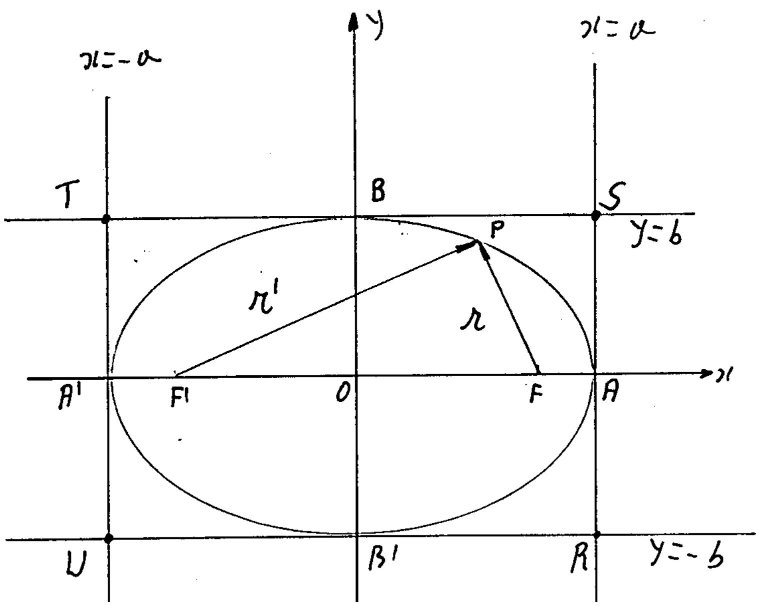
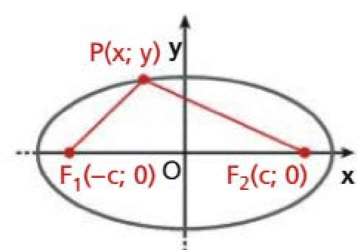
Unità Didattica N° 10

L‘Ellisse

Definizione di ellisse e deduzione della sua equazione canonica

Definiamo ellisse il luogo geometrico dei punti **P** del piano le cui distanze da due punti fissi **F** ed F', detti fuochi, hanno somma costante. Indicheremo con $2a$ tale somma costante, con $2c$ la distanza tra i due fuochi, con $r = \overline{PF}$ ed $r' = \overline{PF'}$ i raggi focali.





$F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$ $\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$P(x;y)$, $F(c;0)$, $F'(-c;0)$, $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $B(0;b)$, $B'(0;-b)$

Per ogni punto **P** dell'ellisse abbiamo: $\mathbf{PF+PF'=2a}$ **[1]** $\overline{PF_1}+\overline{PF_2} = 2a$

Tenendo presente che nel triangolo PFF' risulta sempre $\overline{PF} + \overline{PF} > \overline{FF'}$ deduciamo che:

$2a > 2c$ cioè : $a > c$ [2]

Riferiamo il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani scelti nella seguente maniera :

1) l'**asse delle ascisse** coincide con la retta FF' orientata dal punto F' al punto $F(c,0)$

2) l'**origine O** è il punto medio del segmento FF'

3) l'**asse delle ordinate** è la retta perpendicolare all'asse delle ascisse in **O** orientata dal basso verso l'alto.

Sotto queste ipotesi possiamo scrivere: $P(x,y)$ $F(c,0)$ $F_2(c;0)$ $F'(-c,o)$ $F_1(-c;0)$ per cui la [1] diventa: $\sqrt{(\mathbf{x-c})^2+\mathbf{y}^2}+\sqrt{(\mathbf{x+c})^2+\mathbf{y}^2}=\mathbf{2a}$ **[3]**

che rappresenta l ' **equazione cartesiana** dell'ellisse riferita ai suoi assi.

Mediante una doppia razionalizzazione possiamo rendere più semplice l'equazione [3] .

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$ $\qquad$ $a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$ $\qquad$ **[4]**

$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$ $\qquad$ $(a^2 - c^2)x^2 + a^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)$ [5]

Poiché $a^2 - c^2$ è una quantità sempre positiva è lecito porre : $\mathbf{a^2 - c^2 = b^2}$ $\quad$ $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ $\qquad$ **[6]**

e scrivere l'equazione dell'ellisse nella forma : $\qquad$ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $\qquad$ **[7]**

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 otteniamo : $\qquad$ $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $\qquad$ **[8]**

Che è l'**equazione canonica** o **normale** o **tipica** dell'ellisse. Si può dimostrare che le equazioni [3] e [8] sono equivalenti, cioè ciascuna di esse è deducibile dall'altra.

Il rapporto fra la **distanza focale** e la **lunghezza dell'asse maggiore** di un'ellisse è detto **eccentricità** :

$$\mathbf{e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$$

Proprietà fondamentali dell'ellisse

1) L'ellisse è simmetrica rispetto agli assi cartesiani e quindi anche rispetto all'origine .

Siano $P_1(x;y_1)$ e $P_2(x;y_2)$ due punti simmetrici rispetto all'asse delle x. Se P_1 appartiene all'ellisse ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$) anche P_2 appartiene all'ellisse ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$) , cioè l'**ellisse è simmetrica rispetto all'asse x** .

