Unità Didattica N° 27

Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema di Rolle

Se la funzione f(x) é :

1) **continua** in un intervallo limitato e chiuso [a,b]

2) **derivabile** in un intervallo limitato e aperto]a,b[

3) **assume valori uguali** agli estremi dell'intervallo , allora esiste almeno un punto $x_o \in]a;b[$

per il quale risulta : $f'(x_o) = 0$

In simboli abbiamo :

$$Hp \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x) & \forall\ x \in [a,b] \\ f'(x) \ \text{esiste finita} & \forall\ x \in]a,b[\\ f(a) = f(b) & \end{cases} \quad Th \ \{ \exists\ x_o \in]a,b[\ : \ f'(x_o) = 0$$

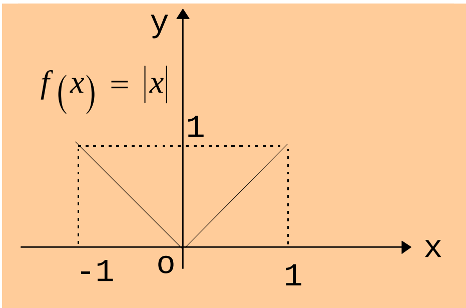
ESEMPI

Stabilire nei seguenti casi , se la funzione $f(x)$, nell'intervallo accanto indicato , verifica le ipotesi del teorema di Rolle , ed in caso affermativo calcolare i corrispondenti *punti di Rolle* .

- $f(x) = |x|$ $[-1,1]$

1) $f(-1) = f(1) = 1$ 2) $f(x)$ è continua $\forall x \in [-1,1]$ 3) $f(x)$ <u>non è derivabile</u> nel punto $x = 0 \in]-1,1[$ in quanto risulta : $f'(0-) = -1$, $f'(0+) = 1$

La funzione proposta , poiché verifica solo due delle tre ipotesi del teorema di Rolle , non ammette nell'intervallo $[-1,1]$ alcun punto x_o in cui si annulla la derivata prima . Questo significa che la funzione proposta **non ammette alcun punto di Rolle** .



- $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ $[-1,1]$

1) $f(-1) = f(1) = 1$ 2) $f(x)$ è continua $\forall x \in [-1,1]$ 3) $f(x)$ è derivabile $\forall x \in]-1,1[$

$f(x)$ non è derivabile negli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ in quanto risulta : $f'(-1) = f'(1) = \infty$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow x_o = 0 \ (\textit{punto di Rolle})$$

Infatti il teorema di Rolle richiede la **derivabilità** soltanto all'interno dell'intervallo $[a,b]$, ma non agli estremi , dove la funzione può non essere derivabile .

Provare la validità del teorema di Rolle per la funzione $f(x) = \ln sin\, x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

$f(a) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln sin\frac{\pi}{6} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, $f(b) = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \ln sin\frac{5}{6}\pi = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

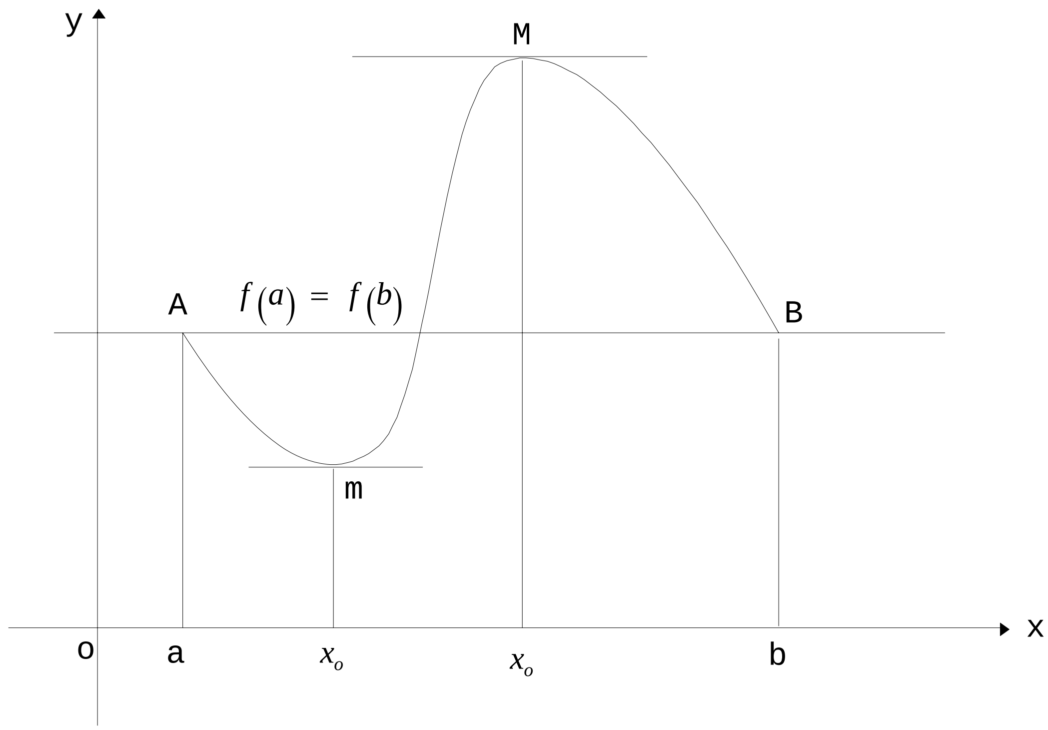
$f(a) = f(b)$, $f(x)$ è continua in $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$, $f'(x)$ è continua in $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$ e quindi $f(x)$ è ivi derivabile . E' cosi provata la validità del teorema di Rolle .

