Le funzioni iperboliche

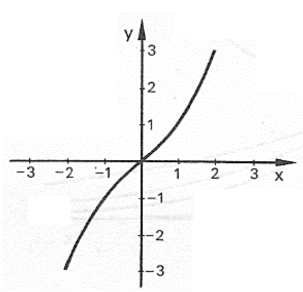
Le **funzioni iperboliche** costituiscono una famiglia di funzioni definite a partire da un'iperbole equilatera ed aventi proprietà simili alle **funzioni goniometriche**. L'argomento di una funzione goniometrica rappresenta la misura in radianti di un angolo, l'argomento di una funzione iperbolica rappresenta l'area di un settore iperbolico, come vedremo in seguito.

Le seguenti funzioni $sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \mathrm{ch}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad \mathrm{th}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

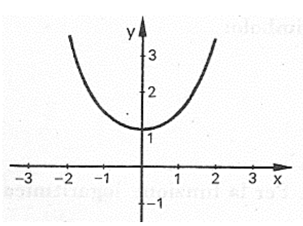
$\mathrm{cth}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad \mathrm{sech}\,x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\quad \mathrm{cosech}\,x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Sono dette nell'ordine **seno iperbolico**, **coseno iperbolico**, **tangente iperbolica**, **cotangente iperbolica**, **cosecante iperbolica**.

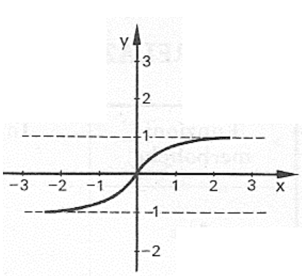
I grafici delle funzioni iperboliche



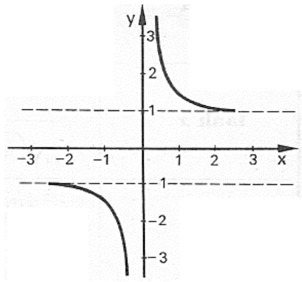
Seno iperbolico di x: $\quad \mathrm{senh}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



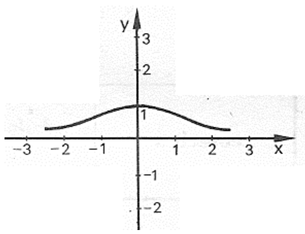
Coseno iperbolico di x $\quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



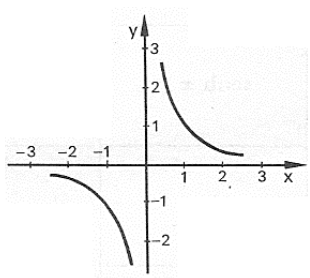
Tangente iperbolica di x: $\quad \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



Cotangente iperbolica di x: $$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

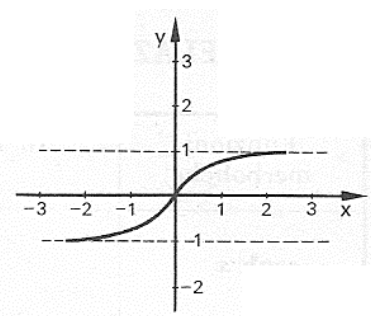


Secante iperbolica di x $$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

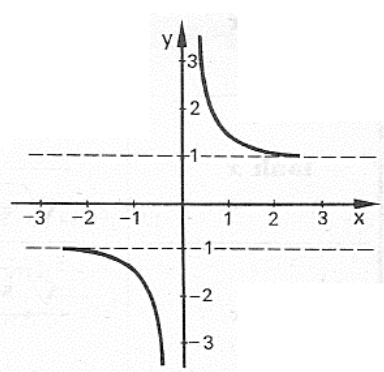


Cosecante iperbolica di x $$\operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

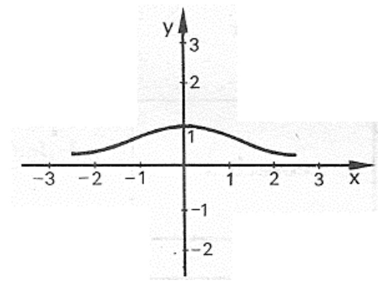
Tangente iperbolica di x $$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



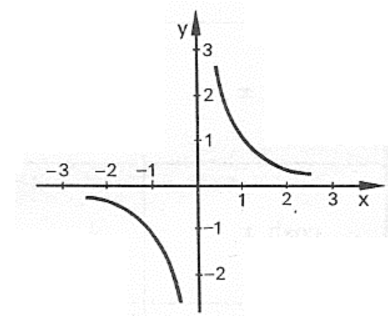
Cotangente iperbolica di x $$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Secante iperbolica di x $\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$



Cosecante iperbolica di x $\operatorname{cosech} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$



Proprietà delle funzioni iperboliche

Le funzioni iperboliche $sh\,x$, $th\,x$, $cth\,x$, $\cos ech\,x$ sono **funzioni dispari** $\gtrless 0$ per $x \gtrless 0$, le funzioni iperboliche $\operatorname{ch} x$ e $\operatorname{sech} x$ sono **funzioni pari** sempre positive. I grafici delle funzioni $sh\,x$, $th\,x$, $\operatorname{cth} x$, $\operatorname{cosech} x$ sono **simmetrici rispetto all'origine degli assi cartesiani**, mentre i grafici delle funzioni $\operatorname{ch} x$ e $\operatorname{sech} x$ sono **simmetrici rispetto all'asse delle ordinate**.

