Unità Didattica N° 9 La parabola

1) La traslazione degli assi cartesiani

2) Definizione e costruzione grafica della parabola

3) La parabola ad asse verticale

4) La parabola ad asse orizzontale

5) Intersezione di una parabola con una retta

6) Tangenti ad una parabola condotte da un punto

7) Retta tangente ad una parabola in un suo punto

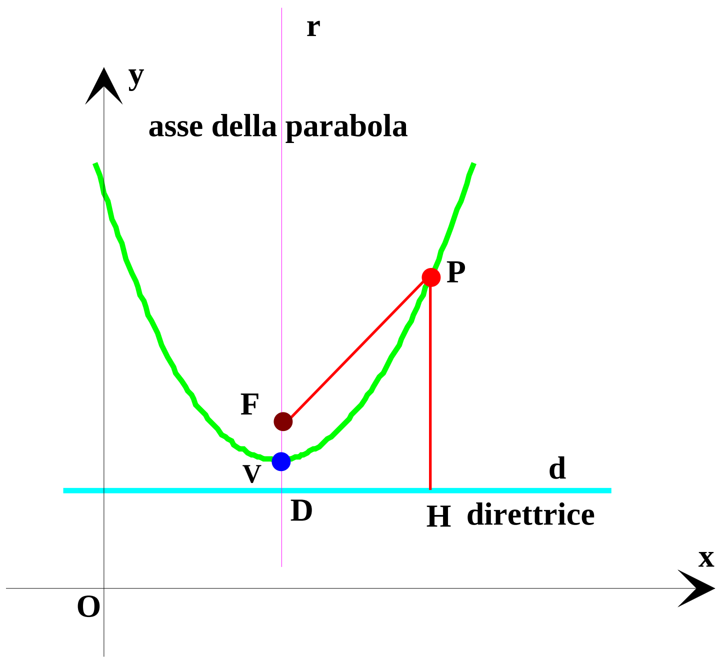
8) Problemi sulla parabola

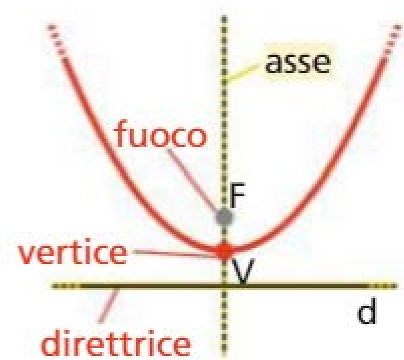
9) Fascio di parabole

10) Equazioni parametriche della parabola

La parabola ad asse verticale

Definiamo **parabola** il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **F** detto **fuoco** e da una retta fissa **d** (non contenente il fuoco) detta **direttrice**. La retta **r** passante per **F** e perpendicolare alla direttrice **d** è l'**asse** della parabola. La retta **r** incontra la retta **d** nel punto **D**. Il punto medio **V** del segmento FD è il **vertice** della parabola. $PF = PD$





Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle ascisse sia parallelo alla direttrice **d**, l'equazione della parabola assume la forma $y = ax^2 + bx + c$

$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ Vertice della parabola $F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ Fuoco della parabola

$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ equazione della direttrice della parabola

$x = \frac{-b}{2a}$ equazione dell'asse della parabola

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la concavità verso l'alto (il basso)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma:

$$y = ax^2 = = \frac{1}{4p}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4py$$

$F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$ $\quad F(0,p) \quad Y = -p = -\frac{1}{4a}$ = equazione della direttrice $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

Equazione di una parabola di dato vertice

$y - y_V = a(x - x_V)^2$ con $V(x_V;y_V)$ vertice della parabola

La parabola ad asse orizzontale

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle **y** risulti parallelo alla direttrice **d**, allora l'equazione della parabola assume la forma: $x = ay^2 + by + c$

$V\left(\frac{-\Delta}{4a},\frac{-b}{2a}\right)$ Vertice della parabola $\qquad F\left(\frac{1-\Delta}{4a};\frac{-b}{2a}\right)$ Fuoco della parabola

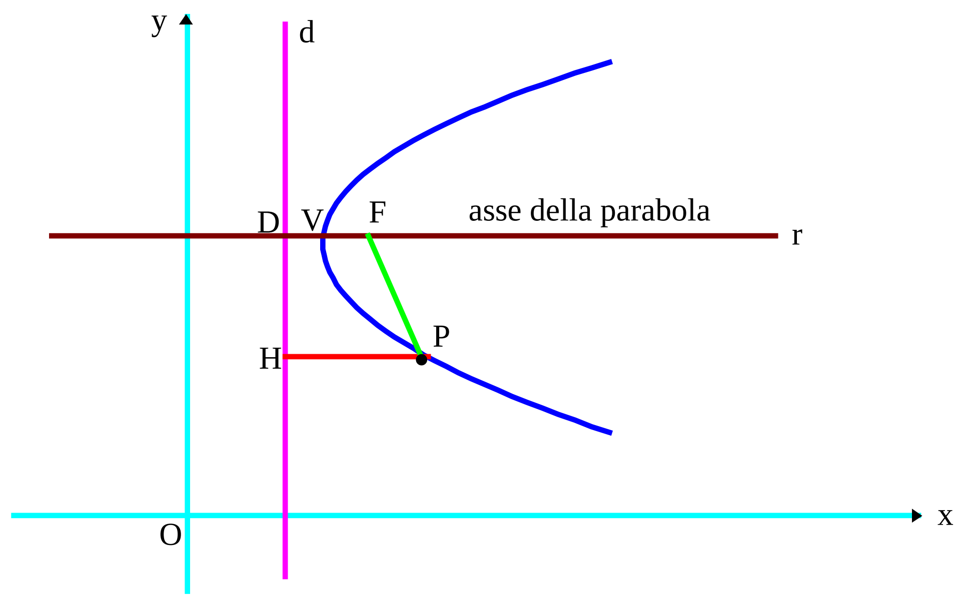
$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$ equazione della direttrice della parabola

$y = \frac{-b}{2a}$ equazione dell'asse della parabola

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la concavità verso destra (sinistra)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma: $x = ay^2 = \frac{1}{4p}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4px$

$F\left(\frac{1}{4a},0\right) \quad F(p,0) \quad x = -p = -\frac{1}{4a}$ = equazione della direttrice $\quad \Delta = b^2 - 4ac$



Intersezioni con gli assi cartesiani

La parabola ad asse verticale incontra sempre l'asse delle **y** nel punto $A(0, c)$. Per calcolare le coordinate delle eventuali intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ cioè la seguente equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta > 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti distinti

$\Delta = 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti coincidenti . Questo significa che la parabola ha il vertice **V** sull'asse delle x , cioè l'asse x è **tangente** alla parabola nel vertice

$\Delta < 0$: la parabola non incontra l'asse delle ascisse

Intersezione di una retta con una parabola

Per calcolare le coordinate dei punti di intersezione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con la retta $y = mx + n$ basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$

Sia $Ax^2 + Bx + C = 0$ l'equazione risolvente il sistema e $\Delta = B^2 - 4AC$ il suo discriminante.

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in R$; la retta incontra la parabola in due punti reali e distinti (retta secante)

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \in R$, la retta incontra la parabola in due punti coincidenti (retta tangente)

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in C$, la retta non incontra la parabola (retta esterna)

<<**Calcolare le coordinate dei punti d'intersezione della parabola** $y = -x^2 + 7x - 6$ **con la retta** $6x - y - 8 = 0$ >>

$$\begin{cases} y = -x^2 + 7x - 6 \\ 6x - y - 8 = 0 \end{cases} \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -14 \end{cases} \quad P_1(-1,-14) \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad P_2(2,4)$$

Applicazioni

<<**Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale avente come vertice il punto** $V(5,-2)$ **e come direttrice la retta** $y = -4$ >>

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 5 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -2 \\ -\dfrac{1+\Delta}{4a} = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -10a \\ \dfrac{\Delta}{4a} = 2 \\ \dfrac{1}{4a} + \dfrac{\Delta}{4a} = 4 \end{cases} \qquad \frac{1}{4a} + 2 = 4 \ , \ \frac{1}{4a} = 2 \ , \ a = \frac{1}{8} \ , \ b = -\frac{5}{4}$$

$$\Delta = 8a \ , \ b^2 - 4ac = 1 \ , \ \frac{25}{16} - \frac{c}{2} = 1 \ , \ \frac{c}{2} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} \ , \ c = \frac{9}{8} \qquad y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{9}{8}$$