Similmente se $P_3(x_1;y)$ appartiene all'ellisse anche il punto $P_4(-x_1;y)$ appartiene all'ellisse , la quale **risulta così simmetrica rispetto all'asse y**. In questo caso gli assi cartesiani sono assi dell'ellisse, mentre la loro origine è il **centro** dell'ellisse. L'ellisse è detta anche **conica a centro**.

(2) L'ellisse è una curva chiusa contenuta nel rettangolo **RSTU** delimitato dalle rette $\mathbf{x=a}$, $\mathbf{x=-a}$, $\mathbf{y=b}$, $\mathbf{y=-b}$. Infatti: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow a^2-x^2\geq 0 \Rightarrow \mathbf{-a\leq x\leq a}$

$y=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \Rightarrow b^2-y^2\geq 0 \Rightarrow \mathbf{-b\leq y\leq b}$

(3) L'ellisse incontra l'asse x nei punti $A(a;0)$, $A'(-a;0)$ e l'asse y nei punti $B(0;b)$, $B'(0;-b)$ che sono i vertici dell'ellisse

(4) I segmenti AA' e BB' lunghi rispettivamente **2a** e **2b** si chiamano assi dell'ellisse, mentre i segmenti OA ed OB rispettivamente lunghi **a** e **b** sono i semiassi.

Se è $a>b$, AA' è l'asse maggiore e BB' è l'asse minore

Se è $a<b$, AA' è l'asse minore e BB' è l'asse maggiore

In ogni caso i fuochi F ed F' si trovano sempre sull'asse maggiore che è anche chiamato **asse focale**.

$$a>b \Rightarrow a^2-b^2=c^2 \Rightarrow e=\frac{c}{a}<1 \Rightarrow F, F'\in x$$

$$a<b \Rightarrow b^2-a^2=c^2 \Rightarrow e=\frac{c}{b}<1 \Rightarrow F, F'\in y$$

Se poniamo $\mathbf{h=\frac{1}{a^2}}$ $\mathbf{k=\frac{1}{b^2}}$ l'equazione dell'ellisse assume la forma $\mathbf{hx^2+ky^2=1}$ che rende più semplici i calcoli nella risoluzione di alcuni problemi.

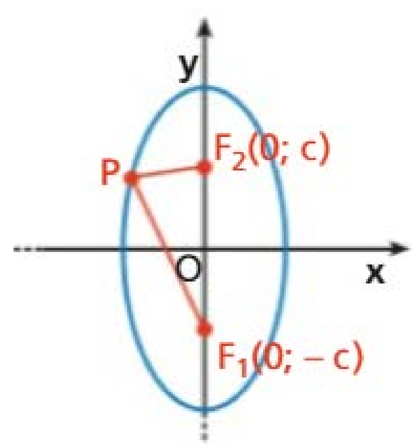
Ellisse coi fuochi sull'asse y

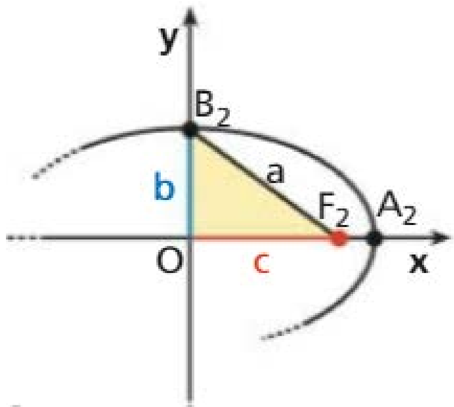
L'equazione canonica dell'ellisse quando l'asse delle ordinate contiene i fuochi è ancora : $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

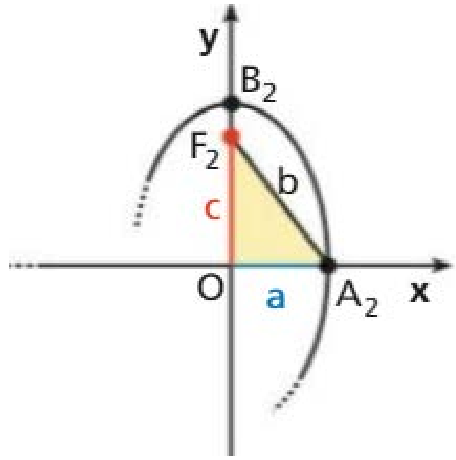
Ma, questa volta , è $b>a$

Le coordinate dei fuochi sono: $F(0;c)$ e $F'(0;-c)$.