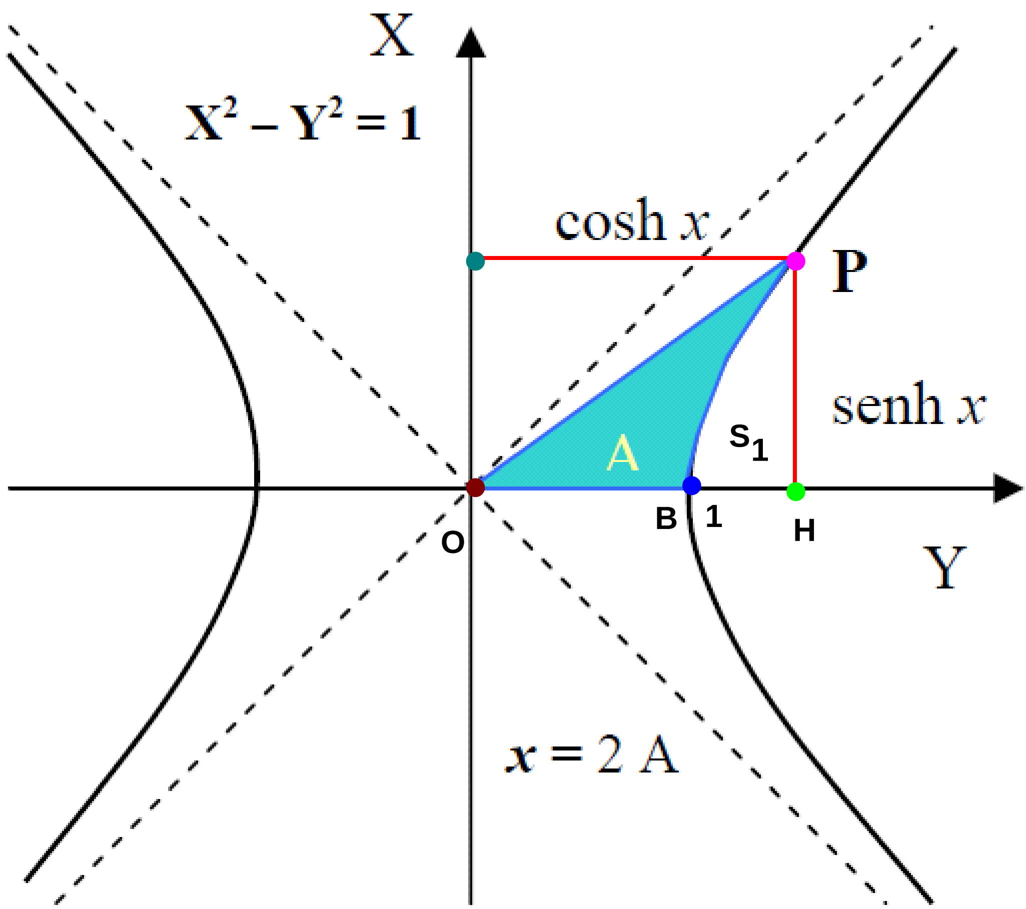
Relazioni tra le funzioni iperboliche

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{sh\,x}$

$$cosh^2 x - senh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2\,e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} + $$
$$- \frac{e^{2x} - 2\,e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = e^x e^{-x} = 1\,.$$

Definizione geometrica delle funzioni iperboliche

Il nome di funzioni iperboliche è da mettere in rapporto con la relazione fondamentale $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ Ponendo $X = \operatorname{ch} x$ ed $Y = \operatorname{sh} x$ la relazione fondamentale diventa $X^2 - Y^2 = 1$ che rappresenta l'equazione cartesiana di una iperbole equilatera avente come asintoti le bisettrici fondamentali degli assi cartesiani $Y=\pm X$. Da tutto ciò deduciamo che il coseno iperbolico ed il seno iperbolico sono, rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di un generico punto dell'iperbole equilatera $X^2-Y^2=1$. Concludiamo affermando che le funzioni iperboliche $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ sono atte alla rappresentazione parametrica dell'iperbole equilatera $X^2-Y^2=1$ allo steso modo come le funzioni circolari $\cos x$ e $\sin x$ danno la rappresentazione parametrica della circonferenza di equazione $X^2+Y^2=1$.