<<**Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale avente come fuoco il punto** $F\left(2,\frac{15}{4}\right)$ **e come direttrice la retta** $y=\frac{17}{4}$ >>

$$d(P,F) = d(P,d) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + \left(y - \frac{15}{4}\right)^2} = \left| y - \frac{17}{4} \right| \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - \frac{15}{2}y + \frac{225}{16} = y^2 - \frac{17}{2}y + \frac{289}{16} \qquad \boxed{y = -x^2 + 4x}$$

Altra risoluzione

$$F\left(2,\frac{15}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{15}{4} \end{cases} \qquad d: \ y = \frac{14}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1+\Delta}{4a} = \frac{17}{4} \qquad \mathbf{b=-4a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4a} - \dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{15}{4} \\ \dfrac{1}{4a} + \dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{17}{4} \end{cases}$$

$$\dfrac{1}{2a} \quad \# \quad = -\dfrac{1}{2}$$

$$a = -1 \ , \ b = 4 \ , \ \frac{1 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{15}{4} \ , \ \frac{1 - 16 - 4c}{-4} = \frac{15}{4}$$

$$15 + 4c = 15 \qquad c = 0$$

Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale avente come vertice il punto $V(6;-4)$ e come fuoco il punto $F(6,-3)$.

$$-\frac{b}{2a} = 6 \ \Rightarrow \ \mathbf{b = -12a} \quad V(6;-4) \text{ e } F(6,-3) \ \Rightarrow \ \begin{cases} \dfrac{\cancel{\Delta}}{\cancel{4}a} = 4 \\ \dfrac{1}{4a} - \dfrac{\cancel{\Delta}}{\cancel{4}a} = -3 \end{cases}$$

$$\dfrac{1}{4a} = -3$$

$$\mathbf{a = \frac{1}{4}} \quad \mathbf{b = -3} \quad \frac{\Delta}{4a} = 4 \ \Rightarrow \ \frac{b^2 - 4ac}{1} = 4 \quad -c = 4 - 9 \quad \mathbf{c = 5} \quad \mathbf{y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5}$$

Metodo del fascio di parabole

$$y + 4 = a(x-6)^2 \quad y = ax^2 - 12ax + 36a - 4 \quad y = Ax^2 + Bx + c \quad A = a \quad B = -12a \quad C = 36a - 4$$

$$\frac{1-\Delta}{4A} = -3 \ \Rightarrow \ 1 - B^2 + 4AC = -12A \quad 1 - 144a^2 + 4a(36a-4)0 - 12a \quad 1 - 4a = 0 \quad \mathbf{a = \frac{1}{4}}$$

$$y + 4 = \frac{1}{4}(x-6)^2 \qquad \mathbf{y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5}$$

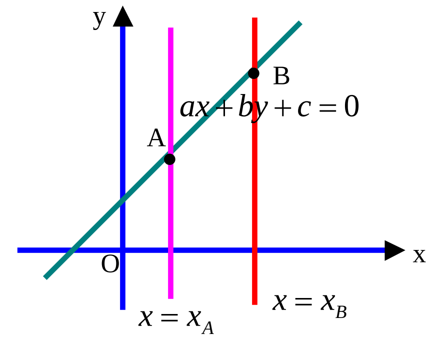
Scrivere l'equazione della parabola γ ad asse verticale passante per i punti $P_1(0;-1)$, $P_2(1;1)$, $P_3(2;-1)$.

$$P_1 \in \gamma \ \Rightarrow \ \mathbf{c = -1} \quad P_2 \in \gamma \ \Rightarrow \ a + b + c = 1 \quad P_3 \in \gamma \ \Rightarrow \ 4a + 2b + c = -1 \quad \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{a = -2} \\ \mathbf{b = 4} \\ \mathbf{c = -1} \end{cases}$$

$$\mathbf{y = -2x^2 + 4x - 1}$$

Metodo del fascio di parabole passante per due punti

Secondo Procedimento: Si scrive l'equazione della retta AB : $ax + by + c = 0$ [$x - y + 1 = 0$]. Considerate le rette verticali $x = x_A$, $x = x_B$ (passanti per i punti base) si scrive l'equazione della parabola degenere del fascio : $(x - x_A)(x - x_B) = 0$



Il fascio richiesto ha equazione: $\mathbf{ax+by+c+\lambda(x-x_A)(x-x_B)=0}$ Equazione della retta P_1P_3 $y=-1$ Equazione del fascio di parabole: $y+1=\lambda x(x-2)$. Impongo il passaggio per il punto $P_2(1;1)$. Ottengo: $\lambda=-2$ $y+1=-2x(x-2)$ $\mathbf{y=-2x^2+4x-1}$

Scrivere l'equazione della parabola γ ad asse verticale avente come fuoco il punto $F(1;2)$ e come direttrice la retta d di equazione $y=3$.

$$\mathbf{F\left(\frac{-b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)} \quad \mathbf{y=-\frac{1+\Delta}{4a}} \quad \frac{-b}{2a}=1 \Rightarrow \mathbf{b=-2a} \quad \begin{cases}\frac{1-\Delta}{4a}=2\\ \frac{-1-\Delta}{4a}=3\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1-\Delta}{4a}=2\\ \frac{-1-\Delta}{4a}=3\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{4a}-\frac{\Delta}{4a}=2\\ \frac{-1}{4a}-\frac{\Delta}{4a}=3\end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{4a} & - \frac{\Delta}{4a} & = & 2 \\ \frac{-1}{4a} & - \frac{\Delta}{4a} & = & 3 \\ \hline \frac{2}{4a} & 0 & = & -1 \end{array} \quad 2a=-1 \quad \mathbf{a=\frac{1}{2}} \quad \mathbf{b=1} \quad 1-b^2+4ac=8a \quad \cancel{1}-\cancel{1}-2c=-4 \quad \mathbf{c=2}$$

$$\gamma : \mathbf{y=-\frac{1}{2}x^2+x+2}$$

Scrivere l'equazione della parabola γ ad asse verticale avente come fuoco il punto $F\left(0;\frac{5}{4}\right)$ e come direttrice la retta d di equazione $y=\frac{3}{4}$.

$$\frac{-b}{2a}=0 \Rightarrow \mathbf{b=0} \quad \begin{cases}\frac{1-\Delta}{4a}=\frac{5}{4}\\ \frac{-1-\Delta}{4a}=\frac{3}{4}\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{4a}-\frac{\Delta}{4a}=2\\ \frac{-1}{4a}-\frac{\Delta}{4a}=3\end{cases}$$

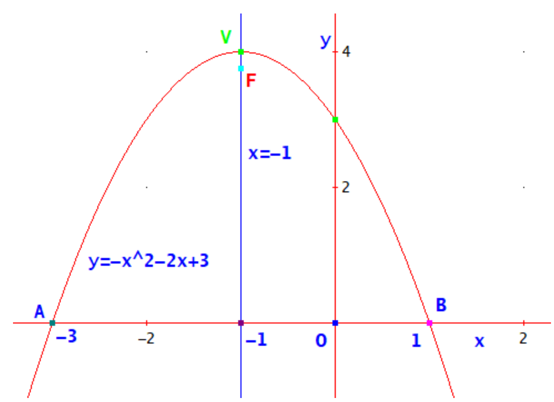
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{\cancel{4}\,a} - \dfrac{\Delta}{\cancel{4}\,a} & = & \dfrac{5}{\cancel{4}} \\ \dfrac{-1}{\cancel{4}\,a} - \dfrac{\Delta}{\cancel{4}\,a} & = & \dfrac{3}{\cancel{4}} \\ \hline \dfrac{1}{2a} \qquad 0 & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \quad \mathbf{a=1} \quad \mathbf{b=0} \quad 1-b^2+4ac=5a \quad 1+4c=5 \quad 4c=4 \quad \mathbf{c=1} \quad \gamma: \mathbf{y=x^2+1}$$

Calcolo l'equazione della parabola come luogo geometrico. $PF=PH \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{|4y-3|}{4} = \left|y-\frac{3}{4}\right|$ Elevando ambo 8i membri al quadrato otteniamo:

$$x^2+\cancel{y^2}-\frac{5}{2}y+\frac{25}{16} = \cancel{y^2}-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16} \qquad \gamma: \mathbf{y=x^2+1}$$