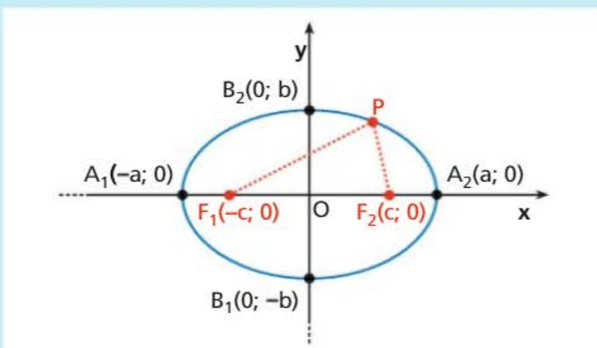
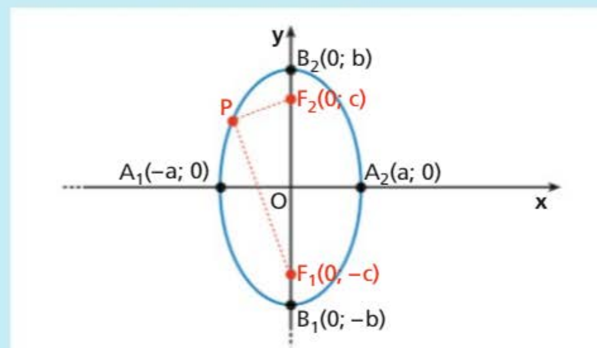
L'**eccentricità** dell'ellisse avente i fuochi sull'**asse delle ordinate** è: $\mathbf{e=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}$







$a > b$ $\qquad\qquad$ $a < b$

Ellisse con i fuochi sull’asse *x*	Ellisse con i fuochi sull’asse *y*
	
Equazione: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b$.	**Equazione**: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b>a$.
Fuochi: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, con $a>c$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}$.	**Fuochi**: $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, con $b>c$ e $c=\sqrt{b^2-a^2}$.
Eccentricità: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.	**Eccentricità**: $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$.

Rette tangenti all’ellisse uscenti da un dato punto

Per calcolare le equazioni delle rette tangenti all’ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ uscenti dal punto $P_o(x_o;y_o)$ si procede come segue:

(1) Si scrive l’equazione del fascio di rette di centro $P_o(x_o;y_o)$: $y-y_o=m(x-x_o)$ [1]

(2) Si trova l’equazione di secondo grado in x $\mathbf{A(m)\cdot x^2+B(m)\cdot x+C(m)=0}$ [2] che è la risolvente il sistema: $\begin{cases} \mathbf{y-y_o=m(x-x_o)} \\ \mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \end{cases}$

(3) Si impone la condizione di tangenza annullando il delta dell’equazione [2] $\mathbf{B^2-4AC=0}$ e si ottiene una equazione di secondo grado in m, cioè una equazione del tipo: $\mathbf{pm^2+qm+r=0}$ le sue soluzioni m_1 ed m_2 sostituite nella [1] ci danno le equazioni richieste.

Osservazione

Le radici dell’equazione [4] sono:

- reali e distinte: $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è esterno all’ellisse e le tangenti sono due e viceversa
- reali e coincidenti: $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ appartiene all’ellisse e si ha una sola tangente (meglio le due rette tangenti sono sovrapposte) e viceversa
- complesse e coniugate: $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è interno all’ellisse e viceversa. In questo caso non esistono rette reali tangenti all’ellisse.
- Se nessuna delle coordinate del punto $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è nulla, i calcolo sono laboriosi.

Retta tangente all’ellisse in un suo punto

In questo caso è più conveniente applicare la regola degli sdoppiamenti mediante le sostituzioni $\mathbf{x^2\to x_o x}$ $\mathbf{y^2\to y_o y}$

$\mathbf{\frac{x_o}{a}x+\frac{y_o}{b}=1}$ è l’equazione della tangente richiesta

Caso numerico

$\gamma: x^2+5y^2=5$ $P_o(-1;-2)$ $y+2=m(x+1)$ equazione del fascio di rette di centro $P_o(-1;-2)$

$y=mx+m-2$ $\begin{cases} y+2=m(x+1) \\ x^2+5y^2=5 \end{cases}$ $x^2+5(mx+m-2)^2-5=0$

$$x^2+5\left(m^2x^2+m^2+4+2m^2x-4mx-4m\right)-5=0$$

$$x^2+5m^2x^2+5m^2+20+10m^2x-20mx-20m-5=0$$

$$\left(1+m^2\right)x^2-10m\left(2-m\right)x-20m+15+5m^2=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=25m^2\left(2-m\right)^2+\left(20m-15-5m^2\right)\left(1+5m^2\right)=$$

$$=25m^2\left(4+m^2-4m\right)+20m+100m^3-15-75m^2-5m^2-25m^4=$$

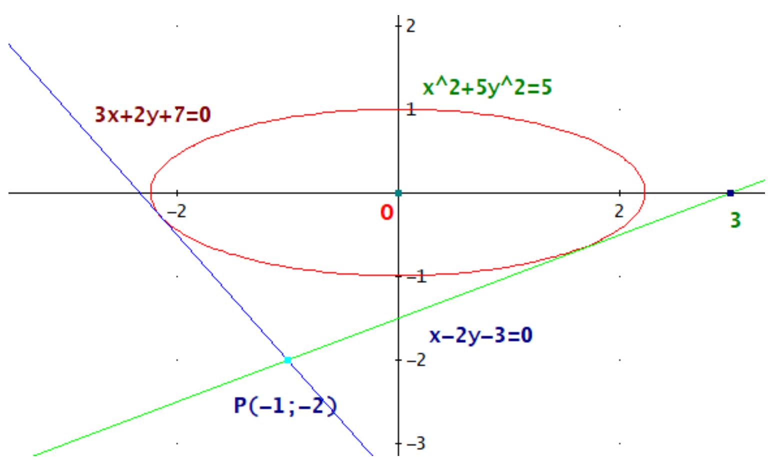
$$=100m^2+25m^4-100m^3+20m+100m^3-15-75m^2-5m^2-25m^4=$$