Adesso vogliamo illustrare il significato geometrico da attribuire alla variabile x che compare nelle equazioni $X=ch x$ ed $Y=sh x$ coordinate cartesiane del generico punto $P(X;Y)$ dell'iperbole equilatera $X^2-Y^2=1$. Il valore della x rappresenta il doppio dell'area del settore iperbolico colorato in figura. Adesso dimostriamo che $x=2A$. Per accertare la validità di tale interpretazione basterà calcolare l'area A del settore iperbolico colorato. La suddetta area A è uguale alla differenza tra l'area del triangolo rettangolo OPH e l'area del triangolo curvilineo BHP

individuato superiormente dalla iperbole equilatera, inferiormente dall'asse delle ascisse ed a destra dalla retta verticale PH .

$$S_1=\int_B^P Y_p dX=\int_B^P sh\,x\cdot d\,ch\,x=\int_B^P sh^2\,x\cdot d\,x=\frac{1}{2}\int_B^P (ch\,2x-1)\cdot d\,x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sh\,2x-x\right]_0^x=\frac{1}{2}[sh\,x\cdot ch\,x-x]_0^x$$

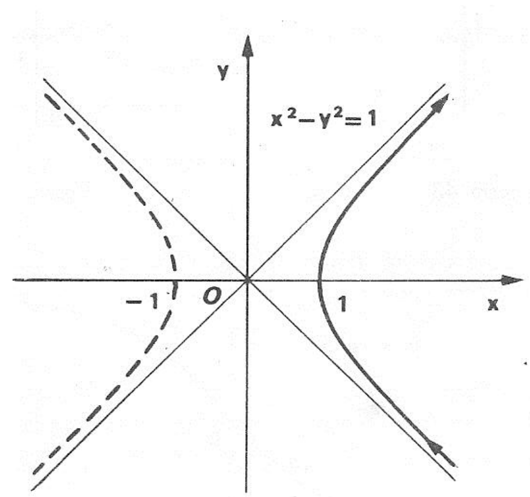
$$S_1=\frac{1}{2}sh\,x\cdot ch\,x-\frac{1}{2}x$$

Nel punto B abbiamo: $x=0$, nel punto H abbiamo $x=x$. $\mathrm{ch}\,0=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\frac{2}{2}=1$

$$A=S(OHP)-S_1=\cancel{\frac{1}{2}sh\,x\cdot ch\,x}-\cancel{\frac{1}{2}\,sh\,x\cdot ch\,x}+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=2A}$$

Un valore positivo del parametro x è associato ad un'area al disopra dell'asse x ed un valore negativo del parametro x è associato ad un'area al sotto dell'asse x, e le aree debbono essere misurate per mezzo del quadrato unitario di lato OB. $B(1;0)$.

Al variare del parametro x in $\mathbb{R}$, il punto $P(ch\,x;sh\,x)$ descrive l'iperbole equilatera di equazione $X^2-Y^2=1$. Più precisamente quando il parametro x descrive $\mathbb{R}$ nel verso positivo (cioè da $-\infty$ a $+\infty$) il punto $P(ch\,x;sh\,x)$ descrive l'arco di l'iperbole equilatera situato nel semipiano $x>0$, percorrendolo dal basso verso l'alto.



$\begin{cases} X=\mathrm{ch}\,x \\ Y=\mathrm{sh}\,x \end{cases}$ sono le equazioni parametriche dell'iperbole equilatera $X^2-Y^2=1$

$\begin{cases} X=a\cdot\mathrm{ch}\,x \\ Y=a\cdot\mathrm{sh}\,x \end{cases}$ sono le equazioni parametriche dell'iperbole equilatera $X^2-Y^2=a^2$

$\begin{cases} x=\mathrm{ch}\,t \\ y=\mathrm{sh}\,t \end{cases}$ sono le equazioni parametriche dell'iperbole equilatera $x^2-y^2=1$

$\begin{cases} x=a\cdot\mathrm{ch}\,t \\ t=a\cdot\mathrm{sh}\,t \end{cases}$ sono le equazioni parametriche dell'iperbole equilatera $x^2-y^2=a^2$

Relazioni di ciascuna funzione iperbolica con le altre

Funzioni iperboliche	in funzione di sh x	in funzione di ch x	in funzione di th x
sh x	$sh\,x$	$\pm\sqrt{ch^2 x - 1}$	$\dfrac{\text{th}\,x}{\sqrt{1-\text{th}^2 x}}$
ch x	$\sqrt{1+sh^2 x}$	$ch\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{th}^2 x}}$
th x	$\dfrac{sh\,x}{\sqrt{1+sh^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{ch^2 x - 1}}{ch\,x}$	th x
cth x	$\dfrac{\sqrt{1+sh^2 x}}{sh\,x}$	$\dfrac{ch\,x}{\pm\sqrt{ch^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\text{th}\,x}$
sech x	$\dfrac{1}{\sqrt{1+sh^2 x}}$	$\dfrac{1}{ch\,x}$	$\sqrt{1-\text{th}^2 x}$
cosech x	$\dfrac{1}{sh\,x}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{ch^2 x - 1}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\text{th}^2 x}}{\text{th}\,x}$