Scrivere l'equazione della parabola γ ad asse verticale di vertice $V(-1;4)$ e fuoco $F\left(-1;\frac{15}{4}\right)$.



$$\gamma: \mathbf{y=ax^2+bx+c} \Rightarrow \mathbf{x_V=\frac{-b}{2a}} \Rightarrow \mathbf{\frac{-b}{2a}=-1} \Rightarrow \mathbf{b=2a} \quad y_V=-\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=4 \quad \Delta=-16a$$

$$y_F=\frac{1-\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{1-\Delta}{4a}=\frac{15}{4} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\cancel{\Delta}}{\cancel{4}a} & = & -4 \\ \dfrac{1}{4a}-\dfrac{\cancel{\Delta}}{\cancel{4a}} & = & \dfrac{15}{4} \\ \hline \dfrac{1}{4a} & = & \dfrac{15}{4}-4 \end{array} \right. \quad \frac{1}{\cancel{4}\,a}=-\frac{1}{\cancel{4}} \quad \mathbf{a=-1} \quad \mathbf{b=-2}$$

$$\Delta=-16a \Rightarrow b^2-4ac=-16a \quad 4+4c=16 \quad 4c=12 \quad \mathbf{c=3} \quad \gamma: \mathbf{y=-x^2-2x+3}$$

Tangenti ad una parabola condotte da un punto

Una generica retta del fascio $y - y_o = m(x - x_o)$ di centro $P_o(x_o, y_o)$ incontra la parabola $y = ax^2 + bx + c$ in due punti distinti le cui coordinate si calcolano risolvendo il sistema:

[1]
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_o = m(x - x_o) \end{cases}$$

Tali punti coincidono , ed in tal caso la retta del fascio è tangente alla parabola , se è nullo il delta dell'equazione risolvente il sistema [1] :

[2] $\mathbf{ax^2 + B(m) \cdot x + C(m) = 0}$ $\mathbf{\Delta = B^2 - 4aC}$ [3]

La [3] è una equazione di secondo grado in m e quindi , in generale , assume la seguente forma :

$$p \cdot m^2 + q \cdot m + k = 0 \qquad \textbf{[4]}$$

Se le radici m_1 , m_2 dell'equazione [4] sono reali e distinte il punto $P_o(x_o, y_o)$ è esterno alla parabola e da esso possiamo condurre due tangenti. Se è $m_1 = m_2$, $P_o(x_o, y_o)$ appartiene alla parabola e da esso possiamo condurre una sola retta tangente. Se m_1 ed m_2 sono radici complesse e coniugate vuole dire che $P_o(x_o, y_o)$ è interno alla parabola e da esso non possiamo condurre nessuna tangente alla parabola.

Calcolare le equazioni delle rette tangenti alla parabola γ di equazione $y = x^2 - 3x$ condotte dal punto $P(2, -3)$

Si procede come segue:

1) Si scrive l ' equazione del fascio di rette di centro $P(2, -3)$

$$y - y_o = m(x - x_o) \qquad y + 3 = m(x - 2)$$

2) Si risolve il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione del fascio di rette:

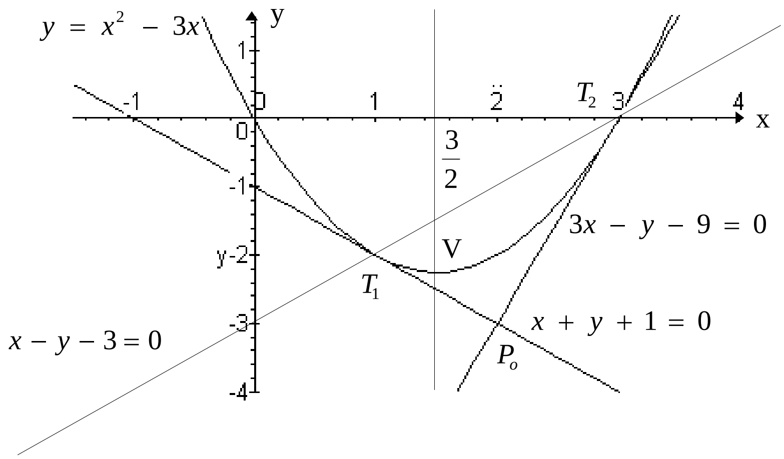
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases} \qquad x^2 - (m + 3)x + 3 + 2m = 0$$ equazione risolvente il sistema

3) Si impone che sia uguale a zero il Δ dell'equazione risolvente il sistema:

$$\Delta = (3 + m)^2 - 4(3 + 2m) = 0 \quad , \quad m^2 - 2m - 3 = 0 \quad , \quad m_1 = - \qquad m_2 = 3$$

4) Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione del fascio:

t_1: $\mathbf{x+y+1=0}$ $\qquad$ t_2: $\mathbf{3x-y-9=0}$



$$x_{T_1} = -\frac{b}{2a} = \frac{3+m}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \ , \ y_{T_1} = -2 \quad , \ T_1(1,-2)$$

$$x_{T_2} = \frac{3+3}{2} = 3 \ \ y_{T_2} = 0 \ \ T_2(3,0)$$

La retta T_1T_2 ha equazione: $\frac{y}{-2} = \frac{x-3}{1-3}$ $\qquad$ $\mathbf{x-y-3=0}$

N.B. L'equazione della retta T_1T_2 può essere calcolata applicando la regola degli sdoppiamenti al punto $P_o(x_o, y_o)$.

Fascio di parabole

Consideriamo le parabole γ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e γ_1 di equazione $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$. Scriviamo le equazioni delle due parabole in forma implicita:

[31A] $\quad y - ax^2 - bx - c = 0 \qquad\qquad y - a_1x^2 - b_1x - c_1 = 0$ **[31B]**

e consideriamo una loro combinazione lineare, cioè consideriamo la seguente equazione:

$$\mathbf{y-ax^2-bx-c+k\left(y-a_1x^2-b_1x-c_1\right)=0} \qquad \textbf{[31C]}$$

L'equazione [31C] può essere scritta in una delle due seguenti forme:

$$\mathbf{(k+1)y-(a+ka_1)x^2-(b+kb_1)x-(c+kc_1)=0} \qquad \textbf{[31D]}$$

$$\mathbf{y=\frac{a+ka_1}{k+1}x^2+\frac{b+kb_1}{k+1}x+\frac{c+kc_1}{k+1}} \qquad \textbf{[31E]}$$

Se risulta $k \neq 1$ e $k \neq -\dfrac{a}{a_1}$ abbiamo ancora una parabola ad asse verticale e l'equazione **[31C]** oppure l'equazione **[31D]** oppure l'equazione **[31E]** rappresenta l'equazione di un fascio di parabole con l'asse parallelo all'asse della ordinate.

Le parabole γ e γ_1 sono le generatrici del fascio. Diciamo anche che le parabole γ e γ_1 individuano o generano il fascio.

Se le parabole γ e γ_1, che individuano il fascio, **hanno due punti in comune**, allora **tutte le parabole del fascio passano per tali punti**, detti **punti base del fascio**.

Un fascio di parabole può essere anche scritto nella forma $y = ax^2 + bx + c$ con a, b, c funzioni lineari di un parametro k.

Quindi l'equazione $\mathbf{y=(dk+e)x^2+(fk+g)x+(mk+n)}$ rappresenta l'equazione di un fascio di parabole ad asse verticale.

Al variare di k otteniamo tutte le parabole del fascio con l'unica eccezione della parabola γ_1 che si ottiene per $k = \infty$. La parabola γ si ottiene per $k = 0$.

Per $\mathbf{k=-\dfrac{a}{a_1}}$ otteniamo l'equazione della retta AB congiungente i punti base A, B (se esistono) del fascio. **Tale retta, assieme alla retta impropria del piano, costituisce una parabola degenere del fascio.** L'equazione [31D] diventa una equazione di primo grado ad una incognita e quindi rappresenta una retta, precisamente la retta AB.

Per $\mathbf{k=-1}$ otteniamo le equazioni di una coppia di rette parallele all'asse delle ordinate passanti per i punti base A, B (se esistono) del fascio. Esse hanno equazioni $x = x_A$, $x = x_B$ e si ottengono risolvendo l'equazione $\mathbf{(a-a_1)x^2+(b-b_1)x+(c-c_1)=0}$ **[32A]**

Queste rette costituiscono una parabola degenere del fascio la cui equazione è la **[32A].**

Se le parabole γ e γ_1, che individuano il fascio, **hanno un solo punto in comune**, allora tutte le parabole del fascio passano per questo punto detto punto base del fascio.

