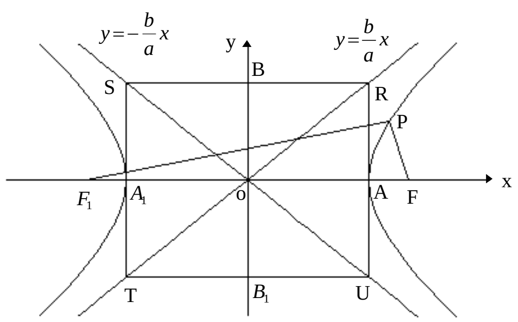
Unità Didattica N° 11

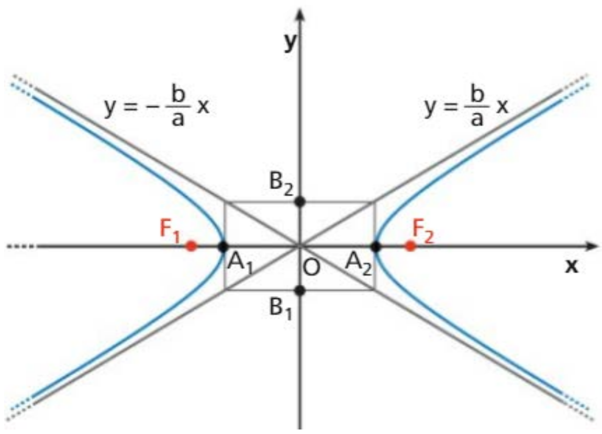
L'Iperbole

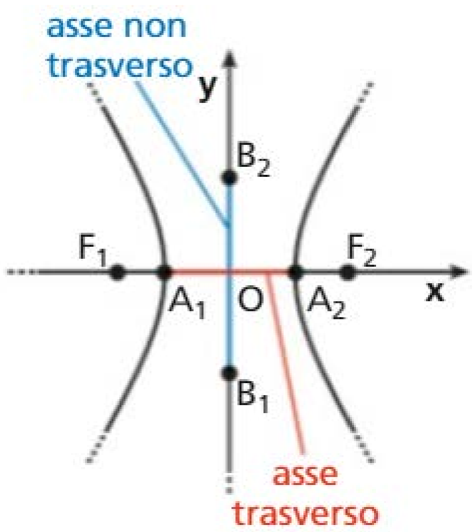
Definizione di iperbole e deduzione della sua equazione canonica

Si chiama iperbole il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali si mantiene costante, in valore assoluto, la differenza delle distanze da due punti fissi F ed F_1 detti fuochi. Per un generico punto P dell'iperbole vale la seguente relazione: $\left|\overline{PF} - \overline{PF_1}\right| = costante = 2a$ [1]

La retta contenente i due fuochi è l'**asse traverso** o **asse focale** dell'iperbole. Il punto medio O del segmento FF_1 è il **centro dell'iperbole**. La retta perpendicolare in O all' **asse focale** è l'**asse non traverso** o **asse ideale**. Se scegliamo il riferimento cartesiano in modo che l'asse **x** coincida con l'asse focale e l'asse **y** coincida con l'asse ideale allora l'equazione dell'iperbole assume la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ [4]







Riferiamo il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani Oxy in maniera che l'asse delle ascisse coincida con la retta FF_1 e l'origine sia il punto medio del segmento FF_1. Poniamo:

$$P(x,y),\quad \overline{FF_1}=2c\ ,\quad \left|\overline{PF}-\overline{PF_1}\right|=2a \quad \text{con}\quad a,c\in R^+ \quad .$$

Riferendoci al triangolo PFF_1 possiamo scrivere:

$$\left|\overline{PF}-\overline{PF_1}\right|<\overline{FF_1} \quad \text{cioè}\quad 2a<2c \quad \text{cioè}\quad a<c$$

Applicando la formula della distanza fra due punti e tenendo presente che $F(c;0)$ $F_1(-c;0)$

la [1] diventa: $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo:

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2-2\sqrt{\left[(x+c)^2+y^2\right]\cdot\left[(x-c)^2+y^2\right]}=4a^2$$

$$x^2+c^2-2cx+y^2+x^2+c^2+2cx+y^2-4a^2=2\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}$$

$$x^2+y^2+c^2-2a^2=\sqrt{(x^2+y^2+c^2)-4c^2x^2}$$

Elevando al quadrato ambo i membri otteniamo:

$$(x^2+y^2+c^2)^2+4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)=(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2$$

$$4a^4-4a^2x^2-4a^2y^2=-4c^2x^2 \qquad (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad [2]$$

Essendo $c>a$ possiamo porre: $a^2+b^2=c^2$ $\quad c^2-a^2=b^2$ [7] per cui la [2] diventa:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad [3]$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 otteniamo l'equazione canonica o ridotta o normale dell'iperbole, cioè :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [4]$$

$A(a;0)$ $\quad A_1(-a;0)$ vertici reali dell'iperbole $B(0;b)$ $\quad B_1(0;-b)$ vertici ideali

$F(c;0)$ $\quad F_1(-c;0)$ fuochi dell'iperbole $\quad c^2-a^2=b^2 \quad c^2=a^2+b^2 \quad c=\sqrt{a^2+b^2}$

$y = \pm \frac{b}{a} x$ asintoti dell'iperbole

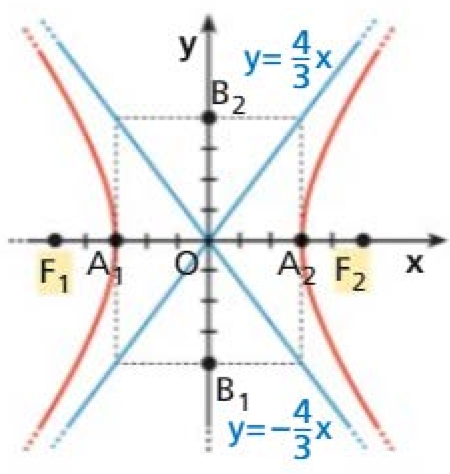
Iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a = 3 \quad b = 4 \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$A_1(-3;0) \quad A_2(3;0) \quad B_1(0;-4) \quad B_2(0;4)$

Asintoti

$y = \frac{4}{3} x \qquad y = -\frac{4}{3} x$



Le rette che contengono le diagonali del rettangolo *RSTU* sono gli asintoti dell'iperbole; esse sono tangenti all'iperbole nei suoi punti impropri, cioè all'infinito.

Gli asintoti godono della seguente importante proprietà: al crescere indefinitamente del valore assoluto della x, i rami dell'iperbole tendono ad accostarsi agli asintoti senza avere mai punti in comune con essa.

L'ellisse è simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y e quindi anche rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Se poniamo $h = \frac{1}{a^2}$ $k = \frac{1}{b^2}$ l'equazione dell'ellisse assume la forma $hx^2 - ky^2 = 1$ che rende più semplici i calcoli nella risoluzione di alcuni problemi.

Se scegliamo l'asse y coincidente con l'asse focale l'equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

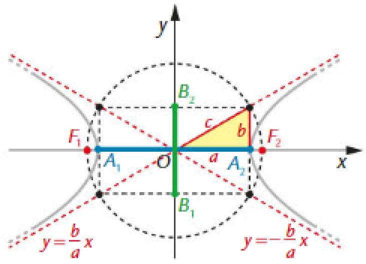
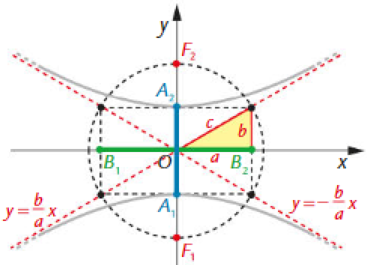
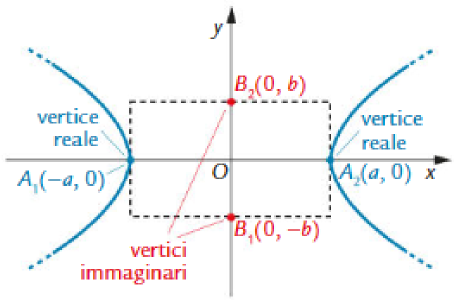
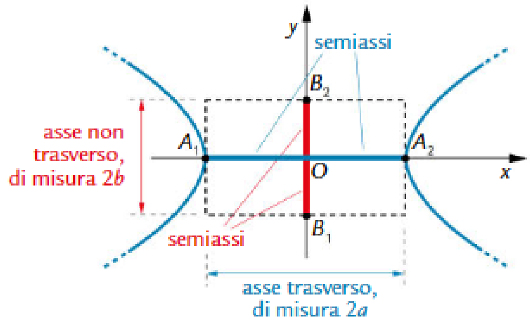
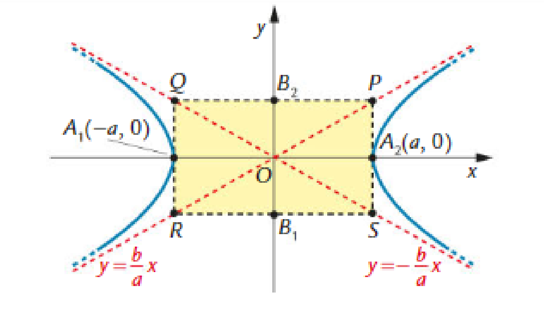
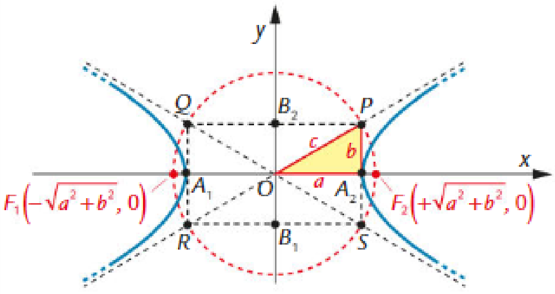
Iperbole con i fuochi sull'asse x: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Iperbole con i fuochi sull'asse y: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	
			
Vertici reali $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$ $\Rightarrow A_1A_2$ è l'asse trasverso **Vertici immaginari** $B_1(0, -b)$; $B_2(0, b)$ $\Rightarrow B_1B_2$ è l'asse non trasverso	**Fuochi** $F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ $F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ **Asintoti:** $y=\pm\frac{b}{a}x$	**Vertici reali** $A_1(0, -b)$; $A_2(0, b)$ $\Rightarrow A_1A_2$ è l'asse trasverso **Vertici immaginari** $B_1(-a, 0)$; $B_2(a, 0)$ $\Rightarrow B_1B_2$ è l'asse non trasverso	**Fuochi** $F_1(0, -\sqrt{a^2+b^2})$ $F_2(0, \sqrt{a^2+b^2})$ **Asintoti:** $y=\pm\frac{b}{a}x$
Relazioni tra i parametri $a^2+b^2=c^2$ $\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$	**Eccentricità** $e=\frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse trasverso}}=\frac{c}{a}$	**Relazioni tra i parametri** $a^2+b^2=c^2$ $\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$	**Eccentricità** $e=\frac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse trasverso}}=\frac{c}{b}$

Tabella 1 **Caratteristiche di un'iperbole con i fuochi sull'asse *x*.**

Vertici	Sono i punti d'intersezione dell'iperbole con l'asse x; le loro coordinate si ottengono risolvendo il sistema: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm a\\ y=0\end{cases}$ Si conclude che l'iperbole ha due vertici, di coordinate $(\pm a, 0)$. Questi punti vengono anche detti **vertici reali** dell'iperbole, per distinguerli dai cosiddetti **vertici immaginari**, che sono i punti di coordinate $(0, \pm b)$.	**Figura 4**
Asse trasverso	È il segmento che congiunge i due vertici (reali) dell'iperbole (A_1A_2 in **Figg. 4** e **5**).	**Figura 5**
Asse non trasverso	È il segmento che congiunge i due vertici immaginari dell'iperbole (B_1B_2 in **Figg. 4** e **5**).	
Semiassi	Sono i segmenti in cui l'asse trasverso e l'asse non trasverso restano divisi dal centro dell'iperbole (**Fig. 5**). Le misure dei **semiassi** trasverso e non trasverso dell'iperbole sono rispettivamente a e b.	

Asintoti	Sono le rette che contengono le diagonali del rettangolo di vertici $P(a, b)$, $Q(-a, b)$, $R(-a, -b)$ e $S(a, -b)$. Quanto più x cresce, tanto più i corrispondenti punti dell'iperbole si avvicinano agli asintoti; gli asintoti si avvicinano dunque indefinitamente all'iperbole, senza tuttavia mai avere punti in comune con essa. I due asintoti sono le rette passanti per l'origine e rispettivamente per P e Q, da cui si ricava che le loro equazioni sono: $y = \pm \frac{b}{a} x$	 **Figura 6**

Fuochi	Dalla relazione $c^2 = a^2 + b^2$ si ricava che: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Pertanto i fuochi sono i punti: $F_1(-\sqrt{a^2+b^2}\,,\ 0)$, $F_2(+\sqrt{a^2+b^2}\,,\ 0)$ Inoltre nel triangolo rettangolo OA_2P risulta: $\overline{OP} = \sqrt{a^2+b^2} = c$ ↑ Teorema Pitagora ↑ Relazioni tra i parametri di un'iperbole quindi il parametro c è la misura della semidiagonale del rettangolo $PQRS$ e la circonferenza che ha centro in O e che passa per uno dei vertici di tale rettangolo interseca l'asse x nei fuochi dell'iperbole.	 **Figura 7**

Rette tangenti all'ellisse uscenti da un punto assegnato

Per calcolare le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ uscenti dal punto $P_o(x_o; y_o)$ si procede come segue:

(1) Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro $P_o(x_o; y_o)$ $\quad y - y_o = m(x - x_o) \quad [1]$

(2) Otteniamo l'equazione $a(m) \cdot x^2 + B(m) \cdot x + C(m) = 0 \quad [2]$ risolvente il sistema

$$\begin{cases} y - y_o = m(x - x_o) \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

(3) Si impone la condizione di tangenza, cioè si annulla il delta dell'equazione [2] cioè si pone:

$$B^2(m) - 4A(m) \cdot C(m) = 0 \qquad [3]$$

Otteniamo una equazione di secondo grado in m del tipo: $pm^2 + qm + r = 0 \qquad [4]$

Le cui soluzioni m_1 ed m_2, sostituite nell'equazione [1], ci danno le equazioni delle tangenti richieste.

Retta tangente all'iperbole nel punto $P_o(x_o;y_o)$

Per determinare l'equazione della retta *tangente all'iperbole in un suo punto* $P(x_0; y_0)$, si può utilizzare la **formula di sdoppiamento**:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$ per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1.$$ per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Le formule si ottengono dall'equazione canonica dell'iperbole sostituendo il termine x^2 con xx_0 e il termine y^2 con yy_0.

Proprietà fondamentali dell'iperbole

- L'iperbole è simmetrica rispetto

1) all'asse x in quanto contiene i punti $P(x, y)$ e $P(x,-x)$

2) all'asse y in quanto contiene i punti $P(x, y)$ e $P(-x, y)$

3) all'origine in quanto contiene i punti $P(x, y)$ e $P(-x,-y)$

- L'equazione [4] risolta rispetto ad y dà:

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ [5] mentre risolta rispetto ad x dà: $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ [6]

La [6] mostra che una qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse incontra l'iperbole in due punti, mentre la [5] mostra che una retta parallela all'asse delle ordinate incontra l'iperbole in due punti solo quanto risulta: $x^2 - a^2 \geq 0$ cioè per $x \leq -a \wedge x \geq a$.

Quest'ultima relazione ci consente di affermare che l'iperbole è una curva aperta esterna alla striscia delimitata dalle rette $x = -a$ ed $x = a$.

- L'iperbole incontra l'asse x nei punti $A(a,0)$ $A'(-a,0)$ ma non incontra l'asse y. Infatti ponendo

nell'equazione è [4] prima $y=0$ e poi $x = 0$ otteniamo : $\frac{x^2}{a^2} = 1$ $x = \pm a$ $x = \pm a$

$y^2 = -b^2$ equazione che non ammette radici reali.

- La retta FF', nel nostro caso l'asse x, è detta asse focale o asse traverso. Il punto medio del segmento FF', nel caso nostro l'origine degli assi cartesiani, è il centro dell'iperbole. La retta perpendicolare in O all'asse focale, nel caso nostro l'asse y, è l'asse non traverso o asse ideale

- I punti A ed A' sono i vertici reali dell'iperbole, i punti $B(0,b)$ $B'(0,-b)$ sono i vertici ideali (o secondari) dell'iperbole. L'asse reale contiene sempre i vertici reali dell'iperbole.

- Nei problemi metrici, col termine di asse dell'iperbole si intende la lunghezza $2a$ del segmento AA', semiasse la lunghezza a dei segmenti $OA = OA'$, distanza focale la lunghezza $2c$ del segmento FF', semidistanza focale la lunghezza c dei segmenti $OF = OF'$, asse ideale la lunghezza $2b$ del segmento BB', semiasse ideale la lunghezza b dei segmenti $OB = OB'$.

- Se scegliamo l'asse x coincidente con l'asse focale l'iperbole ha equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Se invece scegliamo l'asse y coincidente con l'asse focale l'equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

L'asse focale contiene sempre i vertici reali dell'iperbole. Questo significa che la retta passante per i due fuochi dell'iperbole coincide con la retta passante per i vertici reali, cioè la retta che realizza l'asse focale coincide con la retta passante per i vertici reali .