Funzioni iperboliche	in funzione di $cth\,x$	in funzione di sech x	in funzione di cosech x
$sh\,x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\text{sech}^2 x}}{\text{sech}\,x}$	$\dfrac{1}{\text{cosech}\,x}$
$ch\,x$	$\pm\dfrac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\text{sech}\,x}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\text{cosech}^2 x + 1}}{\text{cosech}\,x}$
$th\,x$	$\dfrac{1}{\coth x}$	$\pm\sqrt{1-\text{sech}^2 x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\text{cosech}^2 x + 1}}$
$cth\,x$	$\coth x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sech}^2 x}}$	$\sqrt{\text{cosech}^2 x + 1}$
sech x	$\pm\dfrac{\sqrt{\coth^2 x - 1}}{\coth x}$	sech x	$\pm\dfrac{\text{cosech}\,x}{\sqrt{\text{cosech}^2 x + 1}}$
cosech x	$\pm\sqrt{\coth^2 x - 1}$	$\pm\dfrac{\text{sech}\,x}{\sqrt{1-\text{sech}^2 x}}$	cosech x

Funzioni iperboliche	In funzione di **senh x**	In funzione di **cosh x**	In funzione di **tanh x**
senh x	$\operatorname{senh} x$	$\pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\dfrac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$
cosh x	$\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}$	$\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$
tanh x	$\dfrac{\operatorname{senh} x}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	$\tanh x$
coth x	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}}{\operatorname{senh} x}$	$\pm\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\tanh x}$
sech x	$\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1}}$	$\dfrac{1}{\cosh x}$	$\sqrt{1-\tanh^2 x}$
cosech x	$\dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\tanh^2 x}}{\tanh x}$

Funzioni iperboliche	In funzione di **coth x**	In funzione di **sech x**	In funzione di **cosech x**
senh x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x}}{\operatorname{sech} x}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosech} x}$
cosh x	$\pm\dfrac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{sech} x}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{cosech}^2 x + 1}}{\operatorname{cosech} x}$
tanh x	$\dfrac{1}{\coth x}$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosech}^2 x + 1}}$
coth x	$\coth x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x}}$	$\sqrt{\operatorname{cosech}^2 x + 1}$
sech x	$\pm\dfrac{\sqrt{\coth^2 x - 1}}{\coth x}$	$\operatorname{sech} x$	$\pm\dfrac{\operatorname{cosech} x}{\sqrt{\operatorname{cosech}^2 x + 1}}$
cosech x	$\pm\sqrt{\coth^2 x - 1}$	$\pm\dfrac{\operatorname{sech} x}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x}}$	$\operatorname{cosech} x$

Relazioni di simmetria

In base ai grafici delle funzioni iperboliche, o in base alle definizioni esponenziali , possiamo dedurre le seguenti formule di simmetria:

$sh(-x) = -sh\,x$	$ch(-x) = ch\,x$	$th(-x) = -th\,x$
$\operatorname{cos}ech(-x) = -\operatorname{cos}ech\,x$	$\sec h(-x) = -\sec h\,x$	$cth(-x) = -cth\,x$

Formule di addizione e sottrazione

$$sh(x \pm y) = sh\,x\,ch\,y \pm ch\,x\,sh\,y$$

$$ch(x \pm y) = ch\,x\,ch\,y \pm sh\,x\,sh\,y$$

$$th(x \pm y) = \frac{th\,x \pm th\,y}{1 \pm th\,x\,th\,y}$$

$$cth(x \pm y) = \frac{1 \pm cth\,x\,cth\,y}{cth\,x \pm cth\,y}$$

Formule di duplicazione

$$sh\,2x = 2sh\,x\,ch\,x$$

$$ch\,2x = ch^2\,x + sh^2\,x$$

$$th\,2x = \frac{2th\,x}{1 + th^2\,x}$$

$$\operatorname{cth}x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2\operatorname{cth}x}$$

$$senh\,2\,x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2\,senh\,x\,cosh\,x$$

$$cosh\,2\,x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 2\,e^x e^{-x}}{2} = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= 2\,cosh^2\,x - (cosh^2\,x - senh^2\,x) = cosh^2\,x + senh^2\,x\,.$$

Formule di triplicazione

$$sh\,3x = 4sh^3\,x + 3sh\,x$$

$$ch\,3x = 4ch^3\,x - 3ch\,x$$

$$th\,3x = \frac{3th\,x + th^3\,x}{1 + 3th^2\,x}$$

$$\operatorname{cth}3x = \frac{3\operatorname{cth}x + \operatorname{cth}^3 x}{1 + 3\operatorname{cth}^2 x}$$