Se le due parabole non hanno punti in comune allora non esistono punti base reali e le parabole del fascio non hanno alcun punto in comune.

ESEMPIO **Determinare le coordinate dei punti base del fascio di parabole di equazione** $y = (k+1)x^2 + 3x - k + 2$

$k = 0 \Rightarrow y = x^2 + 3x + 2$, $k = 1 \Rightarrow y = 2x^2 + 3x + 1$ $\begin{cases} y = x^2 + 3x + 2 \\ y = 2x^2 + 3x + 1 \end{cases}$

$A(1;6)$ e $B(-1;0)$ sono i punti base del fascio. $V_1\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ $V_2\left(-\frac{3}{4};.\frac{1}{8}\right)$.

Scriviamo l'equazione del fascio nella seguente maniera: $y = k(x^2 - 1) + x^2 + 3x + 2$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ sono le ascisse dei punti base del fascio

Sostituendo questi valori nell'equazione del fascio otteniamo le ordinate dei punti base del fascio: $y = 0$, $y = 6$ Abbiamo così ritrovato le coordinate dei punti base del fascio $A(1;6)$ e $B(-1;0)$. AB : $3x - y + 3 = 0$

Osservazione Per scrivere l'equazione di un fascio di parabole dobbiamo conoscere le equazioni delle due parabole che lo generano. Per semplificare i calcoli nella risoluzione di certi problemi, potrebbe risultare più utile sostituire l'equazione di una delle due parabole che individuano il fascio con l'equazione di una delle parabole degeneri del fascio stesso.

Vediamo in sintesi se il fascio di parabole avente equazione

$$(k+1)y - (a + k a_1)x^2 - (b + k b_1)x - (c + k c_1) = 0 \qquad \textbf{[31D]}$$

contiene rette o coppie di rette (parabole degeneri)

1) caso: $\mathbf{k = -1 \wedge a \neq a_1 \wedge \Delta > 0}$ Il fascio di parabole ammette due punti base reali e distinti.

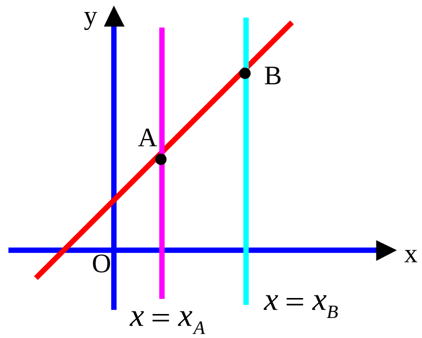
Il fascio contiene **due** parabole degeneri:

1) una parabola degenere è costituita dalla retta AB, non parallela all'asse y, ed avente equazione che si ottiene dalla [31D] quando risulta $a + k a_1 = 0$ cioè quando risulta $k = -\frac{a}{a_1}$.

La sua equazione è: $$\left(-\frac{a}{a_1} + 1\right)y - \left(b - \frac{a}{a_1}\cdot b_1\right)x - \left(c - \frac{a}{a_1}\cdot c_1\right) = 0$$

$(a_1 - a)y + (a b_1 - a_1 b)x + (a c_1 - a_1 c) = 0$ retta AB per $k = -\frac{a}{a_1}$.

2) l'altra parabola degenere è costituita da due coppie di rette parallele all'asse delle y aventi equazioni $x = x_A$, $x = x_B$ [$(x - x_A)(x - x_B) = 0$ equazione complessiva delle due rette]



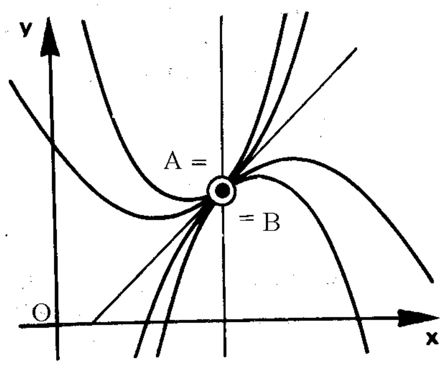
Il fascio di parabole ha due punti base e **due** parabole degeneri:

1) la retta AB

2) la coppia di rette $x - x_A = 0 \quad x - x_B = 0$

2° caso: $\mathbf{k = -1 \wedge a \neq a_1 \wedge \Delta = 0}$

$[\ A \equiv B \equiv T\ ]$

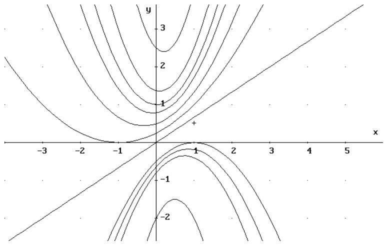


Il fascio di parabole ammette due **punti base** reali e coincidenti. Il fascio contiene **due** parabole degeneri

1) una parabola degenere è costituita dalla tangente **t** la cui equazione si ottiene dall'equazione del fascio quando risulta $a + k a_1 = 0$ cioè quando risulta $k = -\dfrac{a}{a_1}$. La sua equazione è: $\mathbf{(a_1 - a)y + (ab_1 - a_1 b)x + (ac_1 - a_1 c) = 0}$

2) l'altra parabola degenere è costituita dalla coppia di rette coincidenti $\mathbf{(x - x_T)^2 = 0}$.

Il fascio di parabole ha un punto base doppio T.



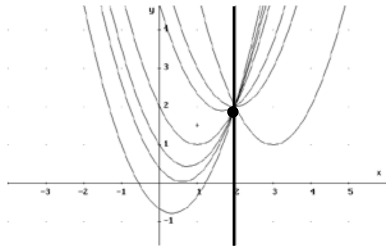
3° CASO: $\mathbf{k = -1 \wedge a \neq a_1 \wedge \Delta < 0}$

Esiste una sola parabola degenere, precisamente la retta **s** che si ottiene dall'equazione del fascio quando risulta

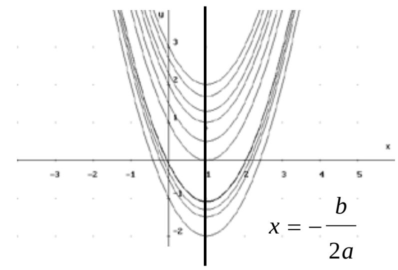
$a + k a_1 = 0$ cioè quando risulta $k = -\dfrac{a}{a_1}$.

4° caso $k = -1 \wedge a = a_1 \wedge b \neq b_1$

Esiste una sola parabola degenere costituita dalla coppia di rette $(x - x_A)^2 = 0$. Esiste un solo punto base. Tutte le parabole del fascio hanno la **stessa concavità** $x = x_A = \dfrac{c_1 - c}{b - b_1}$



5° caso $k = -1 \wedge a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c \neq c_1$



Il fascio di parabole non ha punti base e non contiene rette, cioè **non presenta** parabole degeneri.

Il fascio ha equazione: $y = ax^2 + bx + \frac{c + kc_1}{1 + k}$

6° caso $k = -1 \wedge a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c = c_1$

Le due generatrici del fascio di parabole coincidono e la combinazione lineare delle loro equazioni non rappresenta un fascio di parabole. [36]

Scrivere l'equazione del fascio di parabole passanti per i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$

[caso particolare**:** $A(2,3)$ **,** $B(4,5)$ **]**

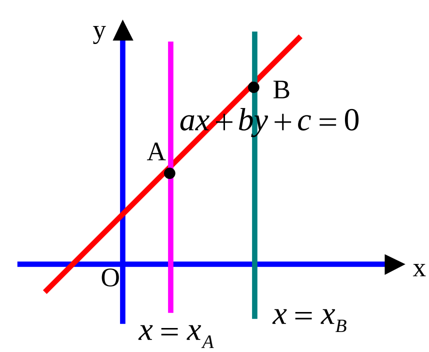
Primo Procedimento $\gamma : y = ax^2 + bx + c \quad A \in \gamma \Rightarrow 3 = 4a + 2b + c \quad B \in \gamma \Rightarrow$

$5 = 16a + 4b + c \quad \begin{cases} 3 = 4a + 2b + c \\ 5 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 - 6a \\ c = 1 + 8a \end{cases} \quad \boxed{y = ax^2 + (1 - 6a)x + 1 + 8a}$

è l'equazione del fascio di parabole aventi $A(2,3)$ **e** $B(4,5)$ come punti base**.**

Secondo Procedimento: Si scrive l'equazione della retta $AB : ax + by + c = 0$ [$x - y + 1 = 0$].