Il teorema di Rolle ha la seguente interpretazione geometrica :

<< Se risultano uguali le ordinate dei punti A[a,f(a)] e B[b,f(b)] del grafico della funzione f(x) continua in [a,b] , se tale grafico è dotato di tangente in ogni punto x ∈]a,b[, allora esiste almeno un punto $P\left[x_o; f(x_o)\right]$ **dell'arco di curva AB distinto da A e da B , in cui la tangente è parallela all ' asse delle ascisse (tangente orizzontale) . >>**

Per semplicità di esposizione possiamo chiamare **punti di Rolle** i punti $x_o \in]a,b[$ che verificano le ipotesi del **teorema di Rolle** .

Questo ci consente di affermare che la retta tangente al grafico della funzione f in un **punto di Rolle** è parallela all'asse delle ascisse .



Interpretazione geometrica del teorema di Rolle

Teorema di Lagrange

Se la funzione f(x) è :

1) **continua** in tutti i punti di un intervallo limitato e chiuso [a,b]

2) **derivabile** in tutti i punti interni dell'intervallo]a,b[

allora esiste almeno un punto $x_o \in]a,b[$ tale che sia :

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_o)} \quad \text{cioè} \quad \boxed{f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_o)}$$

In simboli abbiamo :

$$Hp \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x) & \forall\ x \in [a,b] \\ f'(x) \quad esiste \quad finita & \forall\ x \in]a,b[\end{cases} \qquad Th \left\{ \exists\ x_o \in]a,b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_o) \right.$$

DIMOSTRAZIONE

Considero la funzione ausiliaria $g(x)$ cosi definita :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La funzione $g(x)$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle in quanto :

1) è **continua** $\forall x \in [a,b]$ 2) è **derivabile** $\forall\ x \in]a,b[$ 3) assume **valori uguali** agli estremi dell'intervallo $[a,b]$ in quanto risulta $g(a) = g(b) = 0$.

Quindi per il <u>teorema di Rolle</u> $\exists x_o \in]a,b[: g'(x_o) = 0$, $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$

$$g'(x_o) = f'(x_o) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ , \ g'(x_o) = 0 \Rightarrow f'(x_o) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow$$