Formule di bisezione

$$sh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{ch\,x - 1}{2}}$$ (se $x > 0$, - se $x < 0$) $$ch\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{ch\,x + 1}{2}}$$

$$th\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{ch\,x - 1}{ch\,x + 1}} = \frac{sh\,x}{ch\,x + 1} = \frac{ch\,x - 1}{sh\,x}$$ (+ se $x > 0$, - se $x < 0$)

Formule relative alle potenze di alcune funzioni iperboliche

$$sh^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x - 1) \quad ch^2 x = \frac{1}{2}(ch\,2x + 1) \quad sh^3 x = \frac{1}{4}(sh\,3x - 3sh\,x) \quad ch^3 x = \frac{1}{4}(ch\,3x + 3ch\,x)$$

Formule di Werner

$$\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)] \quad \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)]$$

$$\mathrm{ch} \cdot x\,\mathrm{ch}\,y = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)]$$

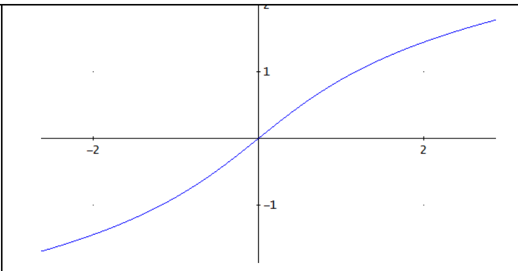
Funzioni inverse delle funzioni iperboliche

Delle sei funzioni iperboliche introdotte in precedenza possiamo definire le corrispondenti funzioni inverse. Queste sono:

$y = \operatorname{settsh} x = \operatorname{arcsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ =

settore seno iperbolico = **arco seno iperbolico**

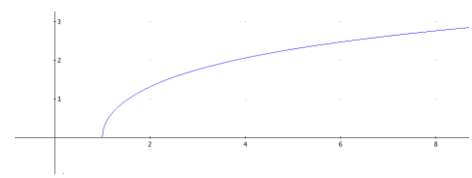
$\operatorname{dom} \operatorname{settsh} x = R$ $\qquad$ $\operatorname{codom} \operatorname{settsh} x = R$



$y = \operatorname{settch} x = \operatorname{arcch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ =

settore coseno iperbolico = **arcocoseno iperbolico**

$\operatorname{dom} \operatorname{settch} x = [1, +\infty[$ $\qquad$ $\operatorname{codom} \operatorname{settch} x = [0, +\infty[$

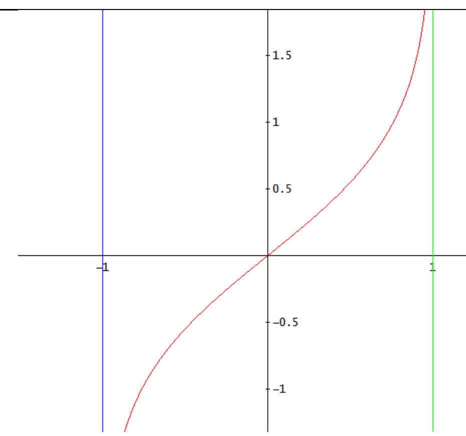


$\operatorname{settth} x = \operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ =

settore tangente iperbolica =

arcotangente iperbolica

$\operatorname{dom} \operatorname{settth} x =]-1, 1[$ $\qquad$ $\operatorname{codom} \operatorname{settth} x = R$



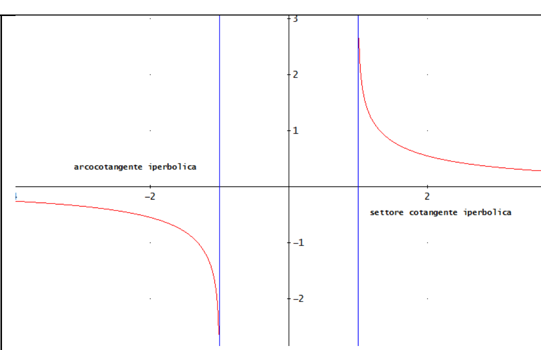
$y = \operatorname{settcth} x = \operatorname{arccth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{1-x}$ =

settore cotangente iperbolica =

arcocotangente iperbolica

$\operatorname{dom} \operatorname{settcth} x =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\operatorname{codom} \operatorname{settcth} x = R - \{0\}$