Considerate le rette verticali $x = x_A$, $x = x_B$ (passanti per i punti base) si scrive l'equazione della parabola degenere del fascio : $(x - x_A)(x - x_B) = 0$ [$x^2 - 6x + 8 = 0$]



Il fascio richiesto ha equazione: $\mathbf{ax + by + c + \lambda(x - x_A)(x - x_B) = 0}$

$x - y + 1 + \lambda(x^2 - 6x + 8) = 0 \qquad \mathbf{y = \lambda x^2 + (1 - 6\lambda)x + 1 + 8\lambda}$

---

[36] Dodero Baroncini Manfredi Pagina 311

Questo fascio comprende la parabola degenere di equazione $x^2 - 6x + 8 = 0$ costituita dalle rette verticali $x = 2$, $x = 4$. Questo fascio contiene:

- la retta AB (si ottiene per $\lambda = 0$)
- la coppia di rette di equazioni $x = 2$, $x = 4$ (la cui equazione complessiva vale $x^2 - 6x + 8 = 0$) che si ottiene per $\lambda = \infty$ o , meglio , introducendo i parametri omogenei **h , k** ($\lambda = \dfrac{h}{k}$): $k(x - y + 1) + h(x^2 - 6x + 8) = 0$ per $k = 0$

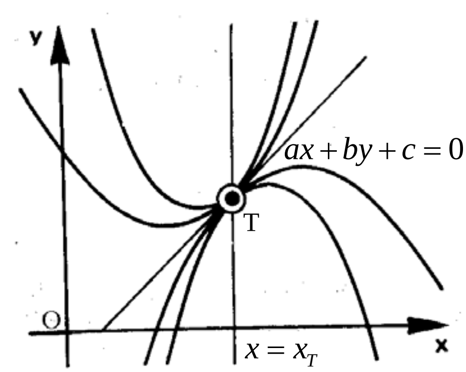
Scrivere l'equazione del fascio di parabole aventi come vertice il punto $V(x_V , y_V)$ e passante per il punto $A(x_A ; y_A)$.

$\mathbf{y - y_V = a(x - x_V)^2}$ è l'equazione del fascio di parabole aventi come vertice il punto $V(x_V , y_V)$. Imponendo il passaggio per il punto $A(x_A ; y_A)$ ci ricaviamo il valore del parametro **a. Otteniamo:**

$$y_A - y_V = a(x_A - x_V)^2 \qquad a = \frac{y_A - y_V}{(x_A - x_V)^2}$$

$$y - y_V = \frac{y_A - y_V}{(x_A - x_V)^2} \cdot (x - x_V)^2 \qquad y = \frac{y_A - y_V}{(x_A - x_V)^2} x^2 - \frac{2x_V(y_A - y_V)}{(x_A - x_V)^2} x + \frac{x_V^2(y_A - y_V)}{(x_A - x_V)^2} + y_V$$

Scrivere l'equazione del fascio di parabole tangenti alla retta t di equazione $ax + by + c = 0$ nel suo punto T di ascissa $x = x_T$ [$t : 2x + y = 0$, $T(1;-2)$]



Consideriamo il fascio generato dalle parabole degeneri $ax + by + c = 0$, $(x - x_T)^2 = 0$

L'equazione del fascio è : $\mathbf{ax + by + c + \lambda(x - x_T)^2}$ $2x + y + \lambda(x - 1)^2 = 0$

$$2x + y + \lambda x^2 - 2\lambda x + \lambda = 0 \qquad y = -\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$$

Riepilogo finale

$\mathbf{ax+by+c+k(x-x_A)(x-x_B)=0}$ è l'equazione di un fascio di parabole avente $A(x_A, y_A)$ **e** $B(x_B, y_B)$ come punti base del fascio, mentre $\mathbf{ax+by+c=0}$ è l'equazione della retta AB.

$\mathbf{ax+by+c+k(x-x_T)^2=0}$ è l'equazione di un fascio di parabole tangenti alla retta $\mathbf{ax+by+c=0}$ nel suo punto di ascissa $\mathbf{x_T}$.

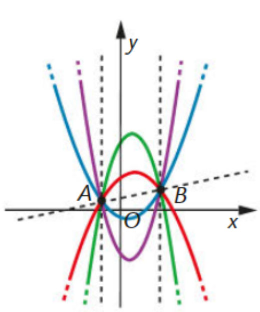
Un altro modo di introdurre il fascio di parabole.

Fascio di parabole

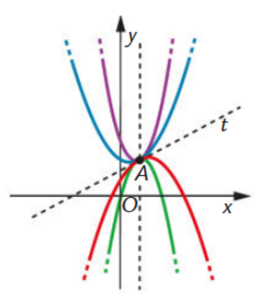
$$\mathbf{y-ax^2-bx-c+k(y-a_1x^2-b_1x-c_1)=0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{(k+1)y-(a+ka_1)x^2-(b+kb_1)x-(c+kc_1)=0}$$

è l'equazione di un fascio di parabole generato dalle parabole γ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e γ_1 di equazione $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$

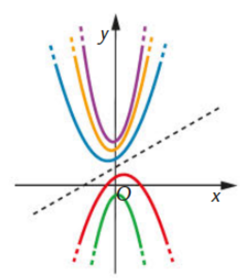
Si possono avere i seguenti fasci di parabole:



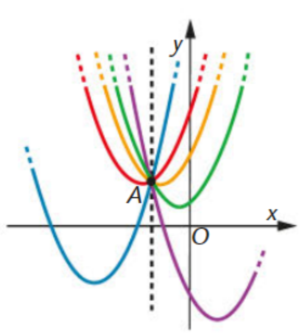
a. Fascio di parabole con due punti base.



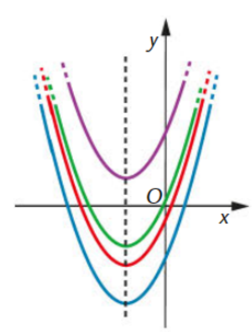
b. Fascio di parabole con un punto base doppio (ovvero due punti base coincidenti).



c. Fascio di parabole non congruenti privo di punti base.



a. Fascio di parabole con un punto base (non doppio).



b. Fascio di parabole congruenti privo di punti base.

Fascio a

Una parabola degenere è costituita dalla retta AB di equazione $ax+by+c=0$, un'altra parabola degenere è costituita $(x - x_A)(x - x_B) = 0$ equazione complessiva delle due rette di equazioni $x - x_A = 0$ $x - x_B = 0$

$\mathbf{ax+by+c+\lambda(x-x_A)(x-x_B)=0}$ è l'equazione del fascio avente come punti base $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$

Fascio b

Il fascio di parabole ammette due **punti base** reali e coincidenti, cioè tutte le parabole del fascio sono tangenti in un punto A. Il fascio contiene **due** parabole degeneri

1) una parabola degenere è costituita dalla tangente **t** la cui equazione è:

$$ax+by+c=0$$

2) l'altra parabola degenere è costituita dalla coppia di rette coincidenti

$$\mathbf{(x-x_A)^2=0}.$$

L'equazione del fascio è: $\mathbf{ax+by+c+\lambda(x-x_A)^2}$

Fascio c

Esiste una sola parabola degenere, precisamente la retta **s** la cui equazione deve essere data nel problema. Per calcolare l'equazione del fascio deve essere data l'equazione della retta s e l'equazione di una parabola del fascio.

Fascio di parabole con un solo punto base non doppio

Esiste una sola parabola degenere costituita dalla coppia di rette $(x - x_A)^2 = 0$ Esiste un solo punto base. Tutte le parabole del fascio hanno la **stessa concavità**

Fascio di parabole congruenti privo di punti base

Il fascio di parabole non ha punti base e non contiene rette, cioè **non presenta** parabole degeneri. Il fascio ha equazione: $y=ax^2+bx+\lambda$. Per calcolare l'equazione del fascio bisogna conoscere l'equazione di una sua parabola e sostituire il termine noto con una costante.