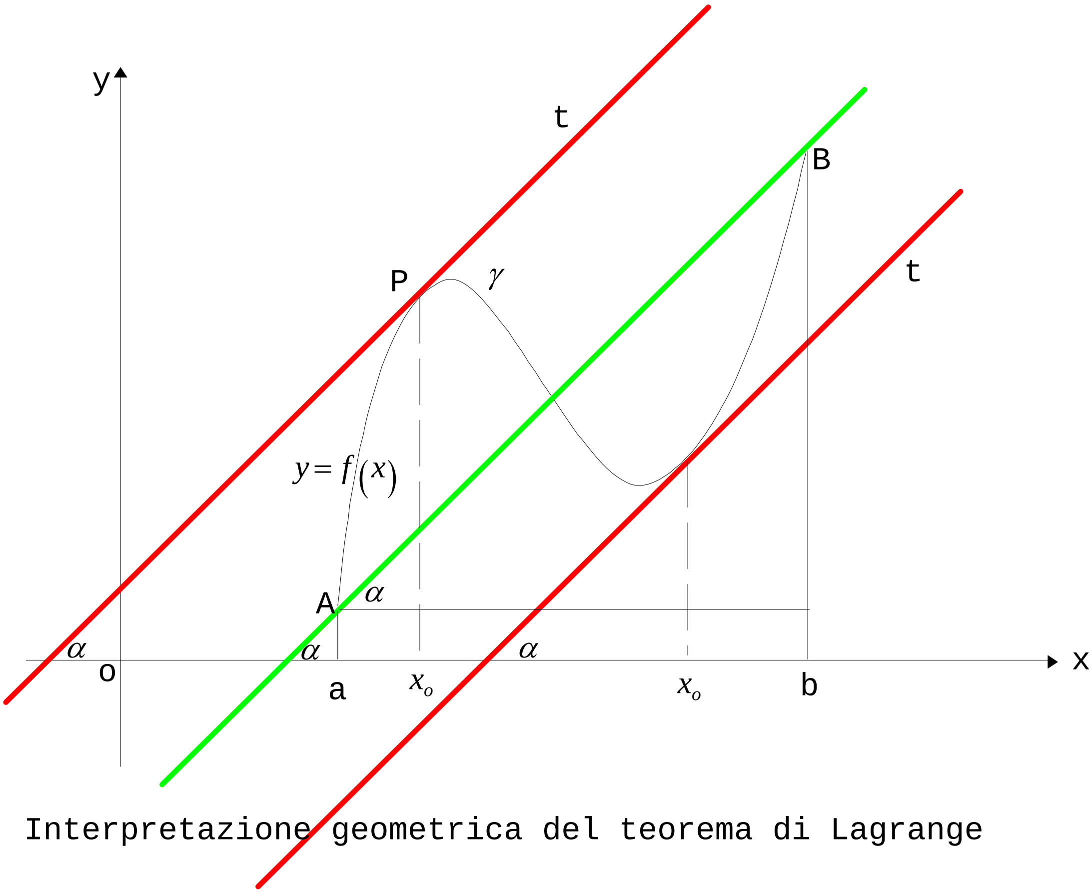
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_o) \quad \text{con } x_o \in]a,b[\qquad f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(x_o)$$

Il teorema di Lagrange ha la seguente interpretazione geometrica :

<< Se il diagramma della funzione f(x) , continua $\forall x \in [a,b]$ **, ammette tangente in ogni punto di ascissa x ∈]a,b[, allora esiste almeno un punto $P_0[x_0,f(x_0)]$ dell'arco di curva AB distinto dai punti A[a,f(a)] e B[b,f(b)] nel quale la tangente risulta parallela alla corda AB** >>

Se chiamiamo **punti di Lagrange** i punti $x_o \in]a,b[$ che verificano le ipotesi del **teorema di Lagrange** , allora la sua interpretazione geometrica può essere sinteticamente formulata affermando che la retta tangente al grafico della funzione f in un punto di Lagrange è parallela alla retta AB .

Infatti : $m_{AB} = tg\,\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, $m_t = f'(x_o) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, $m_{AB} = m_t \Rightarrow t\, //\, AB$



Interpretazione geometrica del teorema di Lagrange

OSSERVAZIONE

Il **teorema di Lagrange** può essere scritto nella seguente forma :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\cdot f'(x_o) \qquad \text{con} \qquad a < x_o < b$$

cioè **l'incremento di una funzione derivabile in un intervallo limitato e chiuso è uguale al prodotto dell'incremento della variabile indipendente per la derivata della funzione in un opportuno punto interno all'intervallo** .

<< Provare la validità del teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = \ln x$ nell'intervallo [1,e] >> .

$f(x)$ è **continua** nell'intervallo limitato e chiuso [1,e] , $f'(x) = \frac{1}{x}$ è **continua** nell'intervallo limitato e chiuso [1,e] e quindi $f(x)$ è ivi **derivabile** . Abbiamo così dimostrato la validità del teorema di Lagrange . Se vogliamo trovare i **<u>punti di Lagrange</u>** dobbiamo applicare la seguente formula : $f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $\frac{1}{x_o} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1}$, $\frac{1}{x_o} = \frac{1}{e - 1}$, $x_o = e - 1$.