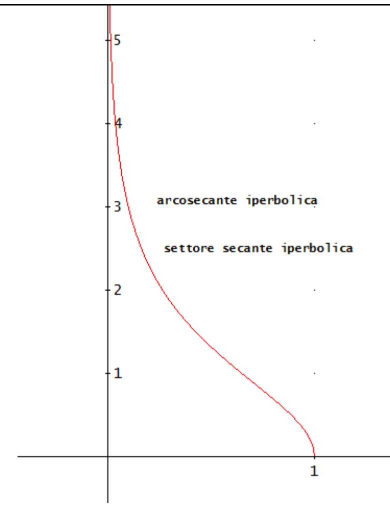
$$y=\text{settsech}\,x=\text{arcsech}\,x=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad =$$

settore secante iperbolica =

arcosecante iperbolica

$$\text{dom}\,\text{settsech}\,x = \left]0,1\right]$$

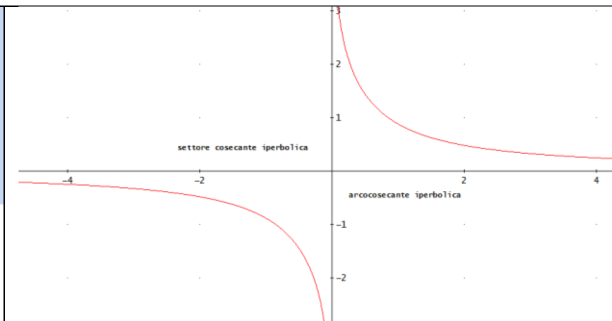
$$\text{codom}\,\text{settsech}\,x = \left]0,+\infty\right]$$



$$y=\text{settcosech}\,x=\text{arccosech}\,x=\begin{cases}\ln\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} & se\; x>0\\[2ex] \ln\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & se\; x<0\end{cases}$$

settore cosecante iperbolica =

arcocosecante iperbolica



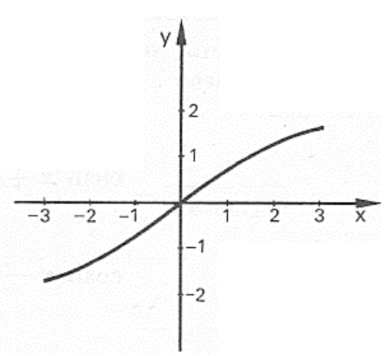
Relazioni tra le funzioni iperboliche inverse

$$\text{settsh}\,x = \text{settcosech}\,\frac{1}{x} \qquad \text{settch}\,x = \text{settsech}\,\frac{1}{x} \qquad \text{settth}\,x = \text{settcth}\,\frac{1}{x}$$

Grafici delle funzioni inverse delle funzioni iperboliche

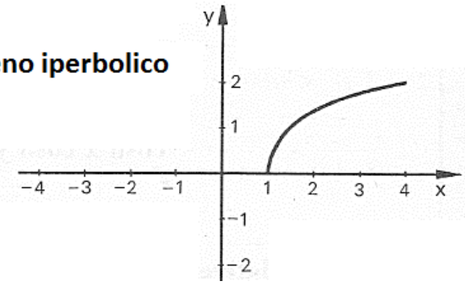
Settore seno iperbolico = arco seno iperbolico

$$-\infty < \text{arcsenh}\; x < +\infty \qquad -\infty < x < +\infty$$



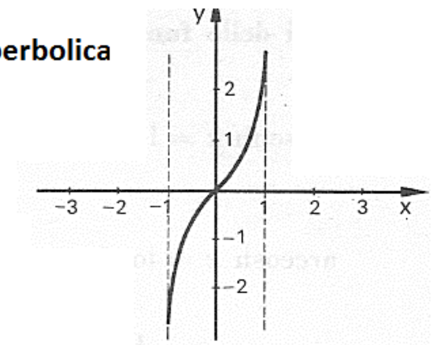
settore coseno iperbolico = arcocoseno iperbolico

$0 \le \operatorname{arccosh} \quad x < +\infty \qquad 1 \le x < +\infty$



settore tangente iperbolica = arcotangente iperbolica

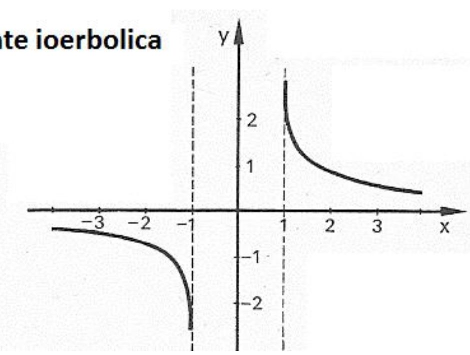
$-\infty < \operatorname{arctanh} \quad x < +\infty \qquad -1 < x < 1$



settore cotangente iperbolica = arcocotangente ioerbolica

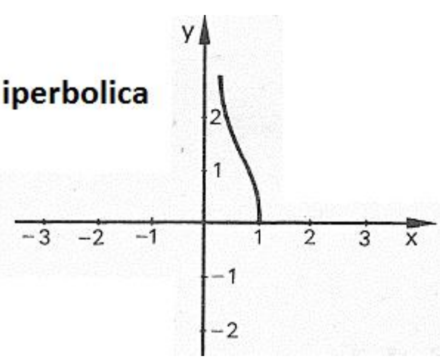
$-\infty < \operatorname{arccoth} \quad x < 0 \qquad -\infty < x < -1$