Eccentricità e direttrici dell'iperbole

Il seguente rapporto $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}=\frac{\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}}{\mathbf{a}}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)^2}>1$ è detto eccentricità dell'iperbole.

Le rette di equazioni $\mathbf{x}=\pm\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{e}}=\pm\frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}}=\pm\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{e}^2}$ si dicono direttrici dell'iperbole e sono ad essa esterne.

OSSERVAZIONE

Chiamasi direttrice, coniugata del fuoco $\mathbf{F}$, la retta $\mathbf{d}$ perpendicolare all'asse focale e passante per il punto $\mathbf{D}$ quarto armonico dopo $\mathbf{A},\mathbf{A'},\mathbf{F}$, cioè: $\overline{OF}\cdot\overline{OD}=\overline{OA}^2$ $\mathbf{OD}=-\frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}}$ $|OD|<|OA|$

Per l'altra direttrice si trova: $OD'=\frac{\overline{OA'}^2}{\overline{DF'}^2}=\frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}}$ $|OD'|<|OA'|$

Da quanto detto possiamo affermare che "l'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante il rapporto delle distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice", cioè: $\frac{\mathbf{PF}}{\mathbf{PH}}=\frac{\mathbf{PF'}}{\mathbf{PH'}}=\mathbf{e}$

Asintoti

Le coordinate dei punti comuni alla retta $y=mx$ ed all'iperbole riferita ai propri assi si ottengono risolvendo il sistema: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y\ =\ mx\end{cases}$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{m^2x^2}{b^2}=1$ $\left(b^2-a^2m^2\right)x^2=a^2b^2$ $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}$

$$x=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\qquad y=\frac{\pm abm}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\qquad [1]$$

Le [1] hanno significato quando risulta: $b^2-a^2m^2>0$ cioè quando risulta: $-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}<\mathbf{m}<\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

In tal caso la retta $y = mx$ incontra l’iperbole in due punti. Questa circostanza non si verifica quando risulta: $|m| \geq \frac{b}{a}$ cioè per $\mathbf{m \leq -\frac{b}{a} \vee m \geq \frac{b}{a}}$

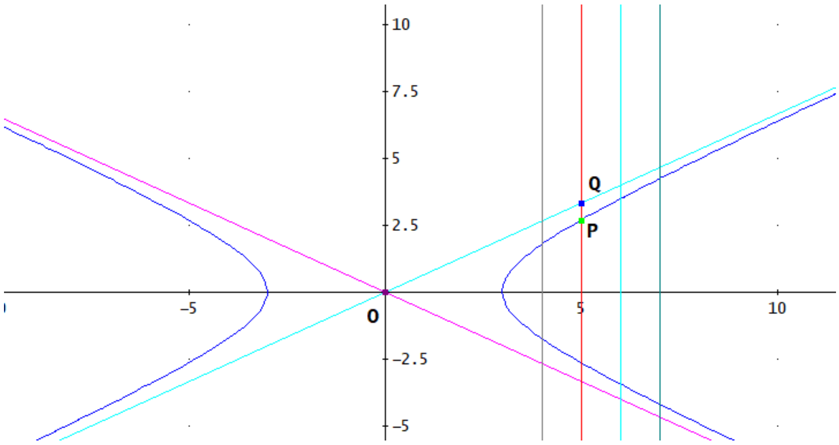
Le rette di equazioni $\mathbf{y = \pm \frac{b}{a} x}$ [2] si dicono **asintoti** dell’iperbole e sono le rette tangenti all’iperbole nei suoi punti impropri, cioè all’infinito. Geometricamente rappresentano le diagonali del rettangolo $RSTU$ individuato dalle rette di equazioni $\mathbf{x = \pm a}$, $\mathbf{y = \pm b}$. Gli asintoti sono rette che godono di una particolare proprietà che metteremo in evidenza col seguente ragionamento:

La retta di equazione $x = k > 0$ incontra la parte superiore del ramo destro dell’iperbole nel punto P e l’asintoto di equazione $y = \frac{b}{a} x$ nel punto Q.

$$\begin{cases} y_Q = \frac{b}{a} k \ ; \ y_P = \frac{b}{a} \sqrt{k^2 - a^2} = \frac{b}{a} k \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2}} \\ PQ = y_Q - y_P = \frac{b}{a} k \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2}} \right) \end{cases} \Rightarrow y_Q - y_P$$

Questo risultato ci consente di affermare che il ramo di iperbole considerato è sempre al di sotto dell’asintoto. Inoltre, quanto più k è grande tanto più è piccolo il rapporto $\frac{a^2}{k^2}$ (precisamente $\frac{a^2}{k^2}$ ha per limite lo zero quando k tende all’infinito), cioè il segmento PQ diventa più piccolo di un qualsiasi altro segmento scelto (piccolo) a piacere. Pertanto la proprietà notevole degli asintoti è la seguente: “**al crescere indefinitamente del valore assoluto di x, i rami dell’iperbole tendono ad accostarsi agli asintoti senza mai toccarli** (a distanza finita)”.

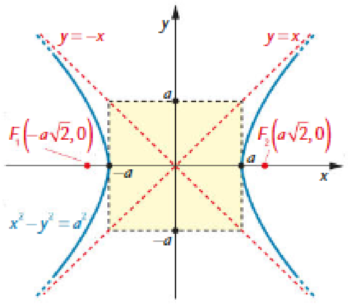
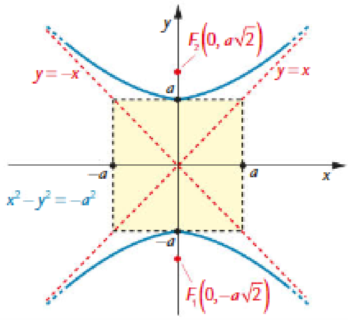
L’iperbole si sviluppa tutta nei due angoli individuati dagli asintoti contenente l’asse focale.



Iperbole equilatera

Se $a=b$ l'iperbole si dice equilatera e la sua equazione diventa: $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$ [3]

I suoi asintoti, che hanno equazioni $\mathbf{y = \pm x}$, sono le bisettrici degli assi cartesiani e risultano fra loro perpendicolari. $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ $\quad \mathbf{c = a\sqrt{2}}$ $\quad \mathbf{e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}}$

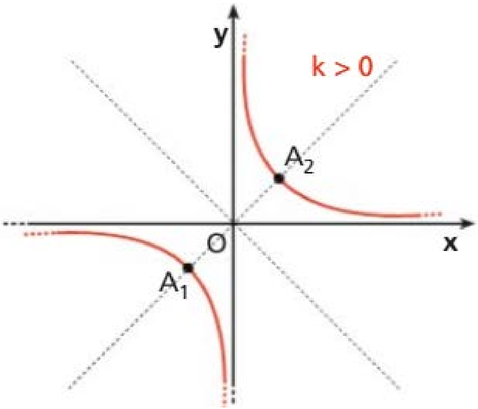
Iperbole equilatera con i fuochi sull'asse *x*	**Iperbole equilatera con i fuochi sull'asse *y***
	
Asintoti: $y = \pm\frac{a}{a}x = \pm x$ **Semidistanza focale:** $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ **Fuochi:** $(\pm a\sqrt{2}, 0)$ **Eccentricità:** $e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$	**Asintoti:** $y = \pm\frac{a}{a}x = \pm x$ **Semidistanza focale:** $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ **Fuochi:** $(0, \pm a\sqrt{2})$ **Eccentricità:** $e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

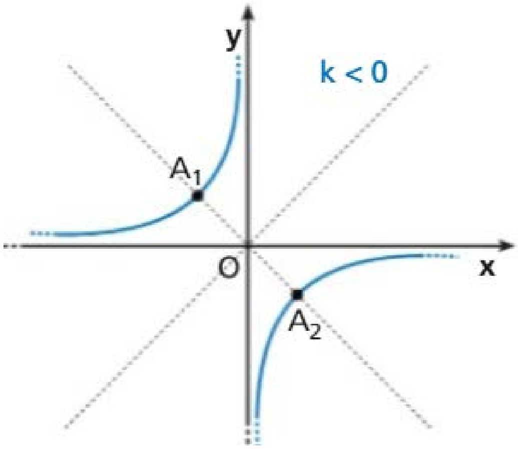
Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

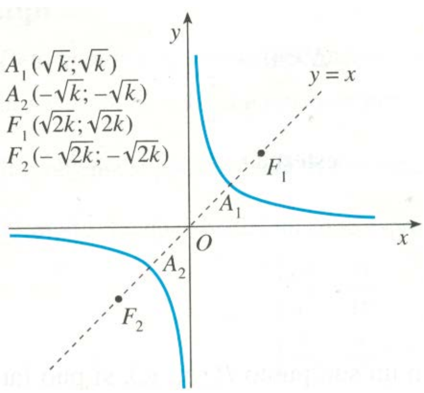
L'equazione cartesiana dell'iperbole equilatera si semplifica notevolmente quando assumiamo come assi cartesiani di riferimento gli asintoti che, come sappiamo, sono fra loro perpendicolari.

Si può dimostrare che le equazioni di tali iperboli assumono la seguente espressione:

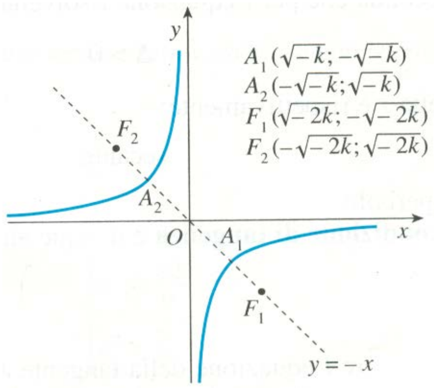
$$\mathbf{xy = k} \qquad k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$







$k > 0$



$k < 0$

L’equazione cartesiana dell’iperbole equilatera si semplifica notevolmente quando assumiamo come assi cartesiani di riferimento gli asintoti che, come sappiamo, sono fra loro perpendicolari.

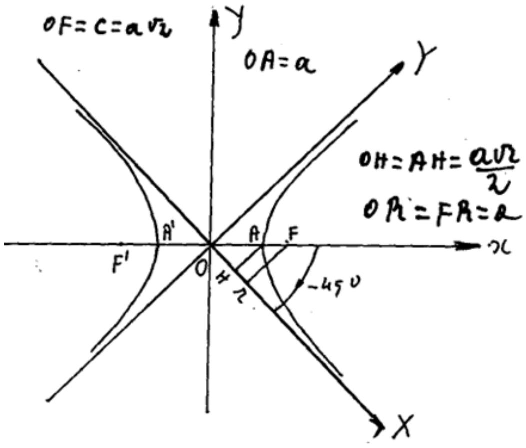
Se l’orientamento dei nuovi assi cartesiani XOY è quello messo in evidenza nella figura, dovendo essere $\vartheta = -45°$, le formule di trasformazione per le rotazioni assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} x = X\cdot\cos\vartheta - Y\cdot\sin\vartheta = \dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y = X\cdot\sin\vartheta + Y\cdot\cos\vartheta = -\dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y) \end{cases} \quad [4] \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases} \quad [5]$$

Sostituendo le [4] nella [3] otteniamo: $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right]^2 - \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y)\right]^2 = a^2$

$$\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \frac{1}{2}\left(X^2+Y^2-2XY\right) = a^2 \qquad \mathbf{XY} = \frac{1}{2}a^2 = \text{costante} = \mathbf{k} \in \mathbb{R}^+ \qquad [5]$$

La [5] rappresenta l’equazione di una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. Essa si sviluppa nel I e nel III quadrante.



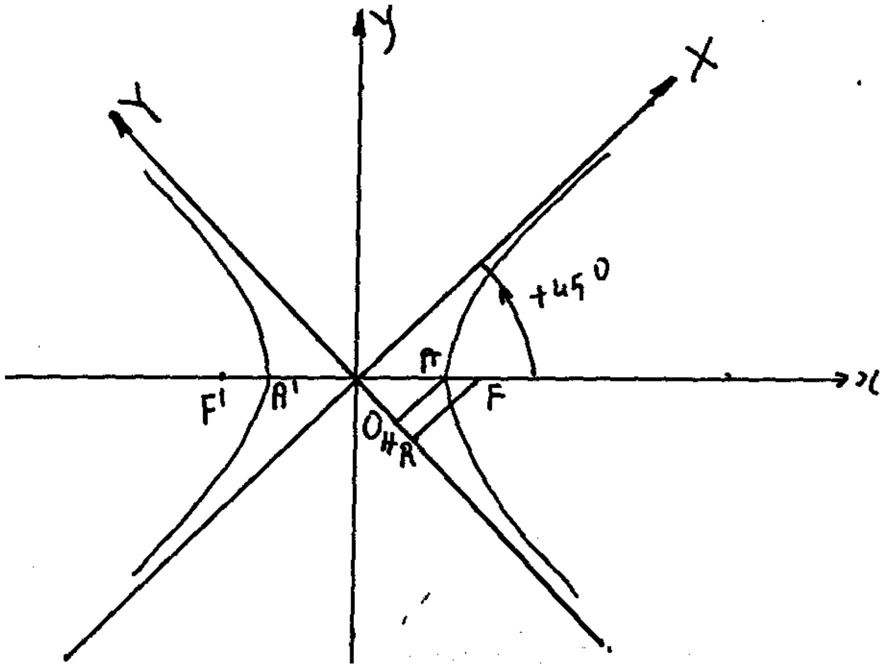
Per $\vartheta=+45°$ le formule di trasformazione per le rotazioni assumono la forma:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases} \quad [4] \qquad \begin{cases} X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \end{cases} \quad [5]$$

L'equazione dell'iperbole (che in questo caso si sviluppa nel II e IV quadrante) diventa:

$$\mathbf{XY}=-\frac{1}{2}a^2=\text{costante}=\mathbf{-k} \quad [8] \qquad \text{con } \mathbf{k}\in\mathbb{R}^+$$

Le equazioni [5] e [8] possono essere riunite nell'unica equazione $\mathbf{XY=h}$ con $h\in\mathbb{R}-\{0\}$ [9]



La [9] rappresenta l'equazione della proporzionalità inversa delle variabili X e Y; possiamo concludere affermando che l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti rappresenta il grafico della proporzionalità inversa.

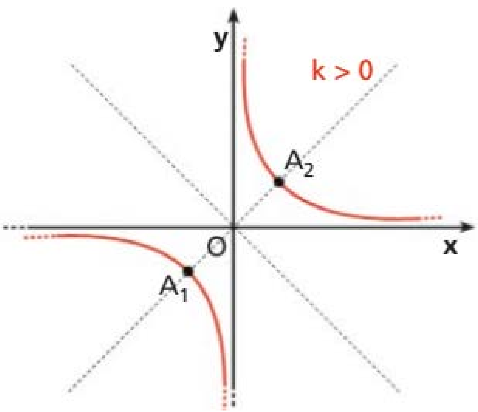
Sia $XY = h \in R^*$ l'equazione di una iperbole riferita ai propri asintoti.