- Stabilire nei seguenti casi se la funzione $f(x)$, nell'intervallo a fianco indicato , verifica le ipotesi di Lagrange , ed in caso affermativo calcolare i corrispondenti **punti di Lagrange** .

1) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ [3,6] $f'(x) = 2x - 6$

- $f(x)$ è continua $\forall x \in [3,6]$ • $f(x)$ è derivabile $\forall x \in]3,6[$

La funzione proposta verifica le ipotesi del teorema di Lagrange . $f(6) = 9$, $f(3) = 0$,

$f'(x_o) = 2x_o - 6$, $f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $2x_o - 6 = \frac{9}{3} = 3$, $x_o = \frac{9}{2}$

2) $f(x) = -x^2 + 4$, $[-2,1]$, $f'(x) = -2x$, $f(x)$ è continua e derivabile in $[-2,1]$ e pertanto verifica le ipotesi del teorema di Lagrange . Risulta :

$f(-2) = 0$, $f(1) = 3$, $f'(x_o) = -2x_o$, $3 = 3(-x_o)$, $x_o = -\frac{1}{2}$

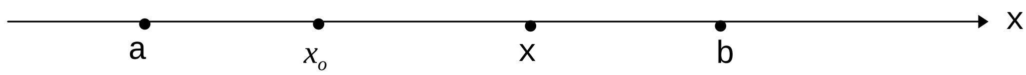
Corollari del teorema di Lagrange

COROLLARIO N° 1

Se la funzione f(x) è continua in un intervallo limitato e chiuso [a,b] ed ha derivata prima nulla in tutti i punti interni ad [a,b] , allora essa è costante in tutto l'intervallo [a,b] .

$$\text{Hp}\ \begin{cases} \lim\limits_{h\to o} f(x+h) = f(x) & \forall x \in [a,b] \\ \lim\limits_{h\to o} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = 0 & \forall x \in]a,b[\end{cases} \qquad \text{Th}\ \{ f(x) = \text{costante} \quad \forall x \in [a,b]$$

DIMOSTRAZIONE



Per il teorema di Lagrange , applicato alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,x]$ con $\forall x \in [a,b]$, posso scrivere : $f(x) - f(a) = (x-a)\cdot f'(x_o) \quad \forall x \in [a,b]$.

Poiché $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x_o) = 0$ otteniamo : $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$f(x) = \text{costante} \quad \forall x \in [a,b]$

COROLLARIO N° 2

Due funzioni f(x) e g(x) derivabili ed aventi la stessa derivata prima in tutti i punti interni all'intervallo limitato e chiuso [a,b] differiscono fra loro per una costante additiva .

Hp $\{ f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in]a,b[$ Th $\{ f(x) - g(x) = \text{costante} \ \forall x \in [a,b]$

DIMOSTRAZIONE

Considero la funzione ausiliaria $d(x) = f(x) - g(x)$, $d'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Per il corollario N° 1 avremo : $d(x) = \text{costante} \quad \forall x \in [a,b]$

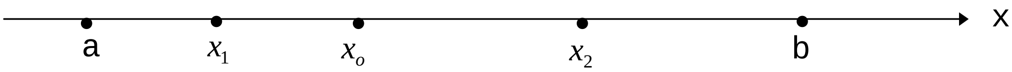
COROLLARIO N° 3

Se f(x) è **continua** nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$, **derivabile** nell ' intervallo limitato ed aperto]a,b[, se è $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] $\forall\ x \in]a,b[$, allora $f(x)$ è **strettamente crescente** (decrescente) in [a,b] .

$$Hp \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x) & \forall\ x \in [a,b] \\ f'(x) \quad esiste \quad finita & \forall\ x \in]a,b[\\ f'(x) > 0\ [\,f'(x) < 0\,] & \forall\ x \in]a,b[\end{cases} \quad \text{Th} \begin{cases} f(x_2) > f(x_1) \quad per \quad x_2 > x_1 \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b] \\ [\,f(x_2) < f(x_1) \quad per \quad x_2 > x_1 \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b]\,] \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE

Siano x_1 ed $x_2 > x_1$ due punti qualsiasi dell'intervallo $[a,b]$.



