I(x_o) = \left]x_o - \delta_1, x_o + \delta_2\right[$$

$$|f(x)| > K \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

Per verificare che $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$ si procede come segue:

1) Si sceglie un numero positivo ed arbitrario K **2)** Si risolve l'inequazione $|f(x)| > K$

3) Se la suddetta inequazione ammette come soluzione un intorno completo del punto x_o il limite è verificato, in caso contrario il limite non è verificato

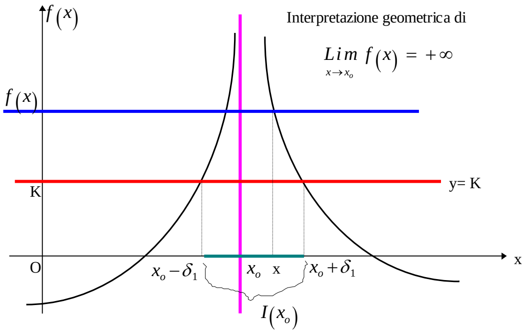
Verificare che $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

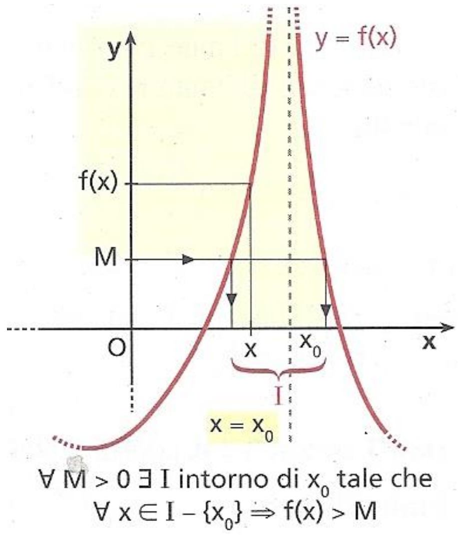
$$\forall K > 0 \quad , \quad \frac{1}{(1-x)^2} > K \quad \Rightarrow \quad (1-x)^2 < \frac{1}{K} = \delta \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\delta} < 1 - x < \sqrt{\delta} \quad \Rightarrow$$

$$1 - \sqrt{\delta} < x < 1 + \sqrt{\delta} \qquad I(1) = \left]1 - \sqrt{\delta}, 1 + \sqrt{\delta}\right[$$

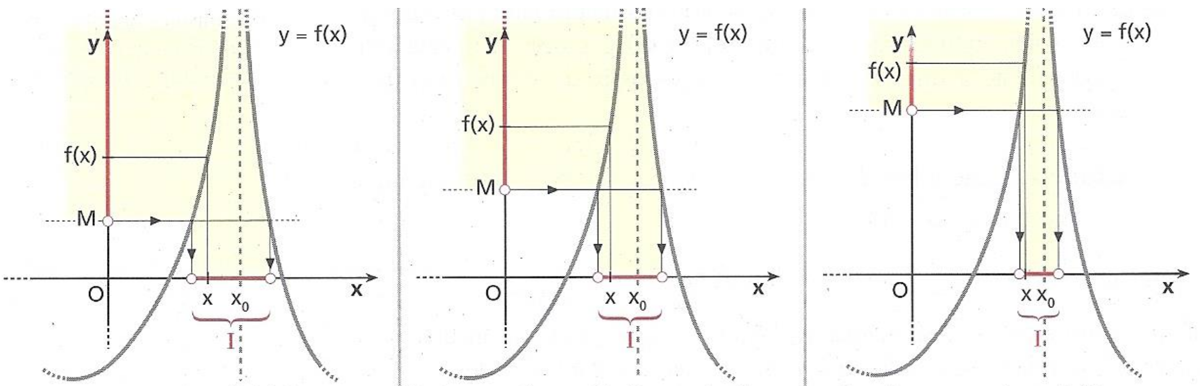
Conclusione :

$$\forall K > 0 \quad \frac{1}{(1-x)^2} > K \quad \forall x \in I(1) - \{1\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$