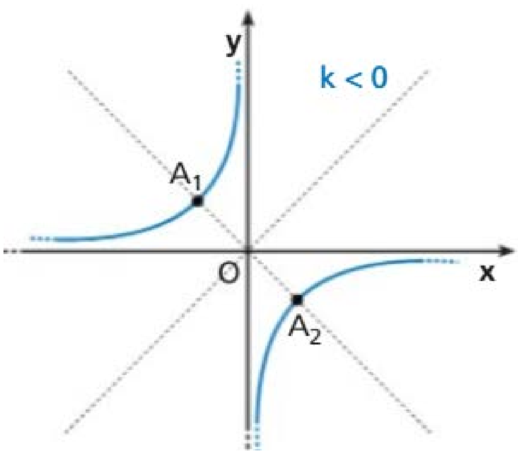
$$\left.\begin{array}{l} A\left(\sqrt{h},\sqrt{h}\right)\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \\ A'\left(-\sqrt{h},-\sqrt{h}\right)\equiv\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \\ F\left(\sqrt{2h},\sqrt{2h}\right)\equiv(a,a) \\ F'\left(-\sqrt{2h},-\sqrt{2h}\right)\equiv(-a,-a) \end{array}\right\} \text{ se } h\in\mathbb{R}^* \qquad \left.\begin{array}{l} A\left(-\sqrt{-h},\sqrt{-h}\right)\equiv\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \\ A'\left(\sqrt{-h},-\sqrt{-h}\right)\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \\ F\left(-\sqrt{-2h},\sqrt{-2h}\right)\equiv(-a,a) \\ F'\left(\sqrt{-2h},-\sqrt{-2h}\right)\equiv(a,-a) \end{array}\right\} \text{ se } h\in\mathbb{R}^*$$

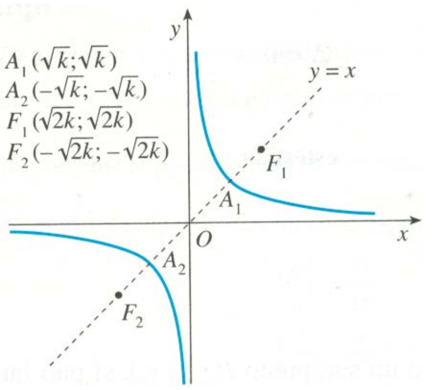
$$\mathbf{a = d(O,A) = \sqrt{2|h|}}$$

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

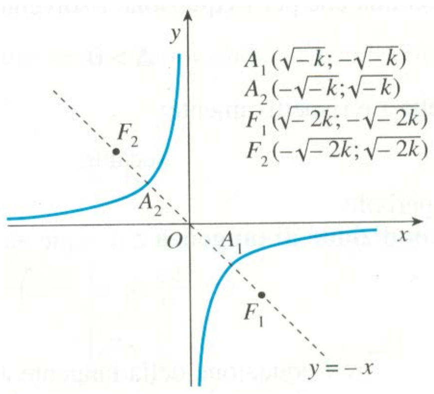
L'equazione cartesiana $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$ dell'iperbole equilatera si semplifica notevolmente quando assumiamo come assi cartesiani di riferimento gli asintoti che, come sappiamo, sono fra loro perpendicolari. Si può dimostrare che le equazioni di tali iperboli assumono la seguente espressione: $\mathbf{xy = k}$ $\quad k\in\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$



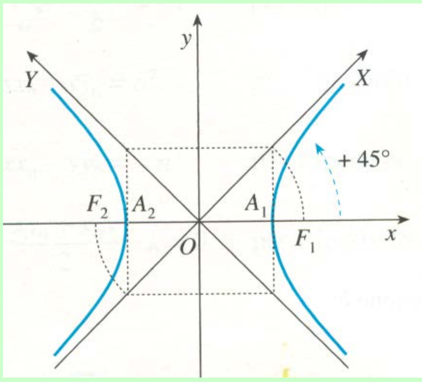




$k>0$

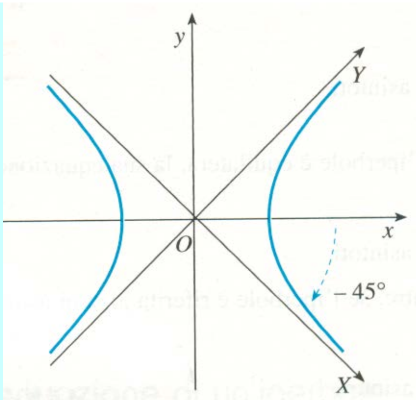


$k<0$

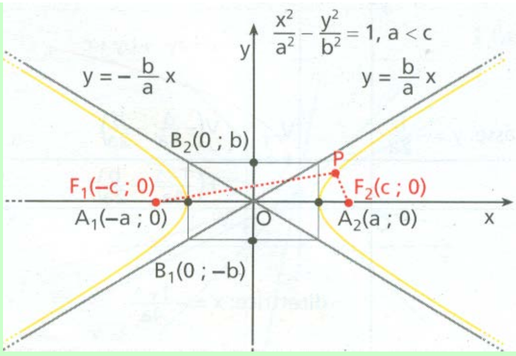


$A_1(a;0)$ $A_2(-a;0)$ $F_1(a\sqrt{2};0)$ $F_2(-a\sqrt{2};0)$

Equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti mediante una rotazione di $+45°$. $XY=-\dfrac{a^2}{2}$



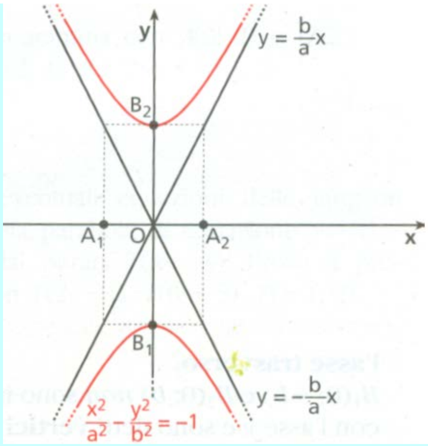
Equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti mediante una rotazione di $-45°$. $XY=\dfrac{a^2}{2}$



Iperbole con i fuochi sull'asse delle x :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$A_2(a,0)\quad A_1(-a,0)\quad F_2(c,0)\quad F_1(-c,0)$$



Iperbole con i fuochi sull'asse delle y:

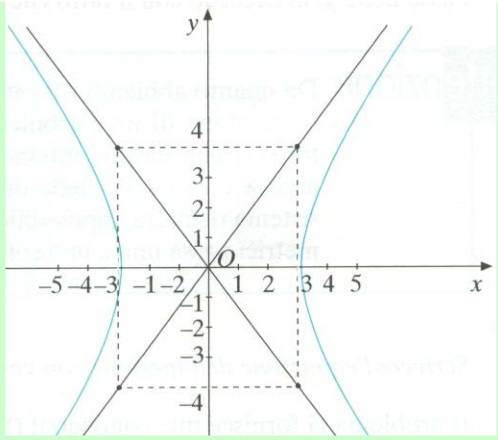
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Iperbole con l'asse focale coincidente con l'asse delle x

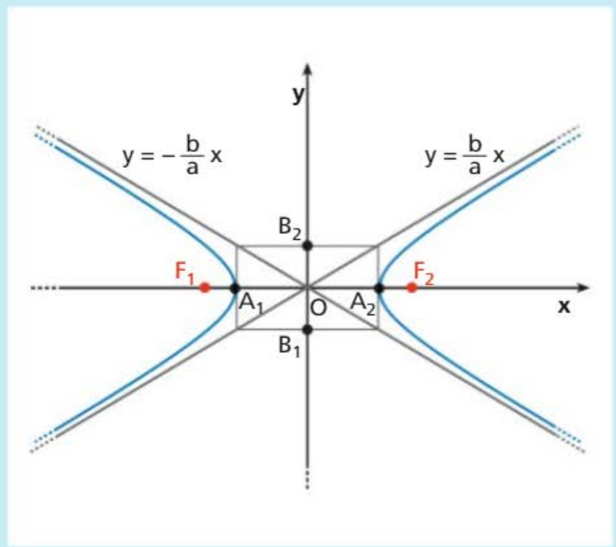
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad c^2 - a^2 = b^2 \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

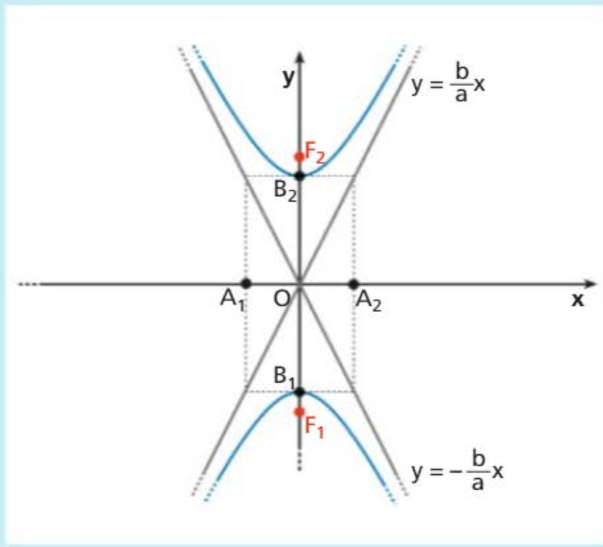
$y = \pm\frac{b}{a}x$ **equazioni dei due asintoti dell'iperbole**



Iperbole con i fuochi sull'asse x



Iperbole con i fuochi sull'asse y



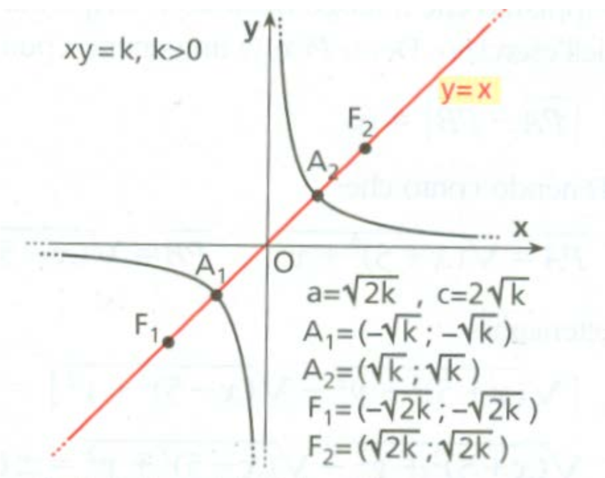
Equazione: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$	**Equazione:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$
Asintoti: $y = -\frac{b}{a}x,\ y = \frac{b}{a}x.$	**Asintoti:** $y = -\frac{b}{a}x,\ y = \frac{b}{a}x.$
Fuochi: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$, con $c = \sqrt{a^2+b^2}$.	**Fuochi:** $F_1(0;-c),\ F_2(0;c)$, con $c = \sqrt{a^2+b^2}$.
Eccentricità: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$	**Eccentricità:** $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$

$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$ sono le equazioni parametriche dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$

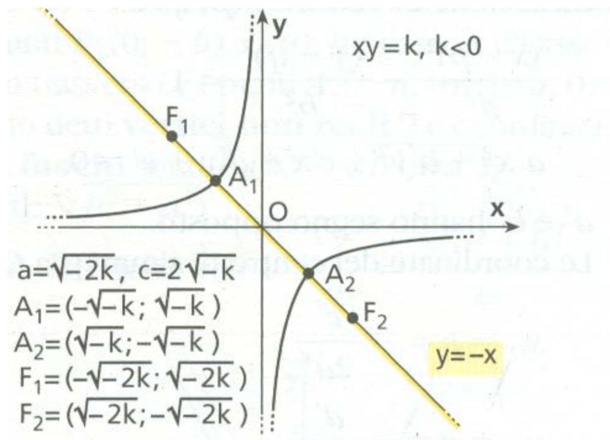
$\begin{cases} x = a \cdot ch\,t \\ t = a \cdot sh\,t \end{cases}$ sono le equazioni parametriche dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$

$$\begin{cases} sh = a \cdot \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = a \cdot \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x} = a \cdot \dfrac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}} \\ ch = a \cdot \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = a \cdot \dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x} = a \cdot \dfrac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}} \end{cases}$$

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti



a. Se $k>0$, i vertici e i fuochi appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



b. Se $k<0$, i vertici e i fuochi appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Rette tangenti all'iperbole uscenti da un dato punto

Per calcolare le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ uscenti dal punto $P_o(x_o;y_o)$ si procede come segue:

(1) Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro $P_o(x_o;y_o)$ $y - y_o = m(x - x_o)$ [1]

(2) Otteniamo l'equazione $A(m)\cdot x^2 + B(m)\cdot x + C(m) = 0$ [2] risolvente il sistema

$$\begin{cases} y - y_o = m(x - x_o) \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

(3) Si impone la condizione di tangenza, cioè si annulla il delta dell'equazione [2] cioè si pone:

$$\mathbf{B^2(m)-4A(m)\cdot C(m)=0} \quad [3]$$

Otteniamo una equazione di secondo grado in $\mathbf{m}$ del tipo: $\mathbf{pm^2+qm+r=0}$ [4]

Le cui soluzioni m_1 ed m_2, sostituite nell'equazione [1], ci danno le equazioni delle tangenti richieste.

Osservazione

Le radici dell'equazione [4] sono:

- reali e distinte: $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è esterno all'ellisse e le tangenti sono due e viceversa
- reali e coincidenti: $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ appartiene all'ellisse e si ha una sola tangente (meglio le due rette tangenti sono sovrapposte) e viceversa
- complesse e coniugate: $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è interno all'ellisse e viceversa. In questo caso non esistono rette reali tangenti all'ellisse.
- Se nessuna delle coordinate del punto $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è nulla, i calcoli sono laboriosi.

Caso numerico

$9x^2-y^2=9 \quad P_o\left(\frac{5}{3};\frac{3}{7}\right) \quad y-\frac{3}{7}=m\left(x-\frac{5}{7}\right)$ equazione del fascio di rette centro $P_o\left(\frac{5}{7};\frac{3}{7}\right)$

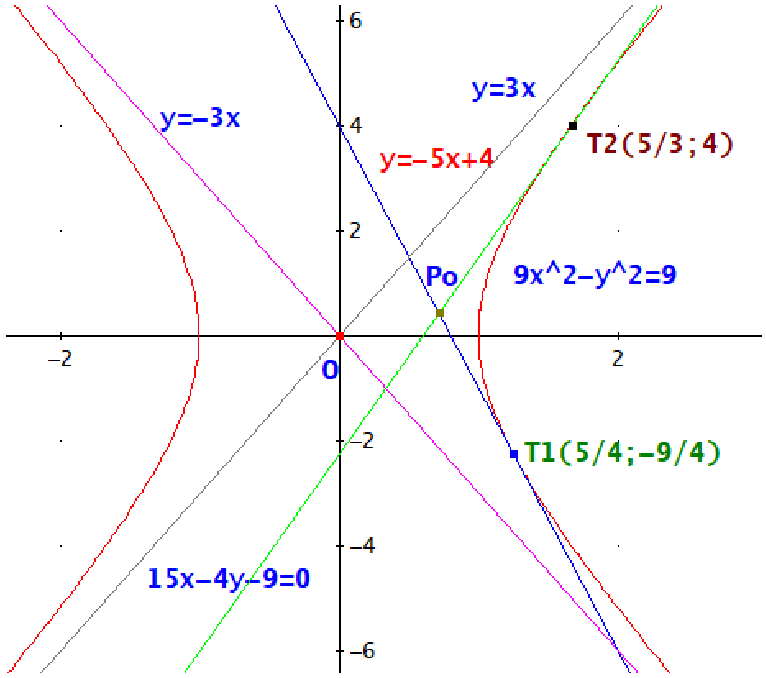
$$\begin{cases} y=mx-\frac{5}{7}m+\frac{3}{7} \\ 9x^2-y^2=9 \end{cases} \quad 9x^2-\left(mx-\frac{5}{7}m+\frac{3}{7}\right)^2-9=0$$

$$9x^2-m^2x^2-\frac{25}{49}m^2-\frac{9}{49}+\frac{10}{7}m^2x-\frac{6}{7}mx+\frac{30}{49}m-9=0$$

$$49\left(9-m^2\right)x^2+14m(35m-3)x-25m^2+30m-450=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4m^2+5m-75=0$$

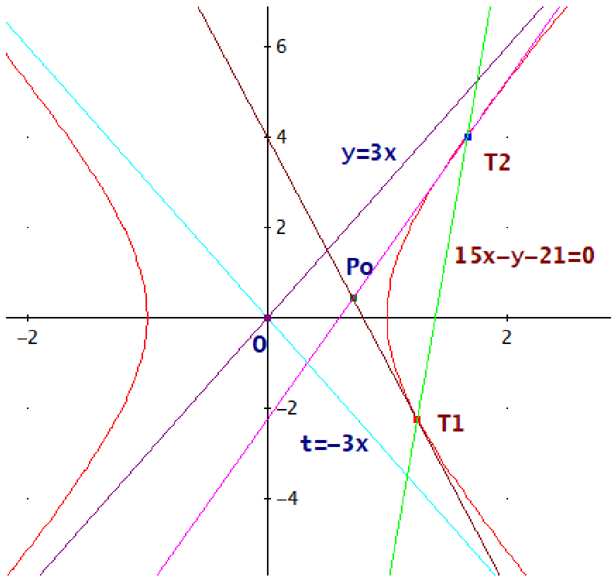
$$m_1=-5 \quad m_2=\frac{15}{4} \quad m_1=-5 \;\Rightarrow\; y-\frac{3}{7}=-5\left(x-\frac{5}{7}\right) \quad y-\frac{3}{7}=-5x+\frac{25}{7} \quad t_1:\; y=-5x+4$$

$m_2=\frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad y-\frac{3}{7}=\frac{15}{4}\left(x-\frac{5}{7}\right) \qquad 15x-4y-9=0$



I punti di tangenza si ottengono risolvendo i seguenti sistemi;

$\begin{cases} 9x^2-y^2=9 \\ y=-5x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ y=-\frac{9}{4} \end{cases} \qquad T_1\left(\frac{5}{4};-\frac{9}{4}\right) \qquad \begin{cases} 9x^2-y^2=9 \\ 15x-4y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=4 \end{cases} \qquad T_2\left(\frac{5}{3};4\right)$



Altro procedimento

- Si applica la regola degli sdoppiamenti cose se $P_o\left(\frac{5}{3};\frac{3}{7}\right)$ appartenesse all'iperbole. Si

ottiene l'equazione della retta s passante per i punti di tangenza $T_1\left(\frac{5}{4};-\frac{9}{4}\right)$ e $T_2\left(\frac{5}{3};4\right)$.

Retta s: $15x-y-21=0$

- Le coordinate dei punti $T_1\left(\frac{5}{4};-\frac{9}{4}\right)$ e $T_2\left(\frac{5}{3};4\right)$ si ottengono risolvendo il sistema formato

dall'equazione della retta s e dall'equazione dell'iperbole.

- Le rette P_oT_1 e P_oT_2 sono le due rette richieste.

$$\begin{cases}15x-y-21=0\\9x^2-y^2=9\end{cases}\qquad\begin{cases}y=15x-21\\9x^2-y^2=9\end{cases}\qquad\begin{cases}y=15x-21\\9x^2-(15x-21)^2-9=0\end{cases}\qquad 9x^2-225x^2+630x-441-9=0$$

$$12x^2-35x+25=0\quad q\begin{cases}x_1=\frac{5}{4}\\y_1=-\frac{9}{4}\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{5}{3}\\y_2=4\end{cases}\quad T_1\left(\frac{5}{4};-\frac{9}{4}\right)\quad T_2\left(\frac{5}{3};4\right)$$

$P_oT_1:\quad y=-5x+4\quad P_oT_2:\quad 15x-4y-9=0$

Retta tangente all'iperbole in un suo punto

Primo metodo

Si procede come indicato nel paragrafo precedente. Si prevede che il delta dell'equazione risolvente il sistema sia nullo e che le radici dell'equazione di secondo grado in m siano reali e coincidenti.