$0 < \operatorname{arccoth} \quad x < +\infty \qquad 1 < x < +\infty$



settore secante iperbolica = arcosecante iperbolica

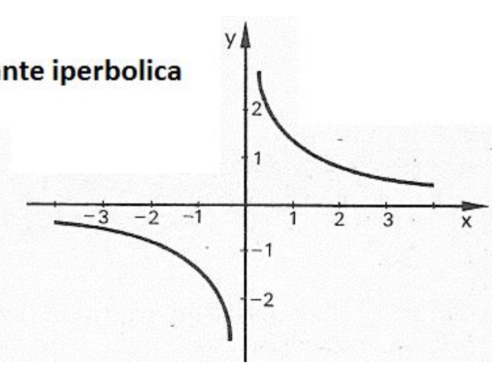
$0 \le \operatorname{arcsech} \quad x < +\infty \qquad 0 < x \le 1$



settore cosecante iperbolica = arcocosecante iperbolica

$-\infty < \operatorname{arccosech} x < 0 \qquad -\infty < x < 0$

$0 < \operatorname{arccosech} x < +\infty \qquad 0 < x < +\infty$



Relazioni tra le funzioni iperboliche inverse

$\text{arcsenh}\, x = \text{arccosech}\, \frac{1}{x}$; $\text{arccosh}\, x = \text{arcsech}\, \frac{1}{x}$; $\text{arctanh}\, x = \text{arccoth}\, \frac{1}{x}$.

Derivate ed integrali delle funzioni iperboliche dirette ed inverse

$D sh x = ch x$	$\int ch x\, dx = sh x + C$
$D ch x = sh x$	$\int sh x\, dx = ch x + C$
$D th x = \frac{1}{ch^2 x}$	$\int \frac{1}{ch^2 x} dx = th x + C$
$D cth x = -\frac{1}{sh^2 x}$	$\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cth x + C$
$D settsh x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{settsh}\, x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$
$D settch x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \text{settch}\, x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$
$D settth x = \frac{1}{1 - x^2}$ $-1 < x < 1$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \text{settth}\, x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$ $-1 < x < 1$
$D settcth x = \frac{1}{1 - x^2}$ $x < -1 \vee x > 1$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = settcth\, x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$ $x < -1 \vee x > 1$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \text{settsh} \frac{x}{a} + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{a^2+x^2} \right\rvert$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = settch \frac{x}{a} + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2} \right\rvert$
$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \text{settth} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x}$ $-1 < x < 1$	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = settcth \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{a-x}$ $x < -1 \vee x > 1$

$\int \text{th}\, x \cdot d\,x = \ln \text{ch}\, x + C$ $\quad \int \text{sech}^2 x \cdot d\,x = \text{th}\, x + C$ $\quad \int \text{cosech}\, x \cdot d\,x = -\text{cth}\, x + C$

$$D(senh\, x) = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\, x \qquad D(cosh\, x) = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\, x$$

$$D(tgh\, x) = D\left(\frac{senh\, x}{cosh\, x}\right) = \frac{cosh\, x\, cosh\, x - senh\, x\, senh\, x}{cosh^2 x} = \frac{cosh^2 x - senh^2 x}{cosh^2 x} = \frac{1}{cosh^2 x}.$$

Formule di addizione

$$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y;$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y};$$

$$\coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}.$$

Formule di moltiplicazione

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x; \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x;$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}; \qquad \coth 2x = \frac{1 + \coth^2 x}{2 \coth x};$$

$$\operatorname{senh} 3x = 4 \operatorname{senh}^3 x + 3 \operatorname{senh} x; \qquad \cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x;$$

$$\tanh 3x = \frac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x}; \qquad \coth 3x = \frac{3 \coth x + \coth^3 x}{1 + 3 \coth^2 x}.$$

Formule di prostaferesi

$$\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \frac{x-y}{2} \cosh \frac{x+y}{2};$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2};$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \operatorname{senh} \frac{x+y}{2} \operatorname{senh} \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{senh} x \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)];$$

$$\operatorname{senh} x \cosh y = \frac{1}{2}[\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)];$$

$$\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)].$$

Formule relative alle potenze di alcune funzioni iperboliche

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1); \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1);$$

$$\operatorname{senh}^3 x = \frac{1}{4}(\operatorname{senh} 3x - 3 \operatorname{senh} x); \qquad \cosh^3 x = \frac{1}{4}(\cosh 3x + 3 \cosh x).$$