Per il teorema di Lagrange , applicato alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_1, x_2]$,possiamo scrivere :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_o) \quad \text{con} \quad x_o \in]x_1, x_2[$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1) \quad \text{per} \quad x_2 > x_1$$

La funzione $f(x)$ è **strettamente crescente** in $[x_1, x_2]$ e quindi anche in $[a,b]$.

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1) \quad \text{per} \quad x_2 > x_1$$

La funzione $f(x)$ è **strettamente decrescente** in $[x_1, x_2]$ e quindi anche in $[a,b]$.

Il corollario non è invertibile , in quanto $f(x)$ può essere strettamente crescente (decrescente) in $[a,b]$ ed avere derivata prima nulla in qualche punto interno ad $[a,b]$.

La funzione $f(x) = x^3$ è <u>strettamente crescente</u> nel punto $x = 0$ dove risulta $f'(x) = 0$.

Teorema di Cauchy o degli incrementi finiti

Se f(x) e g(x) sono due funzioni

1) **continue** nell ' intervallo limitato e chiuso [a,b]

2) **derivabili** nell ' intervallo limitato e aperto]a,b[

3) se risulta $g'(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in]a,b[$ [1]

allora esiste almeno un punto $x_o \in]a,b[$ in corrispondenza del quale risulta :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

Il teorema di Cauchy prende anche il nome di **teorema degli accrescimenti finiti** in quanto , se le due funzioni verificano le ipotesi del teorema di Cauchy , allora il rapporto dei loro incrementi è uguale al corrispondente rapporto delle derivate delle due funzioni in uno , o più punti particolari di $]a,b[$.
In forma ancora più compatta possiamo affermare che tale teorema , detto **degli incrementi finiti** , può esprimersi dicendo che , se le due funzioni verificano le ipotesi del teorema di Cauchy , il rapporto tra gli incrementi delle funzioni è uguale al rapporto tra le rispettive derivate calcolate in un opportuno punto interno all'intervallo .

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione ausiliaria $\boxed{\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]}$

La funzione $\Phi(x)$ verifica tutte le ipotesi del **teorema di Rolle** , in quanto essa :

1) è **continua** in $[a,b]$ 2) è <u>derivabile</u> in $]a,b[$ 3) risulta : $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$

Esiste , allora , per il <u>teorema di Rolle</u> , almeno un punto $x_o \in]a,b[$ per il quale risulta :

$$\Phi'(x_o) = 0$$

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x) \ ,\ \Phi'(x_o) = 0 \Rightarrow f'(x_o) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x_o) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

Per $g(x) = x$ si ottiene il **teorema di Lagrange** .

[1] La funzione $g(x)$ è strettamente monotona (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente) in $[a,b]$ e quindi risulterà $g(a) \neq g(b)$

Teoremi di De L'Hospital

- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue nel punto x_o . Se risulta $g(x_o) \neq 0$ abbiamo :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_o)}{g(x_o)}$$

Se risulta $f(x_o) \neq 0$ e $g(x_o) = 0$ abbiamo : $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Se invece abbiamo $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = f(x_o) = g(x_o) = 0$ allora il $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Tale indeterminazione può essere eliminata o mediante particolari artifici o , se si verificano certe condizioni , applicando uno dei due teoremi di De L'Hospital .

Primo teorema di De L'Hospital

Se f(x) e g(x) sono due funzioni **continue e nulle** in un punto x_o , se tali funzioni sono **derivabili** in un intorno del punto x_o , escluso al più il punto x_o , con $g'(x_o) \neq 0$, se esiste il $\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, esiste anche il $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regola ora considerata si estende anche al caso in cui la variabile **x** tende all'infinito .

Secondo teorema di De L ' Hospital

Se f(x) e g(x) sono due funzioni infinite in un punto x_o , cioè se $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} g(x) = \infty$, se tali funzioni sono derivabili in un intorno del punto x_o , escluso al più il punto x_o , con $g'(x_o) \neq 0$, se esiste il $\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, esiste anche il $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

I due teoremi di De L ' Hospital esprimono delle condizioni sufficienti ma non necessarie.

Questo significa che se esiste il $\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste anche il limite $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ ma non viceversa .