$$=20m^2+20m-15=5\left(4m^2+4m-3\right)=0$$

$$4m^2+4m-3=0 \qquad m=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}=\frac{-2\pm 4}{4} \left\langle \begin{array}{l} m_1=-\frac{3}{2} \\ m_2=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$y+2=-\frac{3}{2}(x+1) \qquad 2y+4=-3x-3 \qquad \boxed{3x+2y+7=0}\ t_1$$

$$y+2=\frac{1}{2}(x+1) \qquad 2y+4=x+1 \qquad x-2y-3=0$$



Altro procedimento

(1) Si applica la regola degli sdoppiamenti, come se P_o appartenesse all'ellisse. Si ottiene l'equazione della retta **r** che passa per i punti di tangenza T_1 e T_2.

(2) Le coordinate dei punti di tangenza T_1 e T_2 si ottengono risolvendo il sistema formato dall’equazione della retta **r** e dall’equazione dell’ellisse

(3) Le rette P_oT_1 e P_oT_2 sono le due tangenti richieste.

Retta tangente all’ellisse in un suo punto

Primo metodo

Stesso procedimento di prima, come se il punto non appartenesse all’ellisse.

Secondo metodo: formula degli sdoppiamenti

Se $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è un punto dell’ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, allora l’equazione della retta tangente all’ellisse nel punto $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ è: $\frac{x_o x}{a^2}+\frac{y_o y}{b^2}=1$

Tale relazione si ottiene applicando all’equazione dell’ellisse la formula degli sdoppiamenti:

$$x^2 \to x_o x \ , \ y^2 \to y_o y \ , \ x \to \frac{x+x_o}{2} \ , \ y \to \frac{y+y_o}{2} \qquad xy \to \frac{y_o x + x_o y}{2}$$

Una generica retta del fascio di centro Po incontra l'ellisse γ in due punti le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{cases} \qquad (3) \quad y = mx + y_0 - mx_0$$

$$bx^2 + a^2(mx+y_0-mx_0)^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{(a^2m^2+b^2)x^2 + 2a^2m(y_0-mx_0)x + a^2\left[(y_0-mx_0)^2-b^2\right]=0} \qquad (4)$$

Se vogliamo che la retta risulti tangente a γ in Po deve essere: $\boxed{x_1 = x_2 = x_0}$

Ricordando che in una equazione di 2° grado la somma delle radici è $-\frac{b}{a}$ abbiamo:

$2x_0 = \frac{-2a^2m(y_0 - mx_0)}{b^2 + a^2m^2}$ cioè

$(b^2 + a^2m^2)x_0 = -a^2m(y_0 - mx_0)$ cioè: $\boxed{m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}$ (5)

Ma $P_0 \in \gamma \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ cioè:

$\boxed{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2}$ (6)

per cui sostituendo la (5) nella (3) e tenendo presente la (6) abbiamo:

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + \left(y_0 + \frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}\right) = \frac{-b^2x_0x + a^2y_0^2 + b^2x_0^2}{a^2y_0} =$$

$$= \frac{-b^2x_0x + a^2b^2}{a^2y_0} \quad ; \quad b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Secondo metodo

Se P_0 e $P_1(x_1, y_1)$ sono due punti dell'ellisse γ, definiamo retta tangente a γ in P_0 la posizione limite della secante P_0P_1 quando P_1, muovendosi su γ, tende a P_0.

L'equazione della retta P_0P_1 è:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{cioè} \quad \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

$$P_1 \in \gamma \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad P_0 \in \gamma \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

da cui, sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$\frac{x_1^2-x_0^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_0^2}{b^2}=0 \; ; \quad \frac{(x_1+x_0)(x_1-x_0)}{a^2(y_1-y_0)}+\frac{(y_1+y_0)(y_1-y_0)}{b^2}=0$$