Formule di bisezione

$$\operatorname{senh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}, \qquad \begin{matrix} + \text{ se } x > 0, \\ - \text{ se } x < 0; \end{matrix}$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}};$$

$$\tanh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x}, \qquad \begin{matrix} + \text{ se } x > 0, \\ - \text{ se } x < 0. \end{matrix}$$

Per le **funzioni iperboliche** possiamo utilizzare i seguenti simboli:

$\sinh x = \mathrm{sh}\, x$ $\cosh x = \mathrm{ch}\, x$ $\tanh x = \mathrm{th}\, x$ $\coth x = \mathrm{cth}\, x$ $\mathrm{sech}\, x = \mathrm{sch}\, x$ $\mathrm{cosech}\, x = \mathrm{csch}\, x$

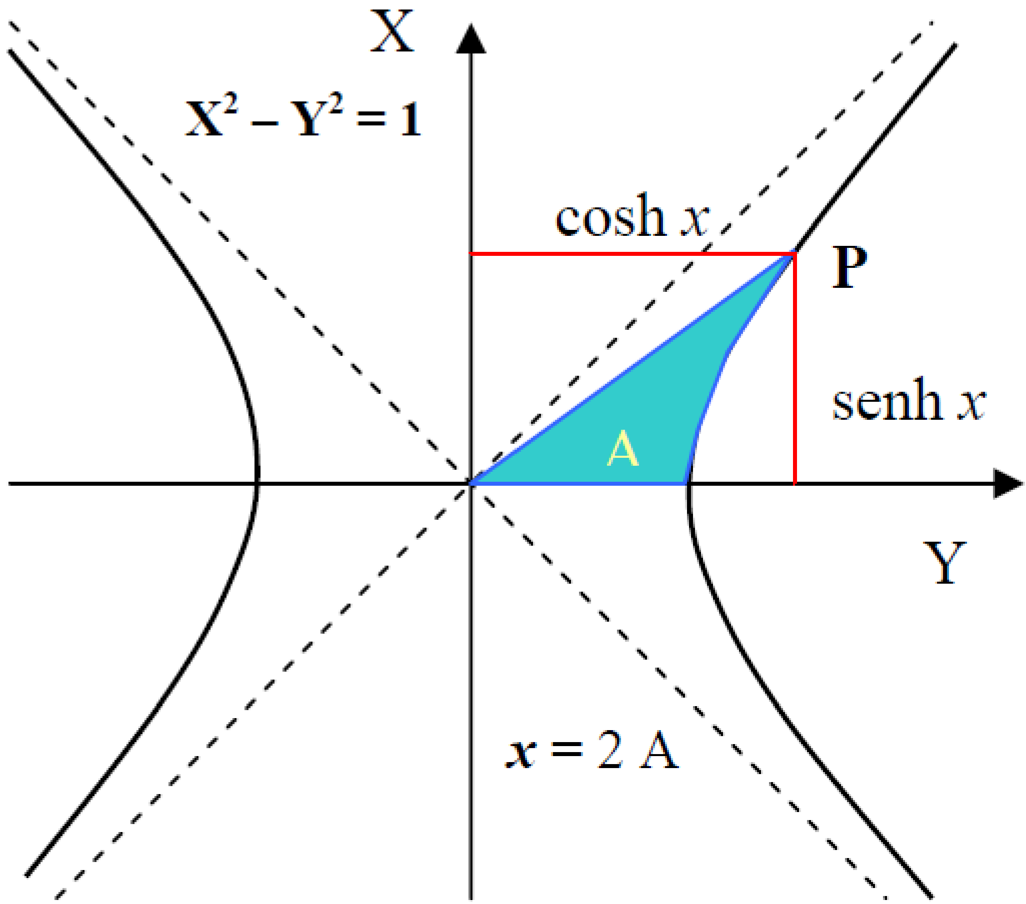
Per le **inverse delle funzioni iperboliche** possiamo utilizzare i seguenti simboli:

$\mathrm{sett}\sinh x = \mathrm{arcsinh}\, x$ $\mathrm{sett}\cosh x = \mathrm{arccosh}\, x$ $\mathrm{sett}\tanh x = \mathrm{arctanh}\, x$

$\mathrm{sett}\coth x = \mathrm{arccoth}\, x$ $\mathrm{sett}\,\mathrm{sech}\, x = \mathrm{arcsech}\, x$ $\mathrm{sett}\csc x = \mathrm{arccosech}\, x$

Bibliografia delle funzioni iperboliche

- Brasca Manuale di matematica pagina 68 – 74
- Fiorenza Vol I pagina 140 – 146
- Vygodskij Manuale di matematica superiore pag. 485
- Barozzi Analisi matematica 1 pag. 495
- Ferrauto La nuova analisi infinitesimale pag. 314 + 315 + 595 + 596
- Bencini Russo Mat Triennio Volume 2 Pagina 526 – 534


X
$X^2 - Y^2 = 1$
cosh x
P
senh x
A
Y
$x = 2$ A