Se le funzioni f(x) e g(x) sono derivabili più volte , se le ipotesi dei **due teoremi di De L ' Hospital** sono soddisfatte , il procedimento per la determinazione dei limiti che si presentano sotto una delle due seguenti forme indeterminate $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ può essere ripetuto diverse volte ,precisamente fino al calcolo del limite .

- I due teoremi di De L'Hospital sono validi tanto per x_o finito , quanto per x_o infinito .
- I due teoremi di De L'Hospital possono essere sintetizzati nella seguente **regola di De L'Hospital**:

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni derivabili e tendenti simultaneamente a **zero** o ad **infinito** per $x \to x_o$ (con x_o finito o infinito) , se il rapporto delle loro derivate ha un limite (finito o infinito) , allora anche il rapporto delle funzioni ha un limite e questo limite è uguale al limite del rapporto delle derivate :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

I due teoremi di De L'Hospital ,applicati in maniera opportuna ,possono essere utili anche per calcolare limiti che si presentano in una delle seguenti forme indeterminate

$$+\infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad 1^{\infty} \quad , \quad 0^{0} \quad , \quad \infty^{0}$$

Basta avere l ' accortezza di eseguire prima del calcolo del limite una opportuna trasformazione

capace di ricondurre il limite proposto alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

- Per calcolare un limite che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$ basta applicare la seguente trasformazione :

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Con tale trasformazione il limite proposto assume una delle due forme indeterminate : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

- Per calcolare un limite che si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$ basta applicare la seguente trasformazione :

$$f(x) - g(x) = g\left(\frac{f}{g} - 1\right) = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) = \frac{\frac{f}{g} - 1}{\frac{1}{g}} = \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}} = \ln \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \ln e^{f(x) - g(x)}$$

L ' artificio capace di eliminare la forma indeterminata va scelto caso per caso .

- Le forme indeterminate 1^∞ , 0^0 , ∞^0 si incontrano quando dobbiamo calcolare limiti del tipo : $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)}$ in una delle tre seguenti ipotesi :

1) $\lim_{x \to x_o} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to x_o} g(x) = \infty$ 2) $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to x_o} g(x) = 0$

3) $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to x_o} g(x) = 0$

Tali limiti si calcolano ricordando che : $f(x) = e^{\ln f(x)}$

Quindi , il limite precedente assume la seguente forma : $\lim_{x \to x_o} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_o} g(x) \cdot \ln f(x)}$

Il limite presente nell'esponente viene calcolato applicando opportunamente uno dei due teoremi di De L'Hospital .

Infatti , tenendo presente che è possibile scambiare l'operazione di limite con quella di logaritmo , possiamo ricondurre le tre forme indeterminate 1^∞ , 0^0 , ∞^0 prima alla forma indeterminata e successivamente alla forma $\frac{0}{0}$ o alla forma $\frac{\infty}{\infty}$.

E S E M P I $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\,x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + tg^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{tg^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2tg\,x\left(1 + tg^2 x\right)}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left(1 + tg^2 x\right)}{\cos x} = 2$$

ESEMPI $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3} = \frac{e^{-\infty}}{(-\infty)^3} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

In questo caso ,applicando ripetutamente la regola di de L'Hospital ,non riusciamo ad eliminare la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite va calcolato nella seguente maniera :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \mathbf{1}$$

ESEMPI $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot g\, x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{tg\, x - x}{x tg\, x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{tg\, x + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x\cos x + x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x + 1} = \mathbf{0}$$

ESEMPI $(0\cdot\infty)$

$$\lim_{x\to 0+} x^3\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0+}\frac{-x^3}{3} = \mathbf{0}$$

ESEMPI (1^{∞})

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = k = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln k = \lim_{x\to}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1 \quad , \quad k = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi}{2}x} = k = e^{\frac{2}{\pi}}$$

ESEMPI $\left(0^0\right)$

$$\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} = k = 1$$

$$\ln k = \lim_{x\to 0+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot tg\, x = \mathbf{0} \qquad k = e^0 = 1$$

ESEMPI $\left[(+\infty)^0\right]$

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, x} = k = 1$$

$$\ln k = \lim_{x\to 0+} tgx \cdot \ln\frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0+} tgx \cdot \ln x = -\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\cot g\, x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \cot g^2 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \mathbf{0} \quad , \quad k = e^0 = 1$$