Osservazione Per scrivere l'equazione di un fascio di parabole dobbiamo conoscere le equazioni delle due parabole che lo generano. Per semplificare i calcoli nella risoluzione di certi problemi, potrebbe risultare più utile sostituire l'equazione di una delle due parabole che individuano il fascio con l'equazione di una delle parabole degeneri del fascio stesso.

Studiare un fascio di parabole significa:

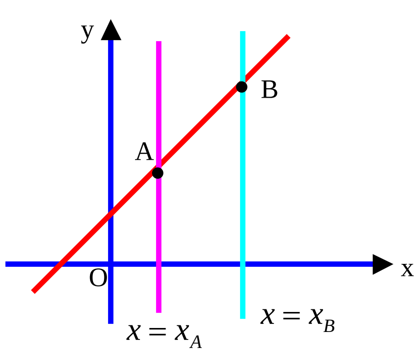
- Trovare le equazioni delle due parabole che lo generano
- Trovare le coordinate dei punti base del fascio
- Trovare le equazioni delle parabole degeneri del fascio

Studiare il seguente fascio di parabole $(k+1)y-(a+ka_1)x^2-(b+kb_1)x-(c+kc_1)=0$ $[\sigma]$

Primo caso: $k+1=0$ cioè $k=-1$ $(a_1-a)x^2+(b_1-b)x+(c_1-c)=0$ $[\rho]$ con $\Delta>0$

L'equazione $[\rho]$ ammette due radici reali e, quindi, il fascio presenta due punti base e **due** parabole degeneri. Ponendo nell'equazione $[\sigma]$ $a+ka_1=0$ cioè $k=-\frac{a}{a_1}$

otteniamo $\left(-\frac{a}{a_1}+1\right)y-\left(b-\frac{a}{a_1}b_1\right)x-\left(c-\frac{a}{a_1}c_1\right)=0$ che è l'equazione della retta AB contenente i punti base del fascio.



Il fascio di parabole ha due punti base e **due** parabole degeneri:

1) la retta AB

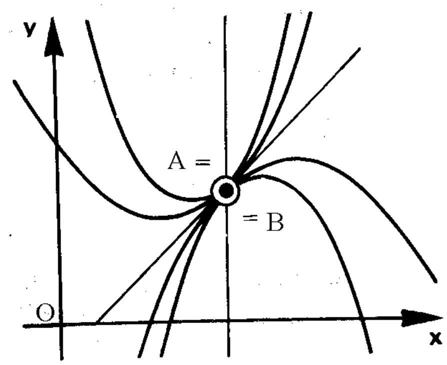
2) la coppia di rette $x - x_A = 0$ $x - x_B = 0$

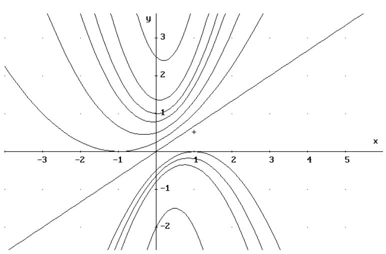
Secondo caso: $k+1=0$ cioè $k=-1$ $(a_1-a)x^2+(b_1-b)x+(c_1-c)=0$ $[\rho]$ con $\Delta=0$

Il fascio di parabole ammette due **punti base** reali e coincidenti e **due** parabole degeneri 1) una parabola degenere è costituita dalla tangente **t** la cui equazione si ottiene dall'equazione del fascio quando risulta $a + k a_1 = 0$ cioè quando risulta $k = -\dfrac{a}{a_1}$. La sua equazione è: $(a_1 - a)y + (ab_1 - a_1 b)x + (ac_1 - a_1 c) = 0$

2) l'altra parabola degenere è costituita dalla coppia di rette coincidenti $(x - x_T)^2 = 0$.

Il fascio di parabole ha un punto base doppio T=A=B.



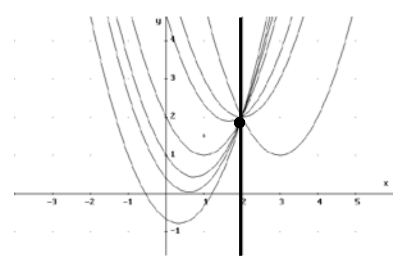


3° CASO: $k = -1 \wedge a \neq a_1 \wedge \Delta < 0$

Esiste una sola parabola degenere, precisamente la retta **s** che si ottiene dall'equazione del fascio quando risulta

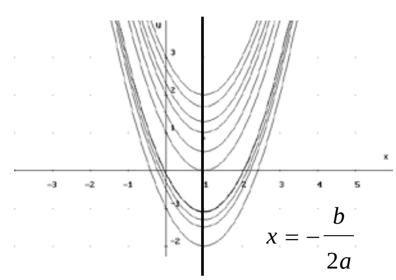
$$a + k a_1 = 0 \quad \text{cioè quando risulta} \quad k = -\frac{a}{a_1} .$$

4° caso $k = -1 \wedge a = a_1 \wedge b \neq b_1$



Esiste una sola parabola degenere costituita dalla coppia di rette $(x - x_A)^2 = 0$. Esiste un solo punto base. Tutte le parabole del fascio hanno la **stessa concavità** $x = x_A = \dfrac{c_1 - c}{b - b_1}$

5° caso $k = -1 \wedge a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c \neq c_1$



Il fascio di parabole non ha punti base e non contiene rette, cioè **non presenta** parabole degeneri.

Il fascio ha equazione: $y = ax^2 + bx + \dfrac{c + kc_1}{1 + k}$

$y = ax^2 + bx + \lambda$

Osservazione

Annullando il coefficiente della **y** o quello della **x²** troviamo le equazioni delle parabole degeneri del fascio.

Esempio numerico

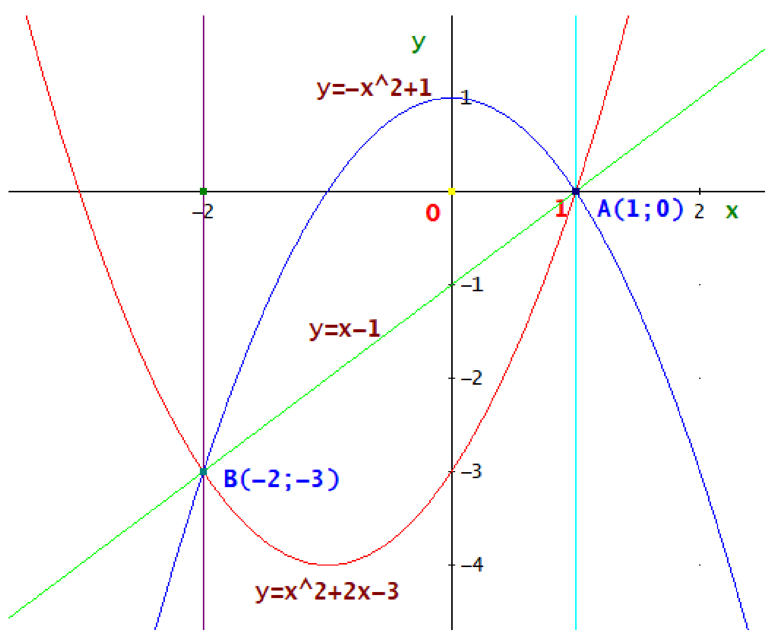
Studiare il fascio di parabole di equazione $(k+1)y+(k-1)x^2-2x+3-k=0$ equivalente a

$$y-x^2-2x+3+k\left(y+x^2-1\right)=0$$

- Le parabole che individuano il fascio hanno equazioni: $y-x^2-2x+3=0 \quad y+x^2-1=0$
- Le coordinate dei punti base si ottengono risolvendo il seguente sistema:

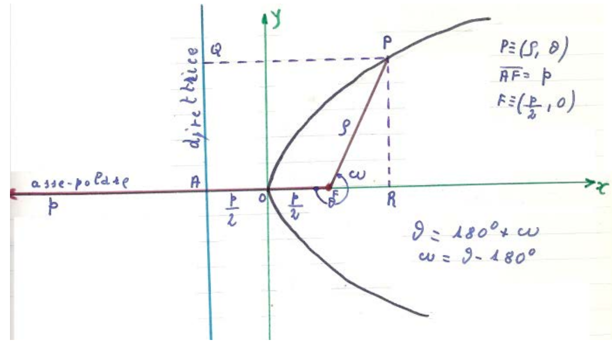
$$\begin{cases} y=x^2+2x-3 \\ y=x^2+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A=1 \\ y_A=0 \end{cases} \quad A(1;0) \quad \begin{cases} x_B=-2 \\ y_B=-3 \end{cases} \quad B(-2;-3)$$

- Ponendo $k-1=0$ otteniamo $2y-2x+2=0$ cioè $y-x+1=0$ è la retta passante per i punti base $A(1;0)$, $B(-2;-3)$ e rappresenta una delle due parabole degeneri del fascio
- Ponendo $k+1=0$ otteniamo $-2x^2-2x+4=0$ cioè $x^2+x-2=0$ le cui radici sono le ascisse dei punti base del fascio. $x^2+x-2=0$ cioè $(x-1)(x-2)=0$ è l'equazione della seconda parabola degenere del fascio.