Secondo procedimento: regola degli sdoppiamenti

Vogliamo dimostrare che l'equazione della retta tangente all'iperbole γ di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ nel suo punto $P_0(x_0, y_0)$ è:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1} \qquad (1)$$

Se P_0 e $P_1(x_1, y_1)$ sono due punti dell'iperbole γ, definiamo retta tangente a γ in P_0 la posizione limite della secante P_0P_1 quando $P_1 \to P_0$ muovendosi su γ.

L'equazione della retta P_0P_1 è:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{cioè:} \quad \boxed{\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{y - y_0}}$$

$$P_1 \in \gamma \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$P_0 \in \gamma \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0$$

sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_0)(y_1 + y_0)}{b^2} = 0$$

$$\frac{x_1 + x_0}{a^2} \cdot \boxed{\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}} - \frac{y_1 + y_0}{b^2} = 0$$

$$\frac{x_1+x_0}{a^2}\cdot\frac{x-x_0}{y-y_0}-\frac{y_1+y_0}{b^2}=0$$

$$\frac{(x_1+x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(y_1+y_0)(y-y_0)}{b^2}=0 \quad \left\{ \text{equazione della retta secante } P_0P_1 \right.$$

$P_1 \to P \Longrightarrow x_1 \to x_0 \ \wedge \ y_1 \to y_0$

per cui l'equazione precedente diventa:

$$\frac{x x_0(x-x_0)}{a^2}-\frac{y y_0(y-y_0)}{b^2}=0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0 \qquad \frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1$$

Regola degli sdoppiamenti

$$x^2 \to x_0 x \ ; \ y^2 \to y_0 y \ ; \ xy \to \frac{y_0 x + x_0 y}{2}$$

$$x \to \frac{x_0+x}{2} \ ; \ y \to \frac{y+y_0}{2}$$

Terzo metodo

L'equazione dell'iperbole scritta sotto forma esplicita è : $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

l'equazione della retta tangente a f in P_0 è:

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$y'(x)=\pm\frac{b}{a}\,\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\pm\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y'(x_0) = \pm \frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{a^2-x_0^2}}$$

$$y_0 = y(x_0) = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2-a^2} \Rightarrow \sqrt{x_0^2-a^2} = \pm \frac{a}{b}y_0$$

$$y'(x_0) = \pm \frac{b}{a}\frac{x_0}{\pm \frac{a}{b}y_0} = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$$

$$y-y_0 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0) \quad ; \quad \frac{(y-y_0)y_0}{b^2} = \frac{(x-x_0)}{a^2}$$

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

γ abbia equazione: $xy = K$; $P_0 \in \gamma \Rightarrow x_0y_0 = K$
Una generica retta passante per P_0 ha equazione $y-y_0 = m(x-x_0)$
Essa risulta tangente a γ in P_0 quando è nullo il discriminante della risolvente il sistema:

$$\begin{cases} y = y_0 + m(x-x_0) \\ xy = K \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y_0x + mx^2 - mx_0x = K \\ mx^2 - (mx_0 - y_0)x - x_0y_0 = 0 \end{array}$$

$$\Delta = (mx_0 - y_0)^2 + 4mx_0y_0 = 0 \qquad mx_0^2 + y_0^2 - 2mx_0y_0 + 4mx_0y_0 = 0$$

$$(mx_0+y_0)^2=0 \qquad m=-\frac{y_0}{x_0} \qquad y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

$$\frac{y-y_0}{y_0}+\frac{x-x_0}{x_0}=0 \qquad \frac{x}{x_0}-1+\frac{y}{y_0}-1=0$$

$$\boxed{\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=2} \text{ oppure } \boxed{y_0x+x_0y=2x_0y_0} \qquad (\rho)$$

Col metodo delle derivate abbiamo:

$$y=\frac{k}{x} \qquad y'(x)=-\frac{k}{x^2} \qquad y'(x_0)=-\frac{x_0y_0}{x_0^2}=-\frac{y_0}{x_0}$$

la tangente ha equazione:

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

che coincide con l'equazione (ρ)

Equazioni parametriche dell'iperbole :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\vartheta} = a\cdot\dfrac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \\ y = b\cdot tg\,\vartheta = b\cdot\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2} \end{cases}$$

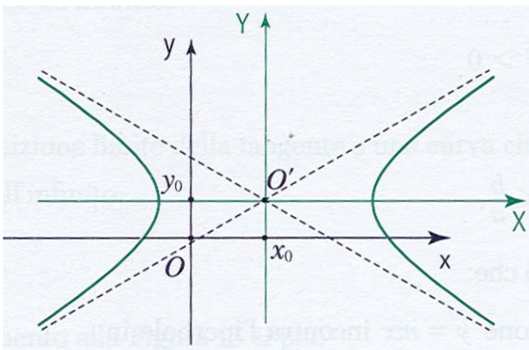
$$\begin{cases} \mathbf{x=a\cdot ch\,t} \\ \mathbf{y=b\cdot sh\,t} \end{cases} \qquad \mathbf{sh=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}=\frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}}} \qquad \mathbf{ch=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}=\frac{1+e^{-2x}}{2e^{-x}}}$$

sh = seno iperbolico   ch = coseno iperbolico

L'iperbole traslata

Una iperbole si dice traslata se i suoi assi sono paralleli agli assi cartesiani. Se $O'(x_o;y_o)$ **è il centro dell'iperbole traslata, allora la sua equazione è:**

$$\mathbf{\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1}$$



che, ridotta a forma canonica, diventa: $\mathbf{mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0}$ **con m ed n discordi**

($m \cdot n < 0$ **) e:** $\mathbf{x_o = -\frac{p}{2m}}$ $\mathbf{y_o = -\frac{q}{2n}}$ $F(x_o + c; y_o)$ $F'(x_o - c; y_o)$

Equazione canonica dell'iperbole traslata utilizzando il metodo del completamento dei quadrati

$\mathbf{mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0}$ $m \cdot n < 0$ **Supponiamo che sia:** $m > 0$ **ed** $n < 0$

$$m\left(x^2 + \frac{p}{m}x\right) + \left(y^2 + \frac{q}{n}y\right) = -r$$

$$m\left(x^2 + \frac{p}{m}x + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{p^2}{4m^2}\right) + \left(y^2 + \frac{q}{n}y + \frac{q^2}{4n^2} - \frac{q^2}{4n^2}\right) = -r$$

$$m\left(x + \frac{p}{2m}\right)^2 - \frac{p^2}{4m} + n\left(y + \frac{q}{2n}\right)^2 - \frac{q^2}{4n} = -r$$

$$m\left(x + \frac{p}{2m}\right)^2 + n\left(y + \frac{q}{2n}\right)^2 = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r = s$$

$$\frac{\left(x + \frac{p}{2m}\right)^2}{\frac{s}{m}} - \frac{\left(y + \frac{q}{2n}\right)^2}{-\frac{s}{n}} = 1 \qquad a^2 = \frac{s}{m} \qquad b^2 = -\frac{s}{n} \qquad x_o = -\frac{p}{2m} \qquad y_o = -\frac{q}{2n}$$

$$\mathbf{\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1}$$

Esempio numerico $\mathbf{9x^2 - 25y^2 - 18x - 150y + 9 = 0}$ $9(x^2 - 2x) - 25(y^2 + 6y) = -9$

$$9(x-1)^2 \cancel{-9} - 25(y+3)^2 + 225 = \cancel{-9} \qquad 9(x-1)^2 - 25(y+3)^2 = -225$$

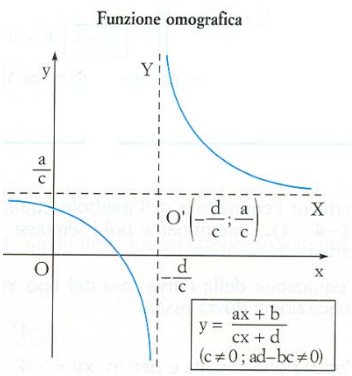
$$25(y+3)^2 - 9(x-1)^2 = 225 \qquad \mathbf{\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1}$$

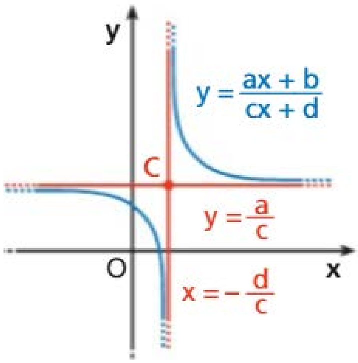
$x_o = 1$ $y_o = 3$ $a^2 = 25$ $b^2 = 9$ $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34$ $c = \sqrt{34}$

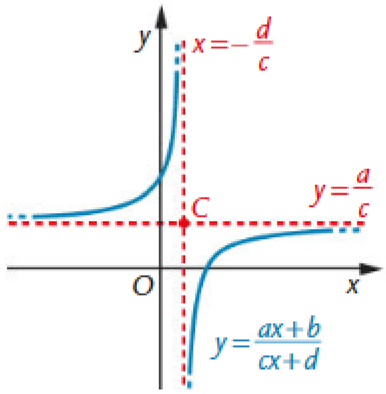
La funzione omografica

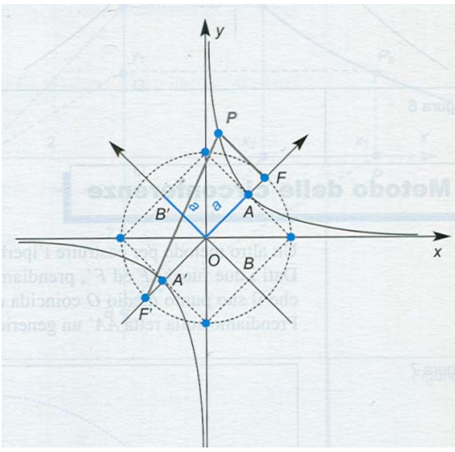
La funzione $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ **con** $c \neq 0 \quad \wedge \quad a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ **è detta funzione omografica.**

Il suo grafico γ **è una iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani.**









Il suo centro coincide col punto $\mathbf{O'}\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$

I suoi asintoti hanno equazioni: $\mathbf{x = -\dfrac{d}{c}} \quad \mathbf{y = \dfrac{a}{c}}$

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{b}{a}$; $y = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{b}{a}$ γ incontra gli assi cartesiani nei punti:

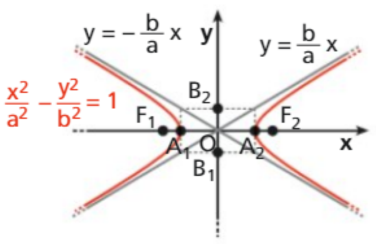
$$\mathbf{A}\left(0;\frac{b}{d}\right) \qquad \mathbf{B}\left(-\frac{b}{a};0\right)$$

Rispetto al riferimento cartesiano Oxy le coordinate dei vertici e dei fuochi dell'iperbole equilatera grafico della funzione omografica sono i seguenti:

$$A\left(\sqrt{|k|};\sqrt{|k|}\right), \qquad A'\left(-\sqrt{|k|};-\sqrt{|k|}\right), \qquad F\left(\sqrt{2|k|};\sqrt{2|k|}\right), \qquad F'\left(-\sqrt{2|k|};-\sqrt{2|k|}\right)$$

Equazione dell'iperbole

Fuochi sull'asse x



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **Equazione** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

Vertici

$A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$

Fuochi

$F_1(-c;0), F_2(c;0)$ $\quad c^2=a^2+b^2 \quad$ $F_1(0;-c), F_2(0;c)$

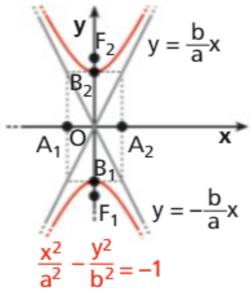
Asintoti

$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$

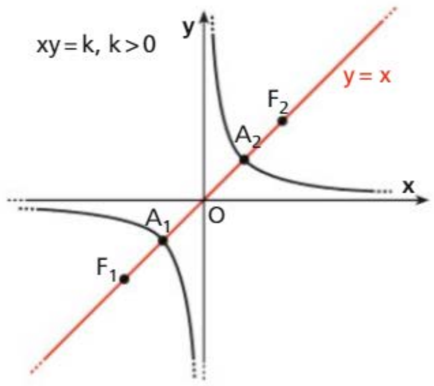
Eccentricità

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \qquad e>1 \qquad e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

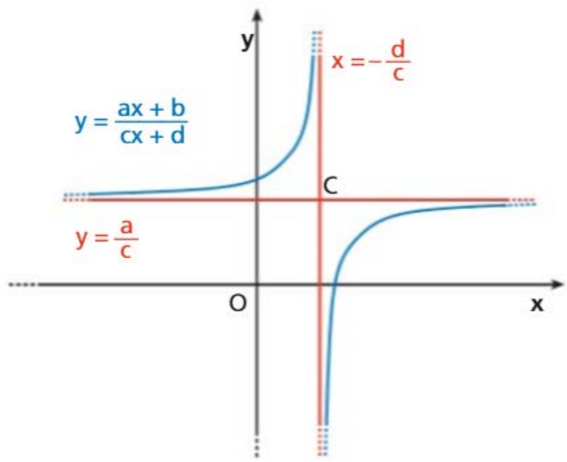
Fuochi sull'asse y



Iperbole equilatera e funzione omografica



Iperbole equilatera

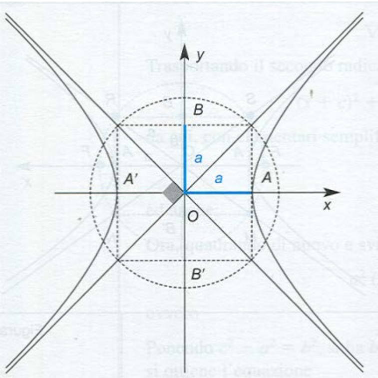


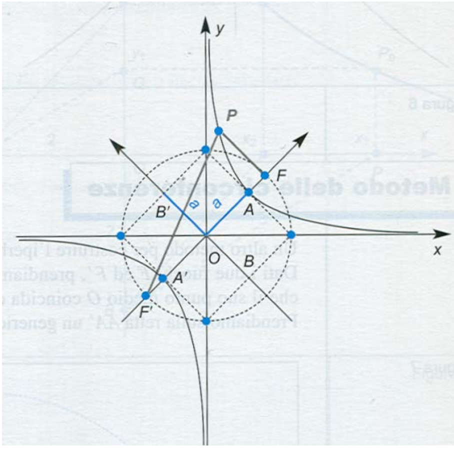
Funzione omografica

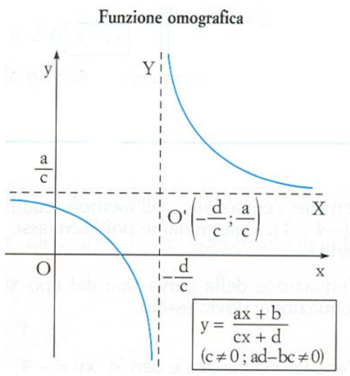
L'iperbole equilatera, l'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, la funzione omografica

$a=b \Rightarrow x^2-y^2=a^2$ equazione dell'iperbole equilatera. Risulta:

$\overline{OA}=a$, $\overline{OF}=a\sqrt{2}$, $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,a)$, $B'(0,-a)$, $F\left(a\sqrt{2},a\sqrt{2}\right)$, $F'\left(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2}\right)$







Posso riferire l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$ ai suoi asintoti mediante una rotazione (oraria oppure antioraria) di $45°$. Otteniamo un'equazione del tipo $xy = \pm\frac{a^2}{2} = k$ che è l'equazione di una iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti e con k numero reale relativo. Risulta, rispetto al riferimento Oxy:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a;\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),\ A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a;-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),\ F(a;a),\ F'(-a;-a) \text{ con } a=\sqrt{2|k|} \text{ e quindi:}$$

$$A\left(\sqrt{|k|};\sqrt{|k|}\right),\qquad A'\left(-\sqrt{|k|};-\sqrt{|k|}\right),\qquad F\left(\sqrt{2|k|};\sqrt{2|k|}\right),\qquad F'\left(-\sqrt{2|k|};-\sqrt{2|k|}\right)$$

Adesso effettuiamo la seguente traslazione di assi: $\begin{cases} x = X + \alpha = X - \frac{d}{c} \\ y = Y + \beta = Y + \frac{a}{c} \end{cases}$ ottenendo l'iperbole equilatera che è il grafico della funzione omografica $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