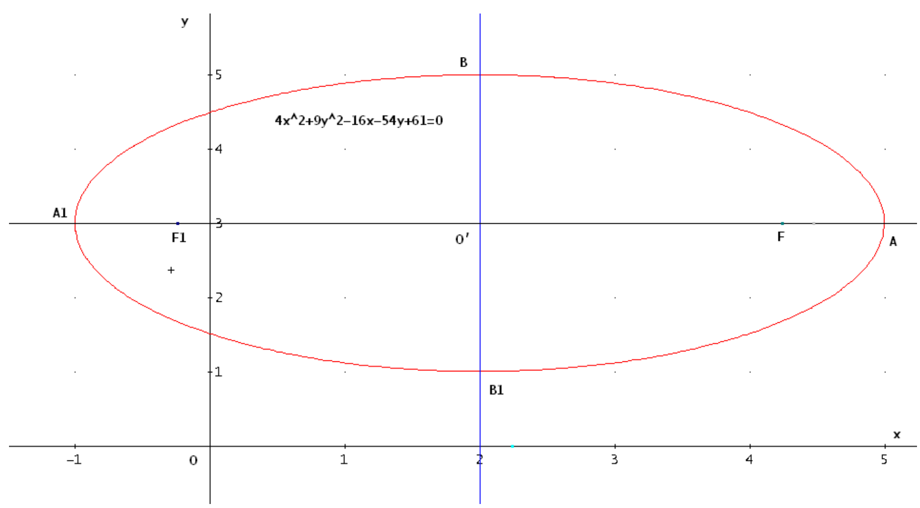
$$\frac{x_1+x_0}{a^2}\cdot\frac{x-x_0}{y-y_0}+\frac{y_1+y_0}{b^2}=0$$

$$\frac{(x_1+x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(y+y_0)(y-y_0)}{b^2}=0 \quad \Big\}$$ equazione della retta P_0P_1

Equazioni parametriche dell’ellisse

$$\begin{cases} \mathbf{x=a\cdot\cos\vartheta=a\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\ \mathbf{y=b\cdot\sin\vartheta=b\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}} \end{cases}$$

Ellisse traslata



Un’ellisse si dice **traslata** se i suoi assi sono paralleli agli assi cartesiani. Se $O'(x_o;y_o)$ è il centro dell’**ellisse traslata**, allora la sua equazione è: $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$ **[B]**

che, ridotta a forma canonica, diventa: $mx^2+ny^2+px+qy+r=0$ **[A]** con m ed n **concordi** $(m\cdot n>0)$ e: $x_o=-\frac{p}{2m}$ $y_o-\frac{q}{2n}$ $F(x_o+c;y_o)$ $F'(x_o-c;y_o)$

$$A(x_o+a;y_o) \qquad A_1(x_o-a;y_o) \qquad B(x_o;y_o+b) \qquad B_1(x_o;y_o-b) \qquad O'(x_o;y_o)$$

Equazione canonica dell'ellisse traslata utilizzando il metodo del completamento dei quadrati

Per passare dall'equazione generale **[A]** alla sua forma canonica **[B]** possiamo utilizzare il metodo del **complemento dei quadrati**.

$\mathbf{mx^2+ny^2+px+qy+r=0}$ $m\cdot n>0$ Supponiamo che sia: $m>0$ ed $n>0$

$$m\left(x^2+\frac{p}{m}x\right)+\left(y^2+\frac{q}{n}y\right)=-r$$

$$m\left(x^2+\frac{p}{m}x+\frac{p^2}{4m^2}-\frac{p^2}{4m^2}\right)+\left(y^2+\frac{q}{n}y+\frac{q^2}{4n^2}-\frac{q^2}{4n^2}\right)=-r$$

$$m\left(x+\frac{p}{2m}\right)^2-\frac{p^2}{4m}+n\left(y+\frac{q}{2n}\right)^2-\frac{q^2}{4n}=-r$$

$$m\left(x+\frac{p}{2m}\right)^2+n\left(y+\frac{q}{2n}\right)^2=\frac{p^2}{4m}+\frac{q^2}{4n}-r=s$$

$$\frac{\left(x+\frac{p}{2m}\right)^2}{\frac{s}{m}}+\frac{\left(y+\frac{q}{2n}\right)^2}{\frac{s}{n}}=1 \qquad a^2=\frac{s}{m} \qquad b^2=\frac{s}{n} \qquad x_o=-\frac{p}{2m} \qquad y_o=-\frac{q}{2n}$$