Equazione polare della parabola

Data la parabola di equazione $y^2 = px$ e scelti il fuoco F come polo e l'asse polare orientato verso la direttrice, l'equazione polare della parabola è: $\rho = \dfrac{p}{1+\cos\vartheta}$ [11]



Infatti, dalla definizione di parabola come luogo geometrico si ha: $\overline{PQ} = \overline{PF} = \rho$

$$\overline{PQ} = \overline{AR} = \overline{AF} + \overline{FR} = p + \rho\cdot\cos\omega = p + \rho\cdot\cos(\vartheta - 180°) = p + \rho\cdot\cos\left[-(180° - \vartheta)\right] = \rho$$

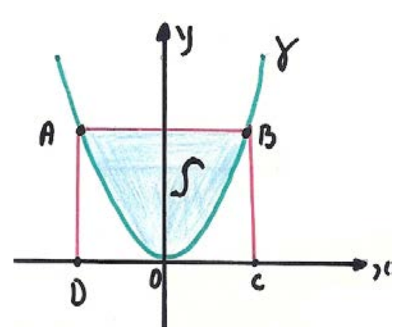
$$p + \rho\cdot\cos(180° - \vartheta) = \rho \quad p - \rho\cdot\cos\vartheta = \rho \quad \rho\cdot\cos\vartheta + \rho = p \quad \rho\cdot(\cos\vartheta + 1) = p \quad \rho = \frac{p}{1+\cos\vartheta} \quad [11]$$

Area del segmento parabolico: regola di Archimede

Sia γ una parabola ad asse verticale avente equazione $y = ax^2 + bx + c$. Siano A e B due punti qualsiasi di γ. Dicesi **segmento parabolico** (ad una base) la regione finita di piano delimitata dalla parabola γ e dalla retta AB.

Regola di Archimede: L'area del segmento parabolico individuato dalla corda AB e dalla parabola γ è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del parallelogramma (rettangolo) che ha per base la corda AB ed il lato opposto situato sulla retta tangente alla parabola e parallela alla corda AB. Con parole diverse possiamo dire che l'area del segmento parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del parallelogramma circoscritto alla parabola avente un lato coincidente con la corda AB e gli altri due paralleli all'asse y; oppure uguale ai $\frac{2}{3}$ del rettangolo circoscritto alla parabola ed avente un lato coincidente con la corda AB.

(1) Trattiamo il caso più semplice considerando la parabola γ di equazione $y = ax^2$ con $a > 0$ e la corda AB parallela all'asse delle ascisse. La retta che contiene tale corda ha equazione $y = k$. Le coordinate degli estremi della corda AB si ottengono risolvendo il sistema:

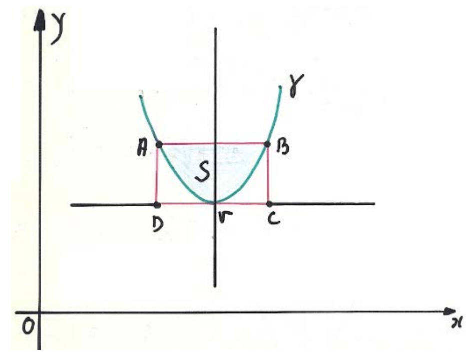


$$\begin{cases} y = k \\ y = ax^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = k \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{k}{a}} \end{cases} \quad A\left(-\sqrt{\frac{k}{a}}; k\right) \quad B\left(\sqrt{\frac{k}{a}}; k\right) \quad d(A,B) = AB = 2\sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$S=2\int_0^{\sqrt{\frac{k}{a}}}\left(y_{AB}-y_\gamma\right)dx=2\int_0^{\sqrt{\frac{k}{a}}}\left(k-ax^2\right)dx=2\left[kx-\frac{ax^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{k}{a}}}=2\left[k\sqrt{\frac{k}{a}}-\frac{\cancel{a}}{3}\cdot\frac{k}{\cancel{a}}\cdot\sqrt{\frac{k}{a}}\right]$$

$$S=\frac{4}{3}\cdot k\sqrt{\frac{k}{a}}=\frac{2}{3}\cdot AB\cdot AD \quad \text{essendo:} \quad AD=k \quad AB=2\sqrt{\frac{k}{a}} \quad S=\frac{2}{3}\cdot S(ABCD)=\frac{2}{3}R$$

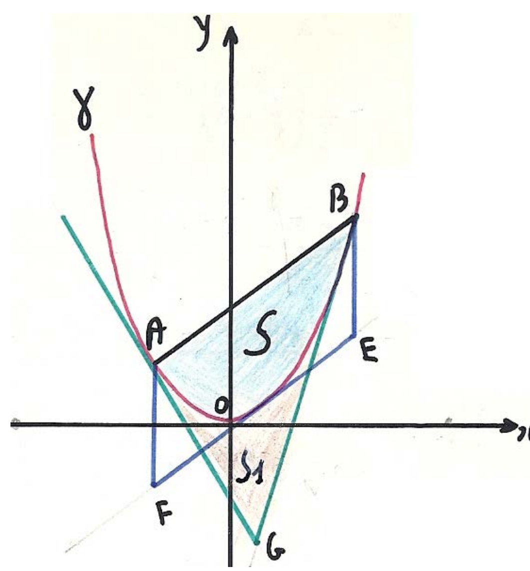
Perveniamo allo stesso risultato se la parabola γ ha equazione $y=ax^2+bx+c$ e la corda AB è parallela all'asse delle ascisse.



Regola di Archimede: L'area S del segmento parabolico individuato dalla parabola γ e dalla corda AB parallela all'asse delle ascisse è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area R del rettangolo circoscritto alla parabola ed avente un lato coincidente con la corda AB.

Adesso analizziamo il caso in cui la corda AB non è parallela all'asse delle ascisse e dimostriamo che l'area S del segmento parabolico può essere calcolata anche con la seguente formula:

$$\mathbf{S=\frac{1}{6}\cdot|a|\cdot|x_B-x_A|^3}$$



Dimostrazione: $A\left(x_A;a\,x_A^2\right)$ $B\left(x_B;a\,x_B^2\right)$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a\,x_B^2-a\,x_A^2}{x_B-x_A}=\frac{a\cdot\left(x_B^2-x_A^2\right)}{x_B-x_A}=\frac{a\cdot\cancel{\left(x_B-x_A\right)}\cdot\left(x_B+x_A\right)}{\cancel{x_B-x_A}} \qquad m_{AB}=a\cdot\left(x_B+x_A\right)$$

Equazione della retta AB: $y-y_A=m_{AB}\left(x-x_A\right)$ $\quad y-a\,x_A^2=a\left(x_B+x_A\right)\left(x-x_A\right)$

$$y=a\cdot\left(x_A+x_B\right)x-a\cdot x_A\cdot\left(x_A+x_B\right)+a\,x_A^2$$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left[a\cdot(x_A+x_B)x-a\cdot x_A\cdot(x_A+x_B)+a\,x_A^2-ax^2\right]dx=a\cdot\int_{\alpha}^{\beta}\left[(x_A+x_B)x-\cancel{x_A^2}-x_A\cdot x_B+\cancel{x_A^2}-x^2\right]dx$$

$$S=a\cdot\left[\frac{1}{2}(x_A+x_B)x^2-x_A\cdot x_B\,x-\frac{1}{3}x^2\right]_{\alpha}^{\beta}=a\cdot\left[\frac{(x_A+x_B)}{2}\left(x_B^2-x_A^2\right)-x_A\cdot x_B\left(x_B-x_A\right)-\frac{1}{3}\left(x_B^3-x_A^3\right)\right]$$

$$S=a\left(x_B-x_A\right)\cdot\left[\frac{x_B^2+x_A^2+2x_A\cdot x_B}{2}-\alpha\,\beta-\frac{x_B^2+x_A\cdot x_B+x_A^2}{3}\right]$$

$$S=a\left(x_B-x_A\right)\cdot\left[\frac{3x_B^2+3x_A^2+\cancel{6x_A\cdot x_B}-\cancel{6x_A\cdot x_B}-2x_B^2-2x_A\cdot x_B-2x_A^2}{6}\right]=\frac{1}{6}a\left(x_B-x_A\right)\cdot\left[x_B^2-2x_A\cdot x_B+x_A^2\right]$$

$$S=\frac{1}{6}a\cdot\left(x_B-x_A\right)\cdot\left(x_B-x_A\right)^2=S=\frac{1}{6}a\cdot\left(x_B-x_A\right)^3$$