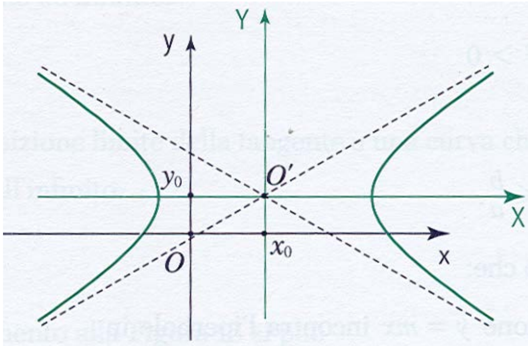
Rispetto al riferimento cartesiano Oxy abbiamo: $A\left(\alpha+\sqrt{|k|};\beta+\sqrt{|k|}\right)$, $A\left(-\frac{d}{c}+\sqrt{|k|};\frac{a}{c}+\sqrt{|k|}\right)$

$$A\left(\alpha-\sqrt{|k|};\beta-\sqrt{|k|}\right)\quad A'\left(-\frac{d}{c}-\sqrt{|k|};\frac{a}{c}-\sqrt{|k|}\right)$$

$$F(\alpha+a;\beta+a),\ F'(\alpha-a;\beta-a)\quad F\left(\alpha+\sqrt{2|k|};\beta+\sqrt{2|k|}\right),\qquad F'\left(\alpha-\sqrt{2|k|};\beta-\sqrt{2|k|}\right)$$

La funzione omografica

Una iperbole si dice traslata se i suoi assi sono paralleli agli assi cartesiani. Se $O'(x_o;y_o)$ è il centro dell'iperbole traslata, allora la sua equazione è:



$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x_o})^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{y_o})^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{1}$$

che, ridotta a forma canonica, diventa: $\mathbf{mx^2+ny^2+px+qy+r=0}$ con m ed n discordi $(m\cdot n<0)$

e: $\mathbf{x_o=-\frac{p}{2m}}$ $\quad \mathbf{y_o=-\frac{q}{2n}}$ $\qquad F(x_o+c;y_o)\ ..\ F'(x_o-c;y_o)$

Equazione canonica dell'iperbole traslata utilizzando il metodo del completamento dei quadrati

$\mathbf{mx^2+ny^2+px+qy+r=0}$ $m\cdot n<0$ **Supponiamo che sia:** $m>0$ **ed** $n<0$

$$m\left(x^2+\frac{p}{m}x\right)+\left(y^2+\frac{q}{n}y\right)=-r$$

$$m\left(x^2+\frac{p}{m}x+\frac{p^2}{4m^2}-\frac{p^2}{4m^2}\right)+\left(y^2+\frac{q}{n}y+\frac{q^2}{4n^2}-\frac{q^2}{4n^2}\right)=-r$$

$$m\left(x+\frac{p}{2m}\right)^2-\frac{p^2}{4m}+n\left(y+\frac{q}{2n}\right)^2-\frac{q^2}{4n}=-r$$

$$m\left(x+\frac{p}{2m}\right)^2+n\left(y+\frac{q}{2n}\right)^2=\frac{p^2}{4m}+\frac{q^2}{4n}-r=s$$

$$\frac{\left(x+\frac{p}{2m}\right)^2}{\frac{s}{m}}-\frac{\left(y+\frac{q}{2n}\right)^2}{-\frac{s}{n}}=1 \qquad a^2=\frac{s}{m} \qquad b^2=-\frac{s}{n} \qquad x_o=-\frac{p}{2m} \qquad y_o=-\frac{q}{2n}$$

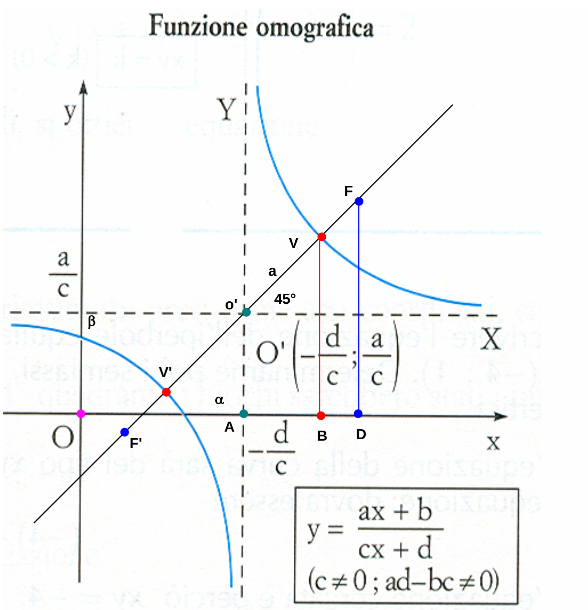
$$\frac{(\mathbf{x - x_o})^2}{\mathbf{a}^2} - \frac{(\mathbf{y - y_o})^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1}$$

Esempio numerico $9x^2 - 25y^2 - 18x - 150y + 9 = 0 \quad 9\left(x^2 - 2x\right) - 25\left(y^2 + 6y\right) = -9$

$9(x-1)^2 \cancel{-9} - 25(y+3)^2 + 225 = \cancel{-9} \qquad 9(x-1)^2 - 25(y+3)^2 = -225$

$$25(y+3)^2 - 9(x-1)^2 = 225 \qquad \frac{(\mathbf{y + 3})^2}{\mathbf{9}} - \frac{(\mathbf{x - 1})^2}{\mathbf{25}} = \mathbf{1}$$

$x_o = 1 \quad y_o = 3 \quad a^2 = 25 \quad b^2 = 9 \quad c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 \qquad c = \sqrt{34}$

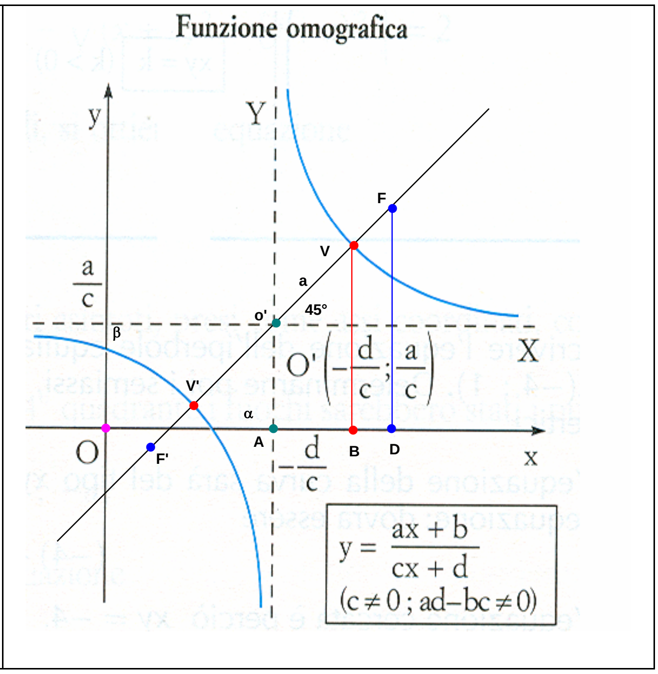


Come calcolare le coordinate del vertice, del fuoco e le equazioni degli assi di una iperbole equilatera grafico della funzione omografica

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

Esempio numerico: $y=\frac{x+2}{3x+4}$

$a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4$



Il centro dell'iperbole è il punto $O'(\alpha;\beta)\equiv\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ $\quad \overline{O'V}=a$, $\overline{O'F}=a\sqrt{2}$

Equazione di uno dei due assi: $y-\beta=(x-\alpha)$ Equazione dell'altro asse: $y-\beta=-(x-\alpha)$

Le coordinate dei due vertici dell'iperbole equilatera grafico della funzione omografica si ottengono risolvendo uno dei due seguenti sistemi: $\begin{cases} y=\frac{ax+b}{cx+d} \\ y-\beta=(x-\alpha) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\frac{ax+b}{cx+d} \\ y-\beta=-(x-\alpha) \end{cases}$

Per calcolare le coordinate dei due fuochi bisogna tenere presente quanto segue:

$$\frac{O'F}{O'V}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad O'F=O'V\cdot\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad AD=AB\cdot\sqrt{2}$$ (Teorema di Talete)

$$x_F-\alpha=(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2} \quad x_F=\alpha+(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2} \quad y_F=\alpha+(y_V-\alpha)\cdot\sqrt{2}$$

(stesso procedimento di prima, ma riferito all'asse y)

Per calcolare le coordinate dell'altro fuoco basta ricordare che O' è il punto medio del segmento FF'

. $\alpha=\frac{x_{F'}+x_F}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{F'}=2\alpha-x_F=2\alpha-\alpha-(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2}=\alpha-(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2}$

$$x_{F'}=\alpha-(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2} \qquad y_{F'}=\beta-(y_V-\beta)\cdot\sqrt{2}$$

Esempio numerico: $y=\frac{x+2}{3x+4} \quad a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4$

$\alpha=-\frac{d}{c}=-\frac{4}{3} \quad \beta=\frac{a}{c}=\frac{1}{3} \quad O'\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ = centro dell'iperbole equilatera

$y-\frac{1}{3}=\left(x+\frac{4}{3}\right) \quad 3x-3y+5=0$ equazione dell'asse trasverso

$y-\frac{1}{3}=-\left(x+\frac{4}{3}\right) \quad x+y+1=0$ equazione dell'asse non trasverso

Per calcolare le coordinate dei due vertici reali bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y-\beta=(x-\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dfrac{x+2}{3x+4} \\ 3x-3y+5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-4+\sqrt{2}}{3} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad V\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{3};\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-4-\sqrt{2}}{3} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad V'\left(\frac{-4-\sqrt{2}}{3};\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$$

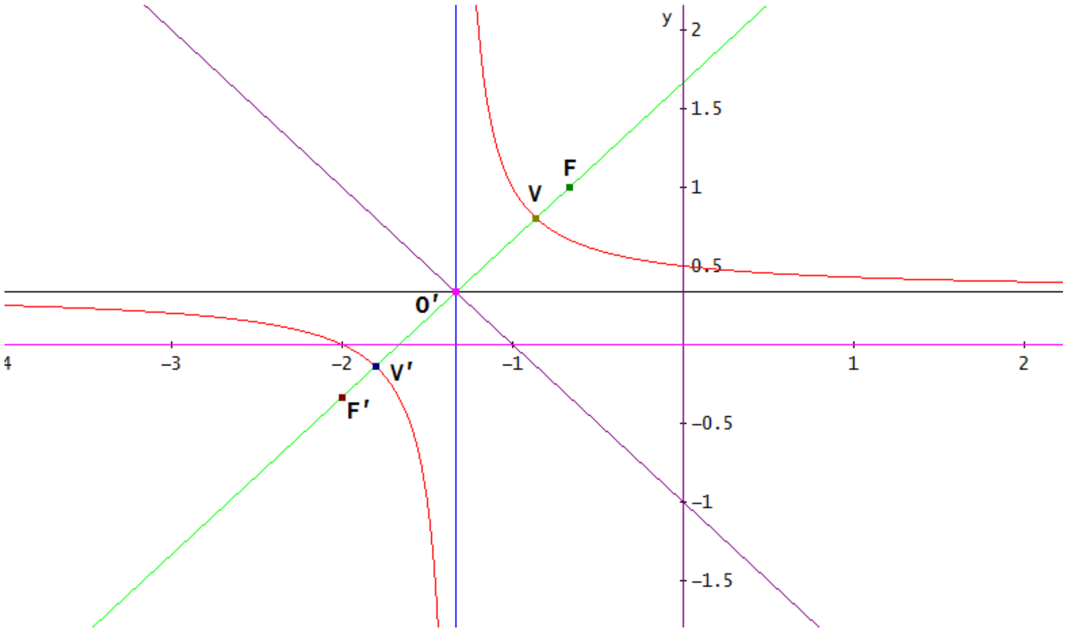
$x=-\frac{4}{3}$ = asintoto verticale $\quad y=\frac{1}{3}$ = asintoto orizzontale

$$x_F-\alpha=(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x_F=\alpha+(x_V-\alpha)\cdot\sqrt{2} \quad x_F=-\frac{4}{3}+\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{3}\right)\cdot\sqrt{2}$$

$x_F=-\frac{4}{3}+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\sqrt{2}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3} \qquad y_F=\alpha+(y_V-\alpha)\cdot\sqrt{2}=1$ oppure possiamo sostituire nell'equazione dell'asse traverso $F\left(-\frac{2}{3};1\right)$

$$\alpha=\frac{x_{F'}+x_F}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{3}=\frac{x_{F'}-\frac{2}{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{F'}=-2$$

$\beta=\frac{y_{F'}+y_F}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}=\frac{y_{F'}-\frac{1}{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{F'}=-\frac{1}{3}$ (oppure l'appartenenza all'asse traverso)



Gli elementi caratteristici dell'iperbole equilatera grafico della funzione omografica $\mathbf{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$

Voglio calcolare gli elementi caratteristici della funzione omografica $\mathbf{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$ considerando il caso particolare $\mathbf{y=\frac{x+2}{3x+4}}$ $(a=1,\ b=2\,,\ c=3\,,\ d=4)$. Il grafico della funzione omografica è una iperbole equilatera

$\mathbf{y=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}}$ è l'equazione dell'asintoto orizzontale dell'iperbole equilatera

$\mathbf{x=-\frac{d}{c}=-\frac{4}{3}}$ è l'equazione dell'asintoto verticale dell'iperbole equilatera

$O'\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ è il centro dell'iperbole equilatera

La traslazione definita dalla relazione $\begin{cases} \mathbf{x=X-\frac{d}{c}=X-\frac{4}{3}} \\ \mathbf{y=Y+\frac{a}{c}=Y+\frac{1}{3}} \end{cases}$ porta l'origine degli assi cartesiani nel punto $O'\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ che è l'intersezione degli asintoti dell'iperbole equilatera.

Assumo tali asintoti come nuovi assi cartesiani ($O'XY$) per il grafico della funzione omografica.

La suddetta traslazione trasforma la $\mathbf{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$ nella seguente relazione: $Y+\frac{a}{c}=\frac{a\left(X-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(X-\frac{d}{c}\right)+d}$

Eseguiti tutti i calcoli e le dovute semplificazioni otteniamo: $XY=\frac{bc-ad}{c^2}=k$ che, nel caso particolare, diventa: $\mathbf{XY}=\frac{6-4}{9}=\mathbf{\frac{2}{9}}=k$ che rappresenta una iperbole equilatera riferita agli asintoti

Poiché risulta $\mathbf{\frac{2}{9}}=k>0$ l'iperbole ha i suoi rami nel primo e nel terzo quadrante, se fosse $k<0$ l'iperbole avrebbe i suoi rami nel secondo e nel quarto quadrante

Nel riferimento cartesiano $O'XY$ abbiamo:

$a=\sqrt{2k}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ $\quad c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2$ $\quad \mathbf{c}=a\sqrt{2}=\mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$ in quanto si tratta di una iperbole equilatera

$F_1\left(\sqrt{2k},\sqrt{2k}\right) \Rightarrow \mathbf{F_1\left(X=\frac{2}{3},Y=\frac{2}{3}\right)}$ $\quad F_2\left(-\sqrt{2k},-\sqrt{2k}\right) \Rightarrow \mathbf{F_2\left(X=-\frac{2}{3},Y=-\frac{2}{3}\right)}$

L'asse trasverso ha equazione $Y=X$, mentre l'asse non trasverso ha equazione $Y=-X$

Le coordinate dei vertici dell'iperbole si ottengono risolvendo il seguente sistema:

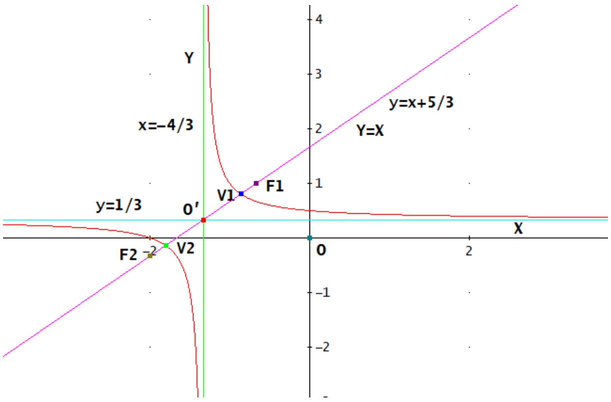
$$\begin{cases} Y=X \\ XY=\frac{2}{9} \end{cases} \quad X^2=\frac{2}{9} \quad X=\pm\frac{1}{3}\sqrt{2}=Y \quad \mathbf{V_1\left(\frac{1}{3}\sqrt{2},\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)} \quad \mathbf{V_2\left(-\frac{1}{3}\sqrt{2},-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)}$$

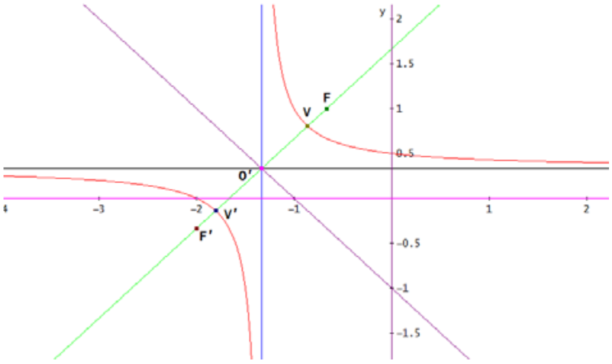
Nel riferimento cartesiano Oxy abbiamo: $F_1:\begin{cases} \mathbf{x=X-\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-2}{3} \\ \mathbf{y=Y+\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1 \end{cases}$ $\quad \mathbf{F_1\left(-\frac{2}{3},1\right)}$