$$\mathbf{\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1}$$

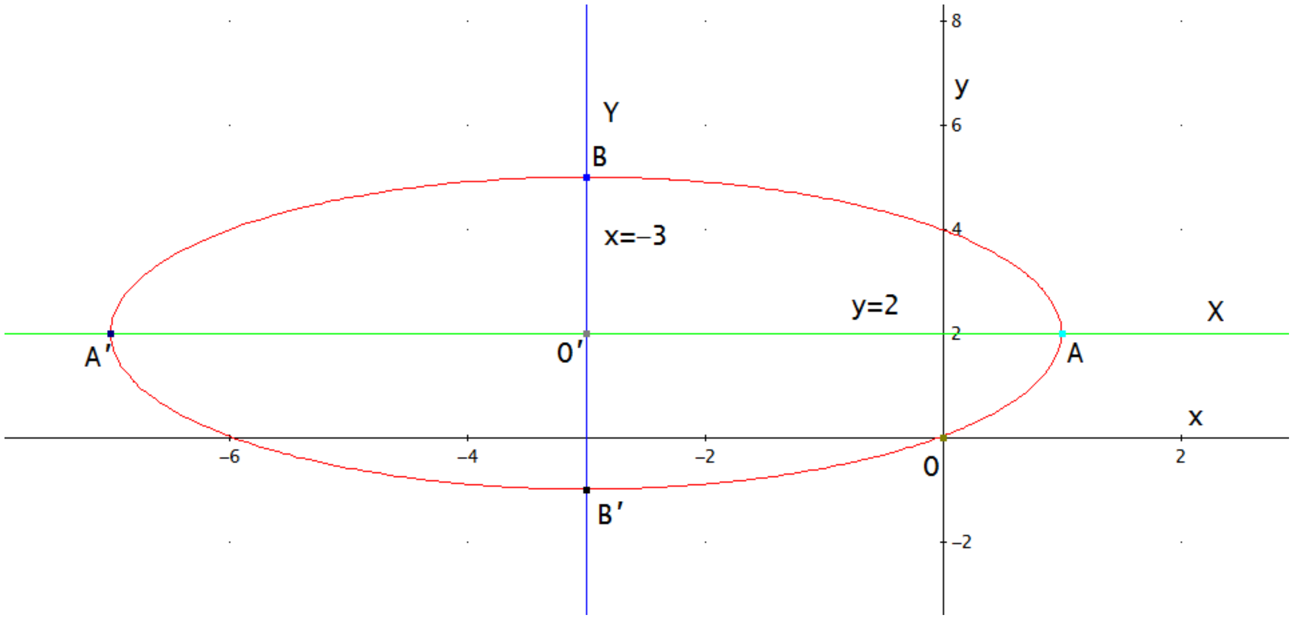
$c^2=a^2-b^2$ se $a>b$ $\qquad$ $c^2=b^2-a^2$ se $b>a$

Esempio numerico

$9x^2+16y^2+54x-64y+1=0$ $\qquad 9\left(x^2+6x\right)+16\left(y^2-4y\right)=-1$

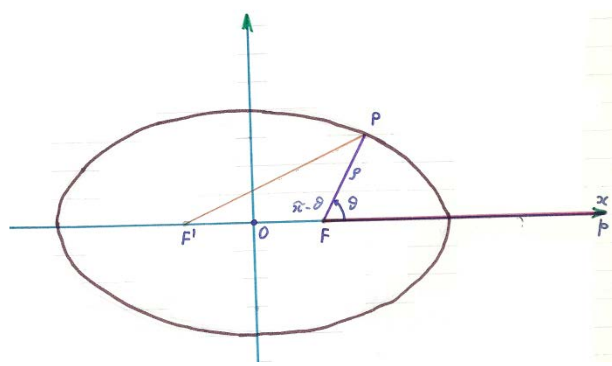
$9(x+3)^2-81+16(y-2)^2-64=-1$ $\qquad 9(x+3)^2+16(y-2)^2=144$

$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ $\qquad O'(-3;2)$ $\quad a^2=16$ $\quad b^2=9$ $\quad c^2=a^2-b^2=16-9=7$ $\quad c=\sqrt{7}$



Equazione polare dell'ellisse

Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si assuma come polo il fuoco $F(c,0)$ (con $c>0$) e come asse polare l'asse focale orientato da F verso la corrispondente direttrice (quindi come l'asse x).



Dalla definizione di ellisse abbiamo: $\overline{PF'}+\overline{PF}=2a \quad\Rightarrow\quad \overline{PF'}=2a-\rho \qquad [12]$

Applicando il teorema di Carnot al triangolo PFF' abbiamo:

$$\overline{PF'}^2=\overline{PF}^2+\overline{FF'}^2-2\overline{PF}\cdot\overline{FF'}\cdot\cos F'\hat{F}P=\rho^2+4c^2-4c\rho\cos(\pi-\vartheta)=\rho^2+4c^2+4c\rho\cos\vartheta$$

$$\overline{PF'}=2a-\rho \quad\Rightarrow\quad \rho^2+4c^2+4c\rho\cos\vartheta=(2a-\rho)^2 \quad \rho^2+4c^2+4c\rho\cos\vartheta=4a^2+\rho^2-4a\rho$$

$$4c^2+4c\rho\cos\vartheta=4a^2-4a\rho \quad 4c\rho\cos\vartheta+4a\rho=4a^2-4c^2 \quad \rho(c\cdot\cos\vartheta+a)=a^2-c^2 \quad a^2-c^2=b^2$$

$\rho=\frac{b^2}{c\cdot\cos\vartheta+a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cdot\cos\vartheta}$ Ponendo: $\frac{b^2}{a}=p \quad \frac{c}{a}=e=$ eccentricità abbiamo:

$[13] \qquad \boldsymbol{\rho=\frac{p}{1+e\cdot\cos\vartheta}}$ equazione polare dell'ellisse

01*) **Scrivere l'equazione dell'ellisse avente uno dei due fuochi nel punto** $F(2,0)$ **e tangente alla retta t di equazione** $y = x + \sqrt{14}$ **.**

[$a^2 + b^2 = 14$ **,** $a^2 - b^2 = 4$ **,** $5x^2 + 9y^2 = 45$ **, pag. 1]**

02) **E' assegnata l'ellisse γ di equazione** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **. Per il suo punto T di ascissa 3 e ordinata positiva condurre la tangente t a γ . Successivamente determinare l'angolo sotto cui è vista l'ellisse dal punto** P_o **in cui t incontra l'asse x .**