Se risulta

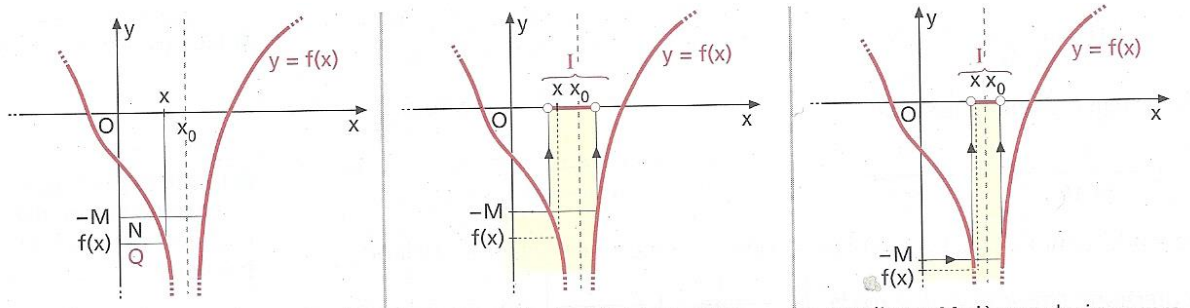


a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) > M$ $\forall x \in I - \{x_0\}$.

b. Se prendiamo M più grande, I esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

c. Scegliamo un valore di M ancora più grande. Se I è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ supera M.

Se risulta $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ diciamo che la funzione **diverge positivamente** nel punto x_o, se risulta $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty$ diciamo che la funzione **diverge negativamente** nel punto x_o.



a. Scelto M positivo grande a piacere, consideriamo $N(0; -M)$ e $Q(0; f(x))$. Se $f(x) < -M$ significa che il punto Q ha ordinata minore del punto N, cioè Q si trova "più in basso" di N.

b. Per quel fissato M, individuiamo un intorno I di x_0 tale che $\forall x \in I - \{x_0\}$ $f(x) < -M$, cioè $f(x) \in I(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -M\}$.

c. Scegliamo M più grande: in genere, perché sia verificata la condizione $f(x) < -M$, dovremo prendere un intorno I più piccolo del precedente.

Un limite fondamentale: $\quad Lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

Scelto ad arbitrio il numero positivo K, risolvo l'inequazione $\left|\dfrac{1}{x}\right| > K$, $|x| < \dfrac{1}{K} = \delta$ per $-\delta < x < \delta$ (**intorno completo del punto zero**) $I(0) = \left]-\delta, \delta\right[$ con $\delta \in R^+$. Quindi:

$$\forall K > 0 \ , \quad \left|\frac{1}{x}\right| > K \qquad \forall x \in I(0) - \{0\} \qquad \Rightarrow \qquad Lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Definizione di limite finito per una funzione all'infinito

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero ℓ per x che tende all'infinito e si scrive $Lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ quando, fissato un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere), è possibile determinare in corrispondenza un intorno di infinito $I(\infty)$ tale che si abbia

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \forall x \in I(\infty)$$

Dire intorno di ∞ o dire $\forall |x| > h \in R^+$ è la stessa cosa.

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \ , \ \forall |x| > h \ \Leftrightarrow \ x < -h \ \wedge \ x > +h$$

Se risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x < -h$ diciamo che esiste il $Lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_s$ che rappresenta il **limite sinistro**.

Se risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > h$ diciamo che esiste il $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_d$ che rappresenta il **limite destro**.

Quando esistono e sono uguali tra loro i limiti ℓ_s e ℓ_d si dice che esiste il limite ℓ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0, \exists h>0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall |x| > h$$

$\forall\varepsilon>0$

$h > 0$ —— $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall |x| > h$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0, \exists h>0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > h$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0, \exists h>0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x < -h$$

Per verificare che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ si opera come segue :

1) Si sceglie un numero ε positivo ed arbitrario

2) Si risolve l'inequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$

3) Se la suddetta inequazione ammette come soluzione un intorno di infinito, cioè $|x| > h \in R^+$, il limite è verificato, altrimenti non è verificato.

Verificare che: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \left|\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - 1\right| < \varepsilon \;,\; \left|\frac{1}{x^2 + 1}\right| < \varepsilon \;,\; \frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon \;,\; x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \;,\; x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Pongo: $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \dfrac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} = h^2 \quad x^2 - h^2 > 0$ per $x < -h \quad x > h$ cioè per $|x| > h$

$h = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$ è un numero reale positivo se $\varepsilon < 1$, cosa lecita in quanto ε è un numero positivo piccolo a piacere .