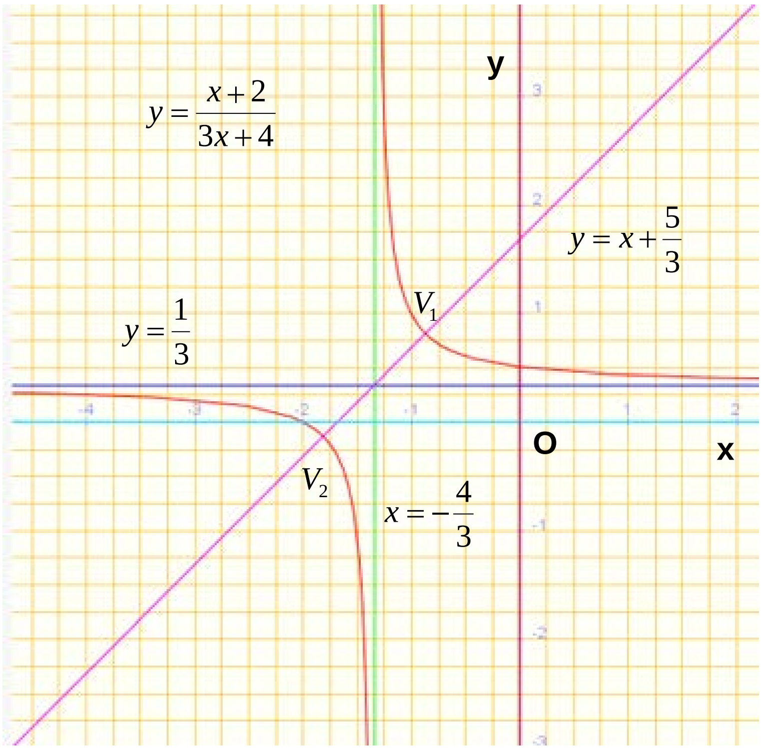
$$F_2:\begin{cases} \mathbf{x=X-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-6}{3}=-2 \\ \mathbf{y=Y+\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \mathbf{F_2\left(-2,-\frac{1}{3}\right)}$$

$$V_1 = \begin{cases} x = X - \dfrac{d}{c} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{-4+\sqrt{2}}{3} \\ y = Y + \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} \end{cases} \qquad \mathbf{V_1}\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$V_2 = \begin{cases} x = X - \dfrac{d}{c} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{-4-\sqrt{2}}{3} \\ y = Y + \dfrac{a}{c} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3} \end{cases} \qquad \mathbf{V_2}\left(\frac{-4-\sqrt{2}}{3}, \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)$$







Altro procedimento

- Voglio calcolare gli elementi caratteristici della funzione omografica $\mathbf{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$ considerando il caso particolare $\mathbf{y=\frac{x+2}{3x+4}}$ $(a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4)$. Il grafico della funzione omografica è una iperbole equilatera

- $\mathbf{y=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}}$ è l'equazione dell'asintoto orizzontale dell'iperbole equilatera

$\mathbf{x=-\frac{d}{c}=-\frac{4}{3}}$ è l'equazione dell'asintoto verticale dell'iperbole equilatera

$C\equiv O'\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ è il centro dell'iperbole equilatera

- $\mathbf{y-y_C=x-x_C}$ è l'equazione dell'asse trasverso dell'iperbole se i suoi rami si sviluppano nel primo e nel terzo quadrante

$\mathbf{y-y_C=-(x-x_C)}$ è l'equazione dell'asse trasverso dell'iperbole se i suoi rami si sviluppano nel secondo e nel quarto quadrante

- Le coordinate dei suoi vertici si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases}\mathbf{y=\frac{ax+b}{cx+d}}\\ \mathbf{y-y_C=x-x_C}\end{cases}\quad \begin{cases}\mathbf{y=\frac{x+2}{3x+4}}\\ \mathbf{y-\frac{1}{3}=x+\frac{4}{3}}\end{cases}\quad 9x^2+24x+14=0\quad \mathbf{V_1\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{3},\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)}\quad \mathbf{V_2\left(\frac{-4-\sqrt{2}}{3},\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)}$$

- $\mathbf{a}=O'V_1=O'V_2=\sqrt{\left(x_{V_1}-x_{O'}\right)^2+\left(y_{V_1}-y_{O'}\right)^2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$

- $c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2\quad \mathbf{c}=a\sqrt{2}=\mathbf{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$ in quanto si tratta di una iperbole equilatera

- Applico il teorema di Talete al fascio di rette parallele $O'A_1,V_1B,F_1D$; ottengo:

$$\frac{O'F_1}{O'V_1}=\frac{AD}{AB}\ \Rightarrow\ \frac{c}{a}=\frac{x_{F_1}-x_{O'}}{x_{V_1}-x_{O'}}\ \Rightarrow\ \frac{a\sqrt{2}}{a}=\frac{x_{F_1}+\frac{4}{3}}{\frac{-\cancel{4}+\sqrt{2}}{3}+\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}=\frac{x_{F_1}+\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\quad x_{F_1}=-\frac{2}{3}\quad y_{F_1}=1$$

$$y=\frac{1}{3}+x+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{3}{3}=1$$

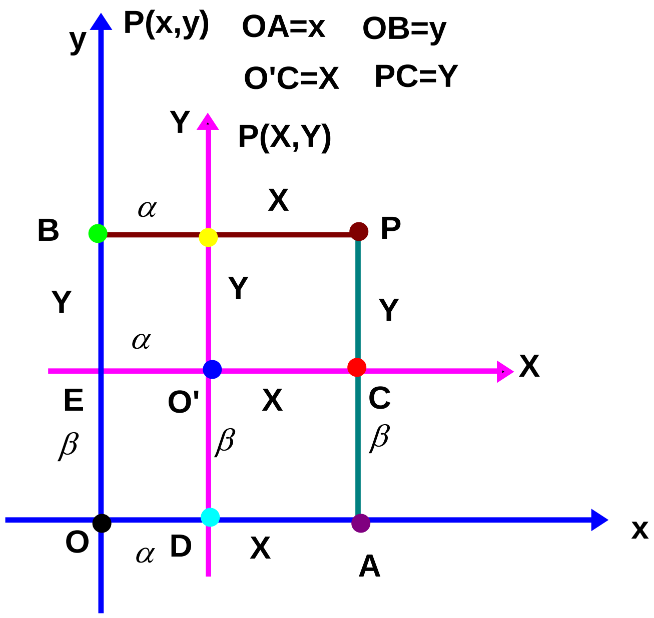
L'altro fuoco F_2 può essere calcolato ricordando che il centro dell'iperbole è il punto medio del segmento F_1F_2.

$$x_{O'}=\frac{x_{F_1}+x_{F_2}}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{4}{3}=\frac{x_{F_2}-\frac{2}{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad x_{F_2}=-2$$

$$y_{O'}=\frac{y_{F_1}+y_{F_2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}=\frac{y_{F_2}+1}{2} \quad\Rightarrow\quad y_{F_2}=-\frac{1}{3}$$ (oppure l'appartenenza all'asse traverso)

La traslazione degli assi cartesiani

La traslazione di equazione $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$ trasforma il sistema di assi cartesiani Oxy nel sistema di assi cartesiani $O'XY$. Trasforma pure il punto $P(x,y)$ nel punto $P(X,Y)$. Trasforma il grafico della funzione omografica $\mathbf{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$ nell'iperbole equilatera $XY=\frac{bc-ad}{c^2}=k$ riferita ai suoi asintoti.



Altro procedimento per trasformare la funzione omografica $\mathbf{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$ nell'iperbole equilatera $XY=\frac{bc-ad}{c^2}=k$ riferita ai propri asintoti. Caso particolare:

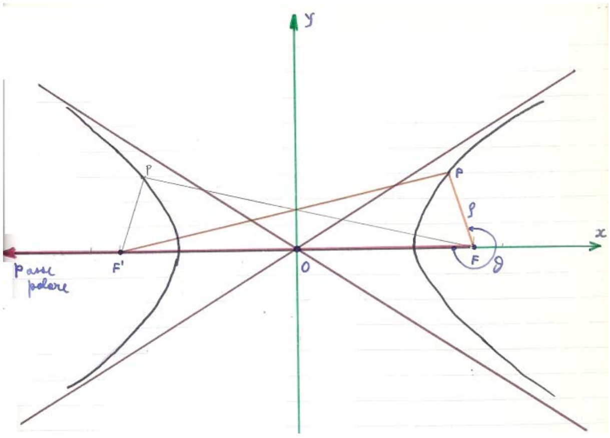
$$\mathbf{y=\frac{x+2}{3x+4}} \Rightarrow y=\frac{1}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3x+4} \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3(3x+4)} \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{2}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{9} \Rightarrow XY=\frac{2}{9} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x+\frac{4}{3}=X \\ y-\frac{1}{3}=Y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x=X-\frac{4}{3} \\ y=Y+\frac{1}{3} \end{cases}$$

dove $C\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ è il centro dell'iperbole equilatera grafico della funzione omografica.

Equazione polare dell'iperbole

Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, si assuma come polo il fuoco $F(c,0)$ (con $c>0$) e come asse polare l'asse focale orientato da F verso la corrispondente direttrice (quindi in senso opposto all'asse x).



Dalla definizione di iperbole abbiamo: $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$ (in quanto per i punti di questo ramo risulta $\overline{PF'}>\overline{PF}$) $\Rightarrow$ $\overline{PF'}=2a+\rho$ $\quad [14]$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo PFF' otteniamo:

$$\overline{PF'}^2=\overline{PF}^2+\overline{FF'}^2-2\overline{PF}\cdot\overline{FF'}\cdot\cos F'\hat{F}P \qquad (2a+\rho)^2=\rho^2+4c^2-4c\rho\cos(2\pi-\vartheta)$$

$$4a^2+\rho^2+4a\rho=\rho^2+4c^2-4c\rho\cos \qquad 4a^2+4a\rho=4c^2-4c\rho\cos \qquad a^2+a\rho=c^2-c\rho\cos$$

$$\rho(c\cdot\cos\vartheta+a)=c^2-a^2 \qquad c^2-a^2=b^2$$

$$\rho=\frac{b^2}{c\cdot\cos\vartheta+a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cdot\cos\vartheta}$$ Ponendo: $\frac{b^2}{a}=p$ $\quad \frac{c}{a}=e=$ eccentricità abbiamo:

[15] $\rho=\dfrac{p}{1+e\cdot\cos\vartheta}$ equazione polare di un ramo di iperbole

Se P appartiene al ramo che non avvolge il polo abbiamo:

$\overline{PF}-\overline{PF'}=2a$ (in quanto per i punti di questo ramo risulta $\overline{PF}>\overline{PF'}$) $\Rightarrow$ $\overline{PF'}=\rho-2a$

La [15] diventa: [16] $\rho=\dfrac{p}{-1+e\cdot\cos\vartheta}$ equazione polare dell'altro ramo di iperbole

Equazione generale di una conica traslata

Definiamo conica la curva □, luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate cartesiane $(x;y)$ verificano una equazione di secondo grado nelle incognite x ed y, cioè verificano una equazione del tipo: $f(x;y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ [1] con $a,b,c,d,e,f,\in R$

Se nell'equazione [1] mancano i termini lineare dx e ey allora il centro della conica coincide con l'origine degli assi cartesiani; se manca il termine rettangolare bxy allora gli assi della conica sono paralleli agli assi cartesiani.

Nella teoria delle coniche sono importanti i valori delle due seguenti espressioni:

$\mathcal{J}=a+c$ = invariante lineare $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2$ = invariante quadratico

Valgono le seguenti considerazioni:

(1) $\Delta=ac-b^2>0$ la conica è una ellisse

(2) $\Delta=ac-b^2<0$ la conica è una iperbole ; se poi risulta $\mathcal{J}=a+c=0$ l'iperbole è equilatera

(3) $\Delta=ac-b^2=0$ la conica è una parabola

(4) Mediante una opportuna traslazione ed una opportuna rotazione l'equazione generale $f(x;y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ della conica può essere ridotta ad una delle seguenti forme: $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$ (ellisse) $\frac{X^2}{A^2}-\frac{Y^2}{B^2}=1$ (iperbole) $Y^2=2pX$ (parabola)

La circonferenza, l'ellisse e l'iperbole sono coniche a centro**; la parabola non è una conica a centro.**

Le coordinate (α,β) del centro C di una conica a centro si ottengono risolvendo il seguente sistema: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2ax+by+d=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=bx+2cy+e=0 \end{cases}$ $C(\alpha;\beta)$

La traslazione $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$ trasporta l'origine degli assi cartesiani nel centro $C(\alpha,\beta)$ della conica.

La sua equazione assume la seguente forma: $AX^2+BXY+CY^2+F=0$

Per ricavare la forma canonica della conica basta applicare una opportuna rotazione degli assi cartesiani CXY.

Osservazioni

(1) $b\neq 0$ gli assi della conica non sono paralleli agli assi cartesiani

(2) $b=0$ gli assi della conica sono paralleli agli assi cartesiani e la sua equazione diventa:

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$$

Si tratta dell'equazione generale di una conica traslata per la quale valgono le seguenti considerazioni:

(1) $a=c \Rightarrow ax^2+ay^2+dx+ey+f=0$ Si tratta di una circonferenza

(2) $a=0\ ;\ c\neq 0 \Rightarrow cy^2+dx+ey+f=0$ si tratta di una parabola ad asse orizzontale

(3) $a\neq 0\ ;\ c=0 \Rightarrow ax^2+dx+ey+f=0$ si tratta di una parabola ad asse verticale

(4) $a=c=0 \Rightarrow dx+ey+f=0$ la conica degenera in una retta

(5) $\mathbf{a \neq c \neq 0}$ • $\mathbf{a \cdot c < 0}$ la conica è una iperbole • $\mathbf{a \cdot c > 0}$ la conica è una ellisse

Ellisse

$\mathbf{x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0}$ $\mathbf{a \cdot c = 1 \cdot 4 = 4 > 0}$ si tratta di una ellisse

$A(7;-1)$ $A'(-3;-1)$ $B\left(2;\frac{3}{2}\right)$, $B'\left(2;-\frac{7}{2}\right)$ vertici dell'ellisse

Per calcolare le coordinate del suo centro bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8y + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad C(2;-1) \text{ centro dell'ellisse}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0} \\ y = -1 \end{cases} \quad A(7;-1),\ A'(-3;-1) \quad \begin{cases} \mathbf{x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0} \\ x = 2 \end{cases} \quad B\left(2;\frac{3}{2}\right) \quad B'\left(2;-\frac{7}{2}\right)$$

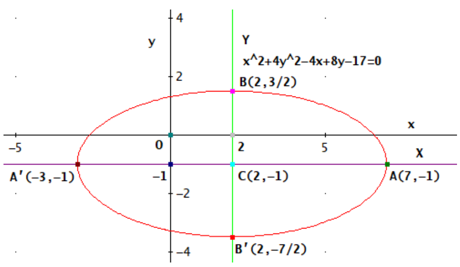
Mediante la seguente traslazione degli assi cartesiani $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$ troviamo l'equazione canonica dell'ellisse.

$$(X+2)^2 + 4(Y-1)^2 - 4(X+2) + 8(Y-1) - 17 = 0 \quad \mathbf{X^2 + 4Y^2 = 25} \quad \mathbf{\frac{Y^2}{25} + \frac{Y^2}{\frac{25}{4}} = 1} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Possiamo trovare lo stesso risultato utilizzando il metodo del completamento dei quadrati

$$\mathbf{x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 17 = 0} \quad (x^2 - 4x) + 4(y^2 + 2y) - 17 = 0 \quad (x^2 - 4x + \mathbf{4}) + \mathbf{4}(y^2 + 2y + \mathbf{1}) - \mathbf{4} - \mathbf{4} - 17 = 0$$

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2\ 25 \quad \mathbf{X^2 + 4Y^2 = 25} \quad \mathbf{\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{\frac{25}{4}} = 1} \quad \text{avendo posto:} \begin{cases} x - 2 = X \\ y + 1 = Y \end{cases} \quad \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$



Iperbole

$\mathbf{4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0}$ $\quad \mathbf{a \cdot c = 4 \cdot (-9) = -36 < 0}$ si tratta di una iperbole

Per calcolare le coordinate del suo centro bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8y + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad C(2;3)$$ centro dell'iperbole $A(5;3)$ $A'(-1;3)$ vertici

Mediante la seguente traslazione degli assi cartesiani $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$ troviamo l'equazione canonica dell'iperbole.

$$4(X+2)^2 - 9(Y+4)^2 - 16(X+2) + 54(Y+1) - 101 = 0 \quad \mathbf{4X^2 - 9Y^2 = 36} \quad \mathbf{\frac{Y^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

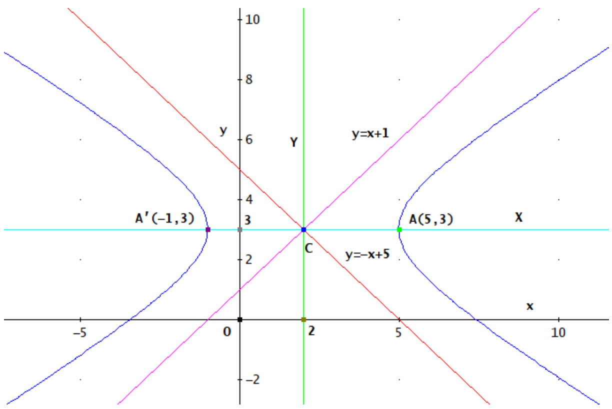
Possiamo trovare lo stesso risultato utilizzando il metodo del completamento dei quadrati