[$9x + 20y - 75 = 0$ **,** $tg\,\vartheta = \frac{360}{319}$ **]**

03) **E' assegnata la circonferenza σ di equazione** $x^2 + y^2 = 9$ **. I punti in cui essa interseca l'asse x sono i fuochi di un'ellisse γ che è anche tangente a σ . Scrivere l'equazione di γ .**

[$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ **]**

04) **Sull'ellisse γ di equazione** $9x^2 + 16y^2 = 144$ **trovare un punto tale che la somma delle sue coordinate sia nulla .** **[** $P_1\left(\frac{12}{5},-\frac{12}{5}\right)$ **,** P_2 **]**

05) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ tangente nel punto** $P_o\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ **alla retta t avente coefficiente angolare** $-\frac{5}{4}$ **.** **[** $5x^2 + 4y = 1$ **]**

06) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ passante per i punti** $A(2,1)$ **e** $B(-1,3)$ **. Calcolare l'area del triangolo ABC sapendo che C è l'intersezione delle tangenti a γ nei punti A e B .**

[$8x^2 + 3y^2 = 35$ **,** $S = \frac{21}{4}$ **]**

07*) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ avente un vertice nel punto** $B(0,3)$ **ed un fuoco nel punto** $F(0,\sqrt{5})$ **. Trovare l'equazione della retta parallela all'asse x in modo che , dette P e Q le sue intersezioni con l'ellisse , il triangolo** BPQ **sia equilatero . Di tale triangolo bisogna calcolare le coordinate dei tre vertici .** **[** $9x^2 + 4y^2 = 36$ **,** $7y + 3 = 0$ **pag. 3]**

08*) **E' data l'ellisse γ di equazione** $x^2 + 4y^2 = 4$ **. Si consideri poi una retta r appartenente al fascio di equazione** $y = x + k$ **. Tale retta incontra γ in due punti A e B . verificare che il punto medio M della corda AB descrive una retta al variare di r nel fascio .**

[$M\left(-\frac{4}{5}k, \frac{1}{5}k\right)$ **,** $y = -4x$ **, pag. 5]**

09) **Inscrivere nell'ellisse** $x^2 + 4y^2 = 4$ **un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani ed avente perimetro 8 .** **[** $x = \frac{6}{5}$ **,** $y = \frac{4}{5}$ **Bellini N° 1135]**

10) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ passante per il punto P ed ivi tangente alla retta t nei seguenti casi :**

a) $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$ **, t :** $2x + 2y - 5 = 0$ **, γ :** $x^2 + 4y^2 = 5$

$P(-1,1)$ **, t :** $x - 4y + 5 = 0$ **, γ :** $x^2 + 4y^2 = 5$

b) $P(2,3)$ **, t :** $16x + 15y - 77 = 0$ **, γ :** $8x^2 + 5y^2 = 77$

$P(3,1)$ **, T :** $24x + 5y - 77 = 0$ **γ :** $8x^2 + 5y^2 = 77$

c) $P(-2,4)$ **, t :** $5x - 14y + 66 = 0$ **, γ :** $5x^2 + 7y^2 = 132$

$P(5,1)$ **, t :** $25x + 7y - 132 = 0$ **, γ :** $5x^2 + 7y^2 = 132$

d*) $P(3,2)$ **,** $3x + 8y = 25$ **, γ :** $x^2 + 4y^2 = 25$ **pag. 7**

e*) $D(2,3)$ **, t :** $14x + 9y = 55$ **, γ :** $7x^2 + 3y^2 = 55$

f*) $C(1,-2)$ **, t :** $3x - 16y = 35$ **, γ :** $3x^2 + 8y^2 = 35$ **pag. 11**

g*) $P(-1,2)$ **, t :** $2x - y + 4 = 0$ **, γ :** $4x^2 + y^2 = 8$ **, pag. 13**

h*) $E(4,2)$ **, s :** $3x + 2y = 16$ **, γ :** $3x^2 + 4y^2 = 64$ **, pag. 15**

i*) $T(4,2)$ **, s :** $5x + 6y = 32$ **, γ :** $5x^2 + 12y^2 = 128$ **, pag. 16**

ℓ***)** $E(4,2)$ **, t :** $3x + 2y = 16$ **, γ :** $3x^2 + 4y^2 = 64$

m*) $T(4,2)$ **, t :** $5x + 6y = 32$ **, γ :** $5x^2 + 12y^2 = 128$ **, pag. 19**

n*) $A(3,1)$ **, t :** $9x + 8y - 35 = 0$ **, γ :** $3x^2 + 8y^2 = 35$ **, pag. 21**

o*) $B(-1,2)$ **, t:** $3x - 16y + 35 = 0$ **, γ :** $3x^2 + 8y^2 = 35$ **, pag. 22**

11) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ passante per il punto P e tangente alla retta t nei seguenti casi :**

a*) $Q\left(2,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ **, s :** $x - 2y - 3 = 0$ **pag. 23**

b*) $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ **, r :** $11x - 12y + 13 = 0$ **pag. 25**

c*) $P(2,1)$ **, t :** $2x + 5y - 9 = 0$ **, γ :** $x^2 + 5y^2 = 9$ **pag. 32**

12*) **trovare i punti dell'ellisse** $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ **che hanno dalla retta** $x - y = 0$

a) distanza $d = \sqrt{2}$ **b) distanza massima c) distanza minima** **pag. 31**

13*) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ tangente alla retta** $\sqrt{2}\cdot x + 2y - 3 = 0$ **sapendo che il suo asse maggiore vale 2 .** **[** $x^2 + 4y^2 = 1$ **pag. 35]**

14*) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ tangente alla retta** $x + \sqrt{2}\cdot y - 2 = 0$ **sapendo che uno dei due fuochi coincide col punto** $F(1,0)$ **.** **[** $x^2 + 2y^2 = 2$ **pag. 38]**

15*) **calcolare l'area del rombo formato dalle tangenti all'ellisse** $4x^2 + 3y^2 = 12$ **nei punti in cui essa incontra le bisettrici degli assi cartesiani .** **[** $S = 14$ **pag. 39]**

16) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse γ tangente alla retta di equazione** $2x + 2y - 5 = 0$ **nel punto** $P_o\left(2,\frac{1}{2}\right)$ **[** $x^2 + 4y^2 = 5$ **]**

b) **Determinare sull'ellisse γ i punti** P_1 **e** P_2 **aventi rispettivamente distanza minima e distanza massima dalla retta di equazione** $x + 4y - 10 = 0$ **[** $P_1(1,1)$ **,** $P_2(-1,-1)$ **]**

c) **Scrivere le equazioni delle rette** t_1 **e** t_2 **tangenti a γ rispettivamente nei punti** P_1 **e** P_2 **[** $x + 4y - 5 = 0$ **,** $x + 4y + 5 = 0$ **]**

d) **Scrivere le equazioni delle rette** p_1 **e** p_2 **sapendo che esse , assieme alle rette** t_1 **e** t_2 **, individuano un rettangolo circoscritto all'ellisse γ .** **[** $8x - 2y - 5\sqrt{13} = 0$ **,** $8x - 2y + 5\sqrt{13} = 0$ **]**

e) **Scrivere le equazioni delle rette** s_1 **ed** s_2 **che con le rette** t_1 **e** t_2 **individuano un parallelogramma** $ABCD$ **circoscritto all'ellisse** γ **sapendo che la retta** s_1 **forma un angolo di** $45°$ **con l'asse delle ascisse** **[** $y = x - \frac{5}{2}$ **;** $y = x + \frac{5}{2}$ **]**

f) **Calcolare il perimetro e l'area del parallelogramma** $ABCD$ **.**

[$A\left(3, \frac{1}{2}\right)$ **,** $B\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ **,** $C\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ **,** $D\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ **]**

g) **Detti** P_3 **e** P_4 **i punti di tangenza di** s_1 **ed** s_2 **con** γ **, individuare la natura del quadrilatero** $P_1P_3P_2P_4$ **del quale bisogna calcolare l'area ed il perimetro .**

[$P_3\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ **,** $P_4\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ **]**

17) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $3x + 8y = 25$ **nel punto** $A(3;2)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 22 **.**

18) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $14x + 9y = 55$ **nel punto** $B(2;3)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 20 **.**

19) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $3x - 16y = 35$ **nel punto** $C(1;-2)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 16 **.**

20) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $2x - y + 4 = 0$ **nel punto** $D(-1;2)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 12 **.**

21) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $3x + 2y = 16$ **nel punto** $E(4;2)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 24 **.**

22) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $5x + 6y = 32$ **nel punto** $F(4;2)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 24 **.**

23) a) **Scrivere l'equazione dell'ellisse** λ **tangente alla retta t di equazione** $3x + 8y - 10 = 0$ **nel punto** $F(4;2)$ **b) Inscrivere nell'ellisse** λ **un rettangolo di perimetro** 8 **.**

24) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all'ellisse** λ **di equazione** $x^2 + 5y^2 = 5$ **condotte dal punto** $A(-1;-2)$

26) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all’ellisse** λ **di equazione** $x^2 + 20y^2 = 5$ **condotte dal punto** $A(-1;-1)$

27) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all’ellisse** λ **di equazione** $x^2 + 20y^2 = 20$ **condotte dal punto** $A(-2;-2)$

28) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all’ellisse** λ **di equazione** $x^2 + 45y^2 = 45$ **condotte dal punto** $A(-3;-2)$

29) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all’ellisse** λ **di equazione** $4x^2 + 5y^2 = 20$ **condotte dal punto** $A(-1;-4)$

30) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all’ellisse** λ **di equazione** $9x^2 + 5y^2 = 45$ **condotte dal punto** $A(-1;-6)$

31) **Scrivere le equazioni delle rette tangenti all’ellisse** λ **di equazione** $4x^2 + 5y^2 = 5$ **condotte dal punto** $A\left(-\frac{1}{2};-2\right)$