Conclusione:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \left|\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - 1\right| < \varepsilon \quad |x| > h \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1$$

Verificare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 1}{x} = 1$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \left|\frac{x+1}{x}-1\right| < \varepsilon \ , \ \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \ , \ |x| > \frac{1}{\varepsilon} = h > 0$$

Conclusione

$$\forall \varepsilon>0 \quad \left|\frac{x+1}{x}-1\right| < \varepsilon \quad \forall |x| > h \ \Rightarrow \ \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Un altro limite fondamentale: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \ , \ |x| > \frac{1}{\varepsilon} = h > 0$$

Quindi :

$$\forall \varepsilon>0 \ , \ \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad |x| > h \ \Rightarrow \ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Definizione di limite infinito per una funzione all'infinito

Si dice che la funzione $f(x)$ tende ad infinito per x che tende ad infinito e si scrive $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ quando , fissato un numero M positivo ed arbitrario (e come tale grande a piacere), è possibile determinare in corrispondenza un intorno di infinito tale che si abbia :

$$|f(x)| > M \quad \forall |x| > h \quad [\text{cioè } \forall x \in I(\infty)]$$

In sintesi possiamo scrivere :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ \Leftrightarrow \ \forall M > 0 \ \ \exists h>0 \ : \ |f(x)| > M \quad \forall |x| > h$$

$\forall M > 0$

h>0 ———— $|f(x)| > M \quad \forall |x| > h$

Casi particolari

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow \ \forall M > 0 \ \exists h>0 \ : \ f(x) > M \quad \forall x > h$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow \ \forall M > 0 \ \exists h>0 \ : \ f(x) < -M \quad \forall x < -h$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow \ \forall M > 0 \ \exists h>0 \ : \ f(x) > M \quad \forall x < -h$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow \ \forall M > 0 \ \exists h>0 \ : \ f(x) < -M \quad \forall x > h$$

Per verificare che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si procede come segue :

1) Si sceglie un numero M positivo ed arbitrario **2)** Si risolve l'inequazione $|f(x)| > M$

3) Se tra le soluzioni di tale inequazione troviamo un intorno di infinito (cioè | **x** | > **h** ∈ $\mathbf{R}^+$) il limite è verificato , in caso contrario il limite non è verificato

Verificare il seguente limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x} = +\infty$

$\forall M > 0$, $\sqrt{2+x} > M$, $2+x > M^2$, $x > M^2 - 2$, $M^2 - 2 = h > 0$ se $M > \sqrt{2}$.

Conclusione $\forall M > 0$, $\sqrt{2+x} > M \quad \forall x > h \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x} = +\infty$

Applicando la definizione di limite verificare che: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$

$\forall M > 0$, $\sqrt{3-2x} > M$, $3-2x > M^2$, $x < \dfrac{3-M^2}{2} = -\dfrac{M^2-3}{2} = -h$

essendo $h = \dfrac{M^2-3}{2}$, $h > 0$ se $M > \sqrt{3}$ cosa lecita essendo **M** un numero arbitrario positivo e come tale grande a piacere.

Conclusione: $\forall M > 0$, $\sqrt{3-2x} > M \quad \forall x < -h \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$

Definizione unica di limite, ovvero definizione topologica di limite

Le quattro precedenti definizioni possono essere sintetizzate nella seguente **unica definizione**.

Si dice che la funzione $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende ad x_o e si scrive $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$ se ad ogni intorno $J_\ell = J(\ell)$ del punto ℓ è possibile associare $I(x_o)$ del punto x_o tale che $\forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$ si abbia $f(x) \in J(\ell)$. Sinteticamente possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall J(\ell), \exists I(x_o) : f(x) \in J(\ell) \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

o meglio $\forall x \in \text{dom } f \cap [I(x_o) - \{x_o\}]$.

Osservazione

- Esistono funzioni che per $x \to x_o$, con x_o numero finito o infinito , non ammettono limite

● Il calcolo del limite di una funzione quando la variabile indipendente converge o diverge può essere considerato come una nuova operazione (al pari dell'addizione , della moltiplicazione, ...) nel senso che con esso otteniamo un numero ℓ finito o infinito.

Osservazione

● Se f ha limite finito ℓ in x_o ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) diremo che f è **regolare** in x_o .

● Se $|f|$ è **divergente** in x_o diremo che f è **infinitamente grande** in x_o .

● Col simbolo $\overline{R}$ indichiamo l'**insieme numerico reale ampliato**, cioè l'insieme dei numeri reali ampliato dai due nuovi elementi $-\infty$ e $+\infty$ che si leggono rispettivamente <<**meno infinito**>> e <<**più infinito**>>. Risulta : $\inf \overline{R} = -\infty$, $\sup \overline{R} = +\infty$

Ogni sottoinsieme proprio di $\overline{R}$ è **limitato**.