$\mathbf{4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0}$ $\quad 4\left(x^2 - 4x\right) - 9\left(y^2 - 6y\right) - 101 = 0$

$$4\left(x^2 - 4x + \mathbf{4}\right) - 9\left(y^2 - 6y + \mathbf{9}\right) - \mathbf{16} - \mathbf{81} - 101 = 0$$

$$4(x-2)^2 - 9(y-2)^2 = 36 \quad \mathbf{4X^2 - 9Y^2 = 36} \quad \mathbf{\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

avendo posto: $\begin{cases} x - 2 = X \\ y - 3 = Y \end{cases}$ $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$ $y = x + 1$ $\quad y = -x + 5$ asintoti dell'iperbole



Equazione canonica dell'iperbole traslata utilizzando il metodo del completamento dei quadrati

$\mathbf{mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0}$ $\quad m \cdot n < 0$ **Supponiamo che sia:** $m > 0$ **ed** $n < 0$

$$m\left(x^2 + \frac{p}{m}x\right) + \left(y^2 + \frac{q}{n}y\right) = -r$$

$$m\left(x^2 + \frac{p}{m}x + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{p^2}{4m^2}\right) + \left(y^2 + \frac{q}{n}y + \frac{q^2}{4n^2} - \frac{q^2}{4n^2}\right) = -r$$

$$m\left(x + \frac{p}{2m}\right)^2 - \frac{p^2}{4m} + n\left(y + \frac{q}{2n}\right)^2 - \frac{q^2}{4n} = -r$$

$$m\left(x + \frac{p}{2m}\right)^2 + n\left(y + \frac{q}{2n}\right)^2 = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r = s$$

$$\frac{\left(x + \frac{p}{2m}\right)^2}{\frac{s}{m}} - \frac{\left(y + \frac{q}{2n}\right)^2}{-\frac{s}{n}} = 1 \qquad a^2 = \frac{s}{m} \quad b^2 = -\frac{s}{n} \quad \alpha = -\frac{p}{2m} \quad \beta = -\frac{q}{2n}$$

$$\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})^2}{\mathbf{a}^2} - \frac{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta})^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1} \qquad C(\alpha, \beta) \text{ centro dell'iperbole}$$

Esempio numerico $\mathbf{9x^2 - 25y^2 - 18x - 150y + 9 = 0}$ $\quad 9\left(x^2 - 2x\right) - 25\left(y^2 + 6y\right) = -9$

$$9(x-1)^2 \cancel{-9} - 25(y+3)^2 + 225 = \cancel{-9} \qquad 9(x-1)^2 - 25(y+3)^2 = -225$$

$$25(y+3)^2 - 9(x-1)^2 = 225$$

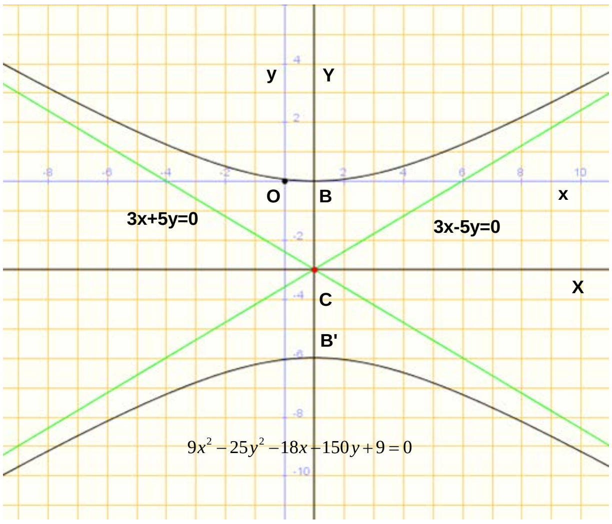
$$\frac{(\mathbf{y} + \mathbf{3})^2}{\mathbf{9}} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{1})^2}{\mathbf{25}} = \mathbf{1}$$

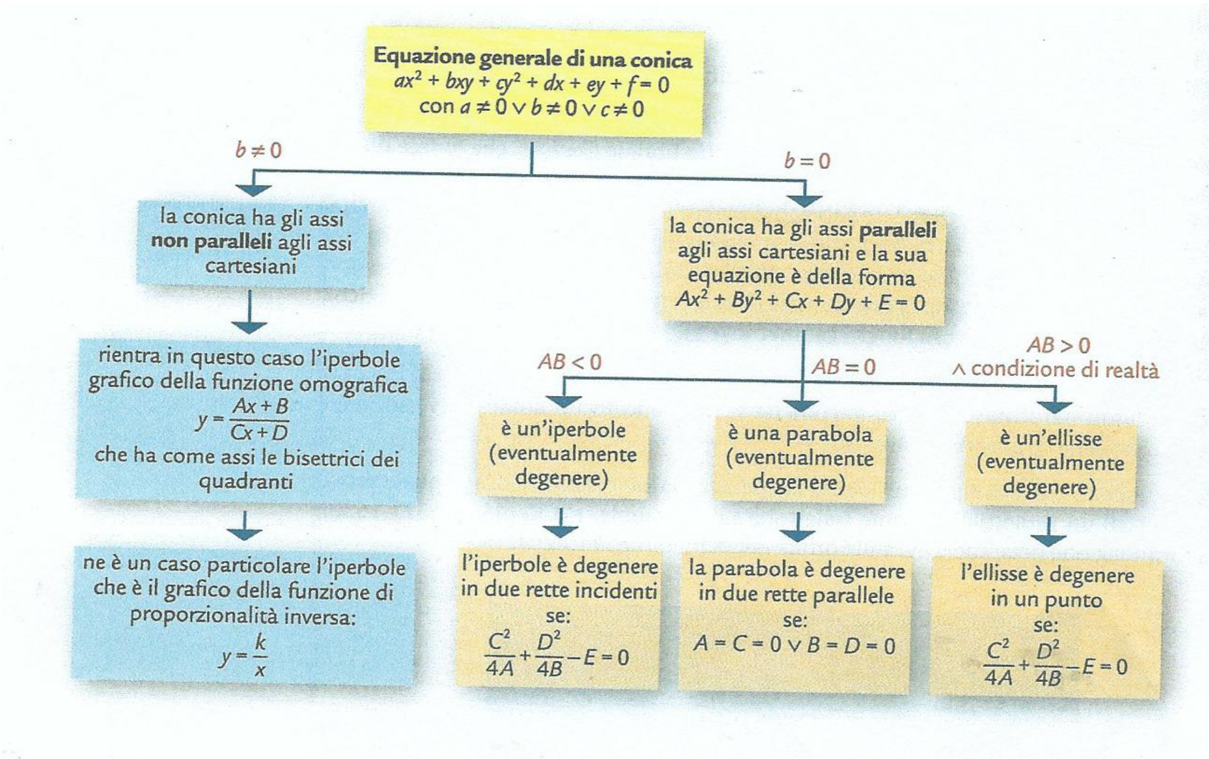
$\alpha = 1 \quad \beta = -3 \quad a^2 = 25 \quad a = 5$

$b^2 = 9 \quad b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34 \quad c = \sqrt{34}$

$\mathbf{C(1;-3)}$





Equazione generale di una conica a centro.

Invarianti ortogonali

Definiamo conica la curva γ, luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate cartesiane $(x;y)$ verificano una equazione di secondo grado nelle incognite x ed y, cioè verificano una equazione del tipo: $\mathbf{f(x;y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0}$ [1] con $a,b,c,d,e,f,\in R$ [i]

Se nell'equazione [1] mancano i termini lineare $2dx$ e $2ey$ allora il centro della conica coincide con l'origine degli assi cartesiani; se manca il termine rettangolare $2bxy$ allora gli assi della conica sono paralleli agli assi cartesiani.

Nella teoria delle coniche sono importanti i valori delle tre seguenti espressioni:

$$\mathcal{I} = \mathbf{a + c} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{e} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \end{vmatrix}$$

Le tre espressioni I, Δ, A prendono il nome, rispettivamente, di invariante lineare, invariante quadratico, invariante cubico del polinomio: $\mathbf{f(x;y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f}$

Teorema: Scegliendo in modo opportuno il sistema di riferimento cartesiano, cioè scegliendo una opportuna traslazione ed una opportuna rotazione, un'equazione di secondo grado nelle due variabili x ed y: $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ si può sempre ridurre ad una delle seguenti forme canoniche:

1) $\mathbf{\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1}$ **(ellisse)** 2) $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=-1$ **(ellisse immaginaria)** 3) $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=0$ **(punto immaginario)** 4) $\mathbf{\frac{X^2}{A^2}-\frac{Y^2}{B^2}=1}$ **(iperbole)** 5) $\frac{X^2}{A^2}-\frac{Y^2}{B^2}=0$ **(coppia di rette incidenti)**

6) $\mathbf{Y^2=2pX}$ **(parabola)** 7) $X^2-A^2=0$ **(coppia di rette parallele)** 8) $X^2+A^2=0$ **(coppia di rette immaginarie parallele** 9) $X^2=0$ **(coppia di rette coincidenti)**

La circonferenza, l'ellisse e l'iperbole sono coniche a centro; la parabola non è una conica a centro.

Teorema: **Una conica di equazione** $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ **è degenere se, e soltanto se, il suo invariante cubico** $A=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$ **è nullo.**

Se tale invariante è diverso da zero $A=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}\neq 0$ **allora la conica è non degenere. In particolare è a) una ellisse se** $\Delta=\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}>0$ **b) una iperbole se** $\Delta=\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}<0$

c) una parabola se $\Delta=\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}=0$ **.**

Teorema: **La conica di equazione** $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$**, qualora sia reale e non degenere, è un'iperbole equilatera se, e soltanto se, risulta** $\mathcal{J}=\mathbf{a+c=0}$

Teorema: **Un'ellisse è reale se** $I \cdot A < 0$ **è immaginaria se risulta:** $I \cdot A > 0$

Possiamo sintetizzare quanto scritta finora nella seguente tabelle:

	$A \neq 0$	$A = 0$
$\Delta > o$	ellisse $\begin{cases} \text{reale se} & I \cdot A < 0 \\ \text{immaginaria se} & I \cdot A > 0 \end{cases}$	**Punto**
$\Delta < o$	**Iperbole** **Iperbole equilatera se risulta pure** $I = 0$	**Rette incidenti** **Rette** $\perp$ **se risulta** $I = 0$
$\Delta = o$	**Parabola**	**Rette parallele** **(Reali o immaginarie)**

Coniche a centro

Si chiama centro di una conica il punto del piano, se esiste, rispetto al quale la conica è simmetrica, cioè il centro di una conica coincide con l'eventuale centro di simmetria della conica. La circonferenza, l'ellisse e l'iperbole sono coniche a centro, la parabola non è una conica a centro.

● Assumendo gli assi cartesiani ortogonali in posizione particolare rispetto ad una conica non degenere, l'equazione di questa assume una forma particolarmente semplice. Per le coniche a centro (ellisse, iperbole) conviene assumere come origine degli assi il centro della conica e per assi cartesiani ortogonali gli assi di simmetria della conica.

Per la parabola conviene assumere come origine il vertice e come assi cartesiani ortogonali l'asse della parabola e la tangente ad essa nel vertice.

● Se nell'equazione di una conica mancano i termini lineari il suo centro coincide con l'origine degli assi cartesiani.

● Se nell'equazione di una conica manca il termine rettangolare $x \cdot y$ gli assi della conica sono paralleli agli assi cartesiani ortogonali, e coincidono con essi quando mancano anche i termini lineari; in quest'ultimo caso l'equazione della conica è già ridotta a forma canonica.

Teorema: Un punto C è centro della conica γ di equazione [1] se, e soltanto se, le sue coordinate $(\alpha;\beta)$ verificano il seguente sistema: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by + d = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = bx + cy + e = 0 \end{cases}$

Tale sistema è compatibile soltanto se $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$

Individuato il centro $C(\alpha;\beta)$ della conica di equazione [1] si effettua la seguente traslazione di vettore $\vec{v} = (\alpha;\beta)$ le cui equazioni sono: $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$

Con la suddetta conica che trasporta l'origine degli assi cartesiani nel centro di simmetria $C(\alpha;\beta)$, l'equazione della conica assume la seguente forma priva dei due termini lineari:

$$\mathbf{aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0} \qquad \textbf{con} \qquad \mathbf{F = \frac{A}{\Delta}}$$

Se non posso applicare il teorema precedente che ci porta a risolvere il sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by + d = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = bx + cy + e = 0 \end{cases}$**, allora debbo applicare la traslazione** $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ **ed imporre che siano nulli i coefficienti dei termini lineari dell'equazione trasformata. Otteniamo un sistema di primo grado nelle incognite α e β . Sostituiamo la soluzione $(\alpha;\beta)$ nell'equazione trasformata ottenendo una equazione di secondo grado nelle incognite x ed y priva dei termini lineari.**

Esempio: Verificare che l'equazione $\mathbf{3x^2-6xy+2y^2-4x+2y+1=0}$ rappresenta una conica a centro e trasformare l'equazione con una traslazione di assi la cui nuova origine è il centro della conica.

$$A=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$ **Si tratta di una conica non degenere**

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=6-9=-3<0$$ **Si tratta di una iperbole**

Risolvendo il sistema $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x-3y-2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-3x+2y+1=0 \end{cases}$ **troviamo le coordinate** $(\alpha;\beta)$ **del centro della conica.** $\begin{cases} x=\alpha=-\dfrac{1}{3} \\ y=\beta=-1 \end{cases}$ $\mathbf{C\left(-\dfrac{1}{3};-1\right)}$

La traslazione di equazioni $\begin{cases} \mathbf{x=X-\dfrac{1}{3}} \\ \mathbf{y=Y-1} \end{cases}$ **fa assumere alla nostra conica la seguente forma:**

$$3\left(X-\frac{1}{3}\right)^2-6\left(X-\frac{1}{3}\right)\cdot(Y-1)+2(Y-1)^2-4\left(X-\frac{1}{3}\right)+2(Y-1)+1=0$$

Semplificando otteniamo: $\mathbf{9X^2-18XY+6Y^2+2=0}$ **il cui centro C è l'origine del nuovo sistema di assi cartesiani ortogonali** CXY **.**

Se non possiamo utilizzare le equazioni $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by + d = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = bx + cy + e = 0 \end{cases}$ **allora utilizziamo la traslazione di vettore** $\vec{v} = (\alpha;\beta)$ **le cui equazioni sono:** $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ **. Le equazioni della conica trasformata sono:**

$$3(X+\alpha)^2 - 6(X+\alpha)\cdot(Y+\beta) + 2(Y+\beta)^2 - 4(X+\beta) + 2(Y+\beta) + 1 = 0$$

Sviluppando e semplificando otteniamo:

$$\mathbf{3x^2 - 6xy + 2y^2 + 2(3\alpha - 3\beta - 2)x - 2(3\alpha - 2\beta - 1)y + 3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 1 = 0}$$

Annullando i coefficienti dei termini lineari otteniamo il sistema $\begin{cases} 3\alpha - 3\beta - 2 = 0 \\ -3\alpha + 2\beta + 1 = 0 \end{cases}$ **già trovato in precedenza.**

Altra risoluzione: Poiché due curve che si corrispondono in una simmetria centrale sono uguali, possiamo trasformare la nostra conica mediante la seguente simmetria centrale $\begin{cases} x = -X + 2\alpha \\ y = -Y + 2\beta \end{cases}$ **di centro** $C(\alpha;\beta)$ **Poi imponiamo che le due equazioni abbiano uguali i coefficienti dei termini simili. Nel caso nostro otteniamo:**

$$3(-X+2\alpha)^2 - 6(-X+2\alpha)\cdot(-y+2\beta) + 2(-y+2\beta)^2 - 4(-X+2\alpha) + 2(-y+2\beta) + 1 = 0$$

Sviluppando e semplificando otteniamo:

$$3X^2 - 6XY + 2Y^2 - 4(3\alpha - 3\beta - 1)X + 2(6\alpha - 4\beta - 1)Y + 12\alpha^2 - 24\alpha\beta + 8\beta^2 - 8\alpha + 4\beta + 1 = 0$$

Imponendo l'uguaglianza dei coefficienti dei termini simili otteniamo:

$\begin{cases} -4(3\alpha - 3\beta - 1) = 4 \\ 2(6\alpha - 4\beta - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ **che ci dà lo stesso risultato di prima**

Riduzione dell'equazione di una conica a centro alla sua forma canonica

In precedenza abbiamo visto che, data una conica a centro di equazione

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

e determinato il suo centro $C(\alpha;\beta)$ **mediante la traslazione di equazioni** $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$

perveniamo all'equazione $\mathbf{aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0}$ **[2] con** $F = \frac{A}{\Delta}$**; i8n questa circostanza i nuovi assi cartesiani sono** CXY**. L'equazione [2] rappresenta una conica a centro con gli assi ruotati di un angolo** ϑ **rispetti agli assi cartesiani** CXY**.**

Una ulteriore semplificazione dell'equazione [2] si ha con la seguente trasformazione delle coordinate $\begin{cases} \mathbf{X = \overline{x} \cdot \cos\vartheta - \overline{y} \cdot \sin\vartheta} \\ \mathbf{Y = \overline{x} \cdot \sin\vartheta + \overline{y} \cdot \cos\vartheta} \end{cases}$ **[3] che corrisponde ad una rotazione degli assi di un angolo** ϑ**. I nuovi assi cartesiani sono** $C\,\overline{x}\,\overline{y}$**. Otteniamo la seguente equazione trasformata:**

$$a\left(\underline{x} \cdot \cos\vartheta - \overline{y} \cdot \sin\vartheta\right)^2 + 2b\left(\overline{x} \cdot \cos\vartheta - \overline{y} \cdot \sin\vartheta\right) \cdot \left(\overline{x} \cdot \sin\vartheta + \overline{y} \cdot \cos\vartheta\right) + c\left(\overline{x} \cdot \sin\vartheta + \overline{y} \cdot \cos\vartheta\right)^2 + F = 0$$

Sviluppando, semplificando ed imponendo che il coefficiente del termine rettangolare sia nullo otteniamo: $\mathbf{(c - a) \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta + b \cdot \cos^2\vartheta - b \cdot \sin^2\vartheta = 0}$

Dividendo ambo i membri per $-\cos^2\vartheta$ **otteniamo:** $\mathbf{b \cdot tg^2\vartheta - (c - a) \cdot tg\,\vartheta - b = 0}$ **[4]**

Risolta questa equazione di secondo grado in $tg\,\vartheta$**, considerata la soluzione più conveniente ci calcoliamo:** $\mathbf{\sin\vartheta = \frac{tg\,\vartheta}{\pm\sqrt{1 + tg^2\vartheta}}}$ $\mathbf{\cos\vartheta = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2\vartheta}}}$ **[5]**

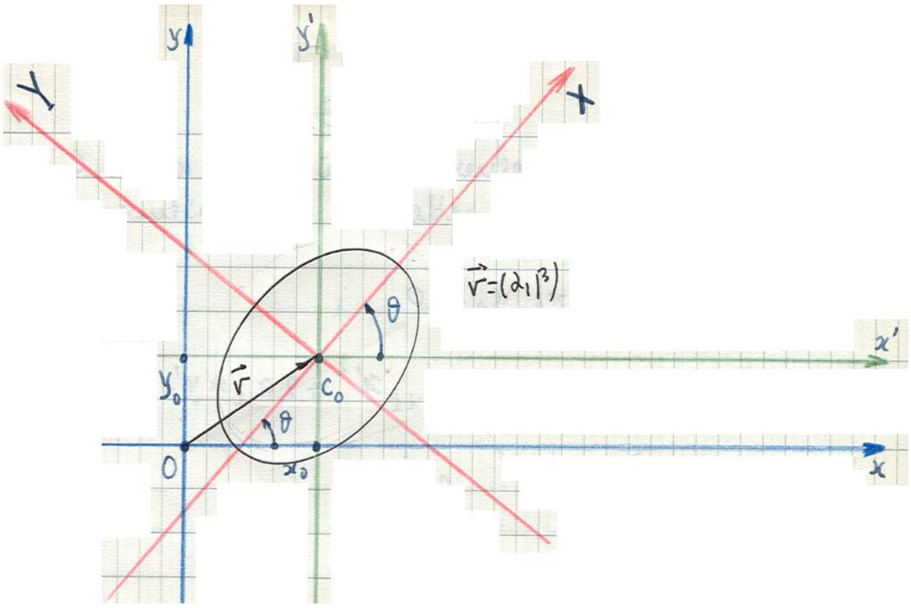
Sostituiamo questi valori nell'equazione trasformata ottenendo:

$$\mathbf{A \cdot \overline{x}^2 + B \cdot \overline{y}^2 + F = 0} \qquad [6]$$

che rappresenta l'equazione canonica richiesta riferita al sistema di assi cartesiani ortogonali $C\,\overline{x}\,\overline{y}$**. Non è superfluo ricordare che dette** $tg\,\vartheta_1$ **e** $tg\,\vartheta_2$ **le soluzioni dell'equazione [4] dovrà risultare sempre** $tg\,\vartheta_1 \cdot tg\,\vartheta_1 = -1$ **in quanto gli assi di una conica a centro sono perpendicolari**

fra loro. $m_1 = tg\,\vartheta_1$ **e** $m_2 = tg\,\vartheta_2$ **sono i coefficienti angolari degli assi della conica a centro; le equazioni degli assi di una conica a centro sono:**

$$\mathbf{y - \beta = m_1(x - \alpha)} \qquad \mathbf{y - \beta = m_2(x - \alpha)}$$



N.B. Per calcolare l'equazione canonica di una conica a centro possiamo effettuare prima la rotazione e poi la traslazione, oppure prima la traslazione e poi la rotazione.

Esempio: Calcolare l'equazione canonica della seguente conica a centro:

$$\mathbf{5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0} \qquad \textbf{[7]}$$

$$I = a + c = 13 \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0 \quad A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -81 \neq 0 \quad I \cdot A = 13(-17) < 0$$

La conica proposta è un'ellisse reale. Effettuiamo la seguente traslazione di vettore $\vec{v} = (\alpha;\beta)$ **le cui equazioni sono:** $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$. **Otteniamo:**

$$5(X+\alpha)^2 + 4(X+\alpha)\cdot(Y+\beta) + 8(Y+\beta)^2 + 8(X+\alpha) + 14(Y+\beta) + 5 = 0$$

Sviluppando e semplificando otteniamo:

$$5X^2+4XY+8Y^2+2(5\alpha+2\beta+4)X+2(2\alpha+8\beta+7)Y+5\alpha^2+4\alpha\beta+8\beta^2+8\alpha+14\beta+5=0 \quad \textbf{[8]}$$

Annullando i coefficienti dei termini lineari otteniamo il seguente sistema: $\begin{cases}5\alpha+2\beta+4=0\\2\alpha+8\beta+7=0\end{cases}$ **la**

cui soluzione è: $\begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{2}\\ \beta=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$ **Il centro della nostra conica è il punto** $C\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{4}\right)$

Sostituendo questi valori nell'equazione [8] otteniamo l'equazione dell'iperbole traslata,cioè:

$$5X^2+4XY+8Y^2-\frac{9}{4}=0 \quad \textbf{[9]}$$

Ruotiamo gli assi della conica di un angolo ϑ **mediante le seguenti equazioni di una rotazione di un anglo** ϑ**:** $\begin{cases}X=\overline{x}\cdot\cos\vartheta-\overline{y}\cdot\sin\vartheta\\Y=\overline{x}\cdot\sin\vartheta+\overline{y}\cdot\cos\vartheta\end{cases}$

Mediante questa trasformazione l'equazione [9] assume la forma:

$$5(\overline{x}\cdot\cos\vartheta-\overline{y}\cdot\sin\vartheta)^2+4(\overline{x}\cdot\cos\vartheta-\overline{y}\cdot\sin\vartheta)\cdot(\overline{x}\cdot\sin\vartheta+\overline{y}\cdot\cos\vartheta)+8(\overline{x}\cdot\sin\vartheta+\overline{y}\cdot\cos\vartheta)^2-\frac{9}{4}=0$$

$$\left(-3\cos^2\vartheta+4\sin\vartheta\cos\vartheta+8\right)\overline{x}^2-2\left(2\sin^2\vartheta-3\sin\vartheta\cos\vartheta-2\cos^2\vartheta\right)\overline{x}\,\overline{y}+$$

$$+\left(3\cos^2\vartheta-4\sin\vartheta\cos\vartheta-5\right)\overline{y}^2-\frac{9}{4}=0 \quad \textbf{[10]}$$

Annullando il coefficiente del termine rettangolare otteniamo:

$$2\sin^2\vartheta-3\sin\vartheta\cos\vartheta-2\cos^2\vartheta=0$$

Dividendo ambo i membri per $\cos^2\vartheta$ **otteniamo:** $2tg^2\vartheta-3tg\vartheta-2=0 \qquad tg\,\vartheta=-\dfrac{1}{2} \qquad tg\,\vartheta=2$

Scegliendo come soluzione $tg\,\vartheta=2$ **abbiamo:**

$$\sin\vartheta=\frac{tg\,\vartheta}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}}=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\vartheta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\vartheta}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

L'equazione [10] diventa: $9\overline{x}^2+4\overline{y}^2=\dfrac{9}{4} \qquad 36\overline{x}^2+16\overline{y}^2=9 \qquad \dfrac{\overline{x}^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{\overline{y}^2}{\frac{9}{16}}=1 \qquad \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{16}}=1$

Si noti che i due valori trovati per $tg\,\vartheta$ **corrispondono a due direzioni fra loro perendicolari.**

Per questo, prendendo $tg\,\vartheta = -\frac{1}{2}$ **non faremmo altro che scambiare i ruoli tra l'asse delle ascisse e quello delle ordinate. L'asse x diventerebbe asse y e viceversa.**

Riduzione dell'equazione di una conica non a centro alla sua forma canonica

Se l'equazione $\mathbf{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0}$ **[1] è tale che risulta** $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$

$b^2 = ac$ **L'equazione [1] può essere scritta nella seguente maniera:**

$\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{c}\right)^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ **in quanto**

$\left(x\sqrt{a}+y\sqrt{c}\right)^2 = ax^2+cy^2+2xy\sqrt{ac} = ax^2+cy^2+2xy\sqrt{b^2} = ax^2+cy^2+2bxy$

La conica rappresentata dalla [1] non è una conica a centro ed è una parabola se è anche $A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0$**. La sua equazione si semplifica mediante la seguente rotazione degli assi cartesiani:** $\begin{cases} x = X\cdot\cos\vartheta - Y\cdot\sin\vartheta \\ y = X\cdot\sin\vartheta + Y\cdot\cos\vartheta \end{cases}$ **[3] dove l'angolo** ϑ **è determinato risolvendo l'equazione:**

$$\mathbf{b\cdot tg^2\vartheta - (c-a)\cdot tg\,\vartheta - b = 0} \quad \textbf{[4]}$$

Nelle nuove coordinate, l'equazione [1] assume la forma: $BX^2 + 2DX + 2EY + f = 0$ **[11]**

oppure: $CY^2 + 2DX + 2EY + f = 0$ **[12]**

Le soluzioni dell'equazione [4] sono: $tg\vartheta = -\frac{a}{b}$ $tg\vartheta = \frac{c}{b}$ $\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{c}{b} = -\frac{ac}{b^2} = -\frac{b^2}{b^2} = -1$ $tg\vartheta = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$

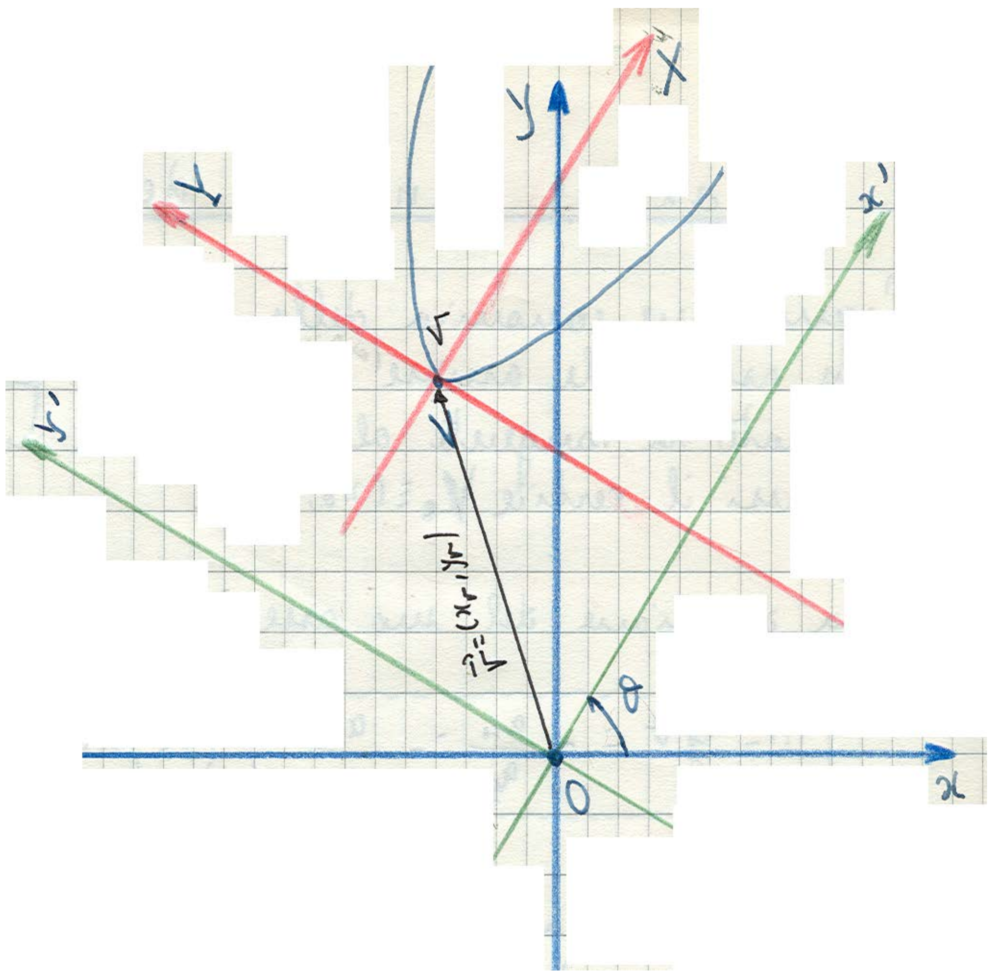
Le soluzioni dell'equazione [4] rappresentano i coefficienti angolari dell'asse della parabola e della retta tangente alla parabola nel suo vertice $V(x_V; y_V)$. Le equazioni di tali rette si ottengono applicando le seguenti formule: $\mathbf{y - y_V = -\frac{a}{b}(x - x_V)}$ $\mathbf{y - y_V = \frac{b}{a}(x - x_V)}$

Le coordinate del vertice $V(x_V; y_V)$ della parabola di equazione [1] si ottengono utilizzando le relazioni $\begin{cases} x = X \cdot \cos\vartheta - Y \cdot \sin\vartheta \\ y = X \cdot \sin\vartheta + Y \cdot \cos\vartheta \end{cases}$ **e** $\begin{cases} X = \overline{x} + X_V \\ Y = \overline{y} + Y_V \end{cases}$ **.**

Le equazioni [11] e [12] possono, poi, eventualmente, essere ricondotte alla forma:

$\mathbf{y = k x^2}$ **oppure** $\mathbf{x = h y^2}$ **mediante una opportuna traslazioni di assi di vettore:**

$\vec{v} = (x_V; y_V)$**, cioè assumiamo come nuova origine il vertice $V_p(X_V; Y_V)$ della parabola.**



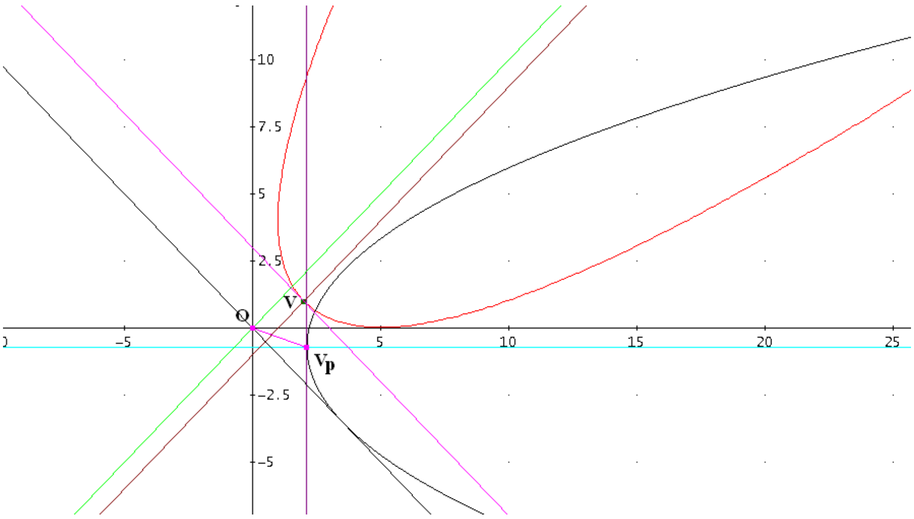
Esempio**: Calcolare l'equazione canonica della seguente conica non a centro:**

$$\mathbf{x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0} \qquad \textbf{[13]}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La conica proposta è una parabola. L'angolo ϑ **del quale debbono ruotare gli assi cartesiani si ottiene risolvendo l'equazione:** $-tg^2\vartheta + 1 = 0 \quad tg\,\vartheta = \pm 1$ **Scegliendo l'angolo** $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ **otteniamo le equazioni della rotazione sono:** $\begin{cases} x = X \cdot \cos\frac{\pi}{4} - Y \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ y = X \cdot \sin\frac{\pi}{4} + Y \cdot \cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x = X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ **mediante le quali l'equazione [13] assume la forma:** $2Y^2 - 8\sqrt{2} \cdot X + 2\sqrt{2} \cdot Y + 25 = 0$ **[14]**

Il vertice di questa parabola è il punto $V_p\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La traslazione $\begin{cases} X = \overline{x} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ Y = \overline{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ trasforma l'equazione [14] nell'equazione $\color{red}{\mathbf{\overline{y}^2 = 4\sqrt{2} \cdot \overline{x}}}$ che è l'equazione della parabola di partenza ridotta a forma canonica, cioè riferita al sistema di assi cartesiani $V_1\overline{x}\,\overline{y}$.



---

[i] Abbiamo indicato i coefficienti del termine rettangolare xy e dei termini lineari x ed y non con b, d, e ma con 2b, 2d, 2e per semplificare la scrittura di formule generali successive.