Osservazione: Sia G il punto comune alle tangenti a γ rispettivamente in A e B. Si può dimostrare che: $\mathbf{S=\frac{2}{3}\cdot S\left(A\overset{\triangle}{B}G\right)}$ e quindi: $\mathbf{S(ABEF)=S\left(A\overset{\triangle}{B}G\right)}$ cioè il parallelogramma (rettangolo) $ABEF$ è equivalente al triangolo ABG.

$$\mathbf{S_1=S(AGBOA)=\frac{1}{3}S(ABEF)=\frac{1}{2}S}\qquad AG\overset{\triangle}{B}OA = \text{triangolo mistilineo}$$

Regola di Archimede

L'area **S** di un segmento parabolico di base **AB** è uguale all'area del rettangolo **ABCD** circoscritto alla parabola avente un lato coincidente con la corda **AB**. Utilizzando tale regola si può dimostrare per via elementare che tale area **S** si calcola applicando la seguente regola:

$$\mathbf{S=\frac{1}{6}\cdot|a|\cdot|x_B-x_A|^3}$$

Se la parabola ha equazione $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$ e la base **AB** appartiene alla retta di equazione $\mathbf{y=mx+q}$ possiamo calcolare l'area **S** utilizzando la formula: $\mathbf{S=\frac{\sqrt{\left[(b-m)^2-4a(c-q)\right]^3}}{6a^2}}$

con la quale non è necessario calcolare le ascisse dei punti A e B.

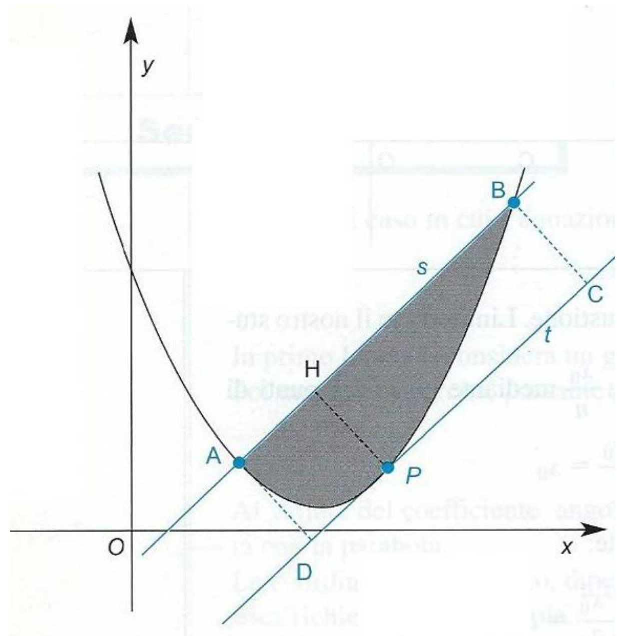
Se la parabola ha equazione $\mathbf{y=ax^2}$ le due precedenti formule diventano:

$$\mathbf{S=\frac{1}{6}\cdot|a|\cdot|x_B-x_A|^3=\frac{\sqrt{\left[m^2-4aq\right]^3}}{6a^2}}$$

Se non vogliamo applicare nessuna delle due formule bisogna procedere come segue:

- Calcoliamo le coordinate dei punti A e B risolvendo il sistema: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$
- Si calcola l'equazione della retta **t** tangente alla parabola e parallela alla retta **AB**
- Si calcolano le coordinate del punto di tangenza **P**. Si trova:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_P = \frac{a x_A^2 + a x_B^2}{2}$$



- l'altezza **h** del rettangolo **ABCD** è la distanza del punto **P** dalla retta **AB**
- la base del rettangolo è il segmento **AB** distanza tra i punti A e B
- $\mathbf{S = S(ABCD) = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot PH}$

Dimostriamo la formula $\mathbf{S = \dfrac{\sqrt{\left[(b-m)^2 - 4a(c-q)\right]^3}}{6a^2}}$ partendo dalla formula $\mathbf{S = \dfrac{1}{6} \cdot |a| \cdot |x_B - x_A|^3}$

Per calcolare le coordinate dei punti A e B bisogna risolvere il sistema: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$

La sua equazione risolvente è: $ax^2 + (b-m)x + c - q = 0$ il suo delta vale: $\Delta = (b-m)^2 + 4a(c-q)$

Dall'algebra elementare sappiamo che: $|x_2 - x_1| = |x_B - x_A| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a} = \dfrac{\sqrt{(b-m)^2 + 4a(c-q)}}{a}$

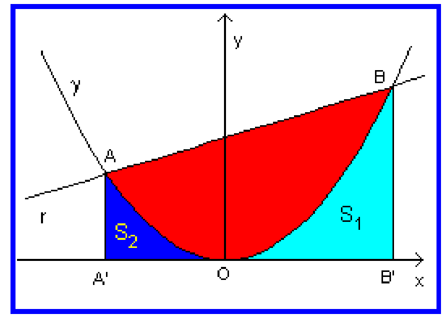
$$\mathbf{S = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot |x_B - x_A|^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = \frac{\sqrt{\left[(b-m)^2 - 4a(c-q)\right]^3}}{6a^2}}$$

$$S = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot \left[\frac{\sqrt{(b-m)^2 - 4a(c-q)}}{a} \right]^3 = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot \frac{\sqrt{\left[(b-m)^2 - 4a(c-q)\right]^3}}{a^3} = \frac{\sqrt{\left[(b-m)^2 - 4a(c-q)\right]^3}}{6a^2}$$

Utilizzando il calcolo integrale voglio dimostrare che:

$$\mathbf{S=\frac{1}{6}\cdot|a|\cdot|x_B - x_A|^3}$$

Il segmento parabolico è generato dall'intersezione della parabola di equazione $y=a\,x^2$ con la retta di equazione $y=m\,x+q$. La base del segmento parabolico è il segmento **AB**, con $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$



$\overline{A'B'}=x_B-x_A$ $\overline{AA'}=a\,x_A^2$ $\overline{BB'}=a\,x_B^2$

L'area **S** del segmento parabolico è uguale alla differenza tra l'area del trapezio $ABB'A'$ e la somma delle aree S_1 ed S_2 dei due triangoli mistilinei.

$$S_1=\int_0^{x_B} a\,x^2\,dx=\frac{a}{3}x_B^3 \qquad S_2=\int_{x_A}^{0} a\,x^2\,dx=-\frac{a}{3}x_A^3$$

$$S_T=\frac{(AA'+BB')\cdot A'B'}{2}=\frac{(a\,x_A^2+a\,x_B^2)\cdot(x_B-x_A)}{2}=\frac{1}{2}(x_A^2+x_B^2)\cdot(x_B-x_A)$$

$$S=S_T-S_1-S_2=\frac{1}{2}(x_A^2+x_B^2)\cdot(x_B-x_A)-\frac{a}{3}x_B^3+\frac{a}{3}x_A^3$$

$$S=\frac{a}{6}\left[3\left(x_B^3-x_A\cdot x_B^2+x_A^2\cdot x_B+x_A^3\right)-2\,x_B^3+2\,x_A^3\right]$$

$$S=\frac{a}{6}\left(3x_B^3-3x_A\cdot x_B^2+3\,x_A^2\cdot x_B-3x_A^3-2\,x_B^3+2\,x_A^3\right)=\frac{a}{6}\left(x_B^3-3x_A\cdot x_B^2+3\,x_A^2\cdot x_B-x_A^3\right)$$

$$S=\frac{a}{6}(x_B-x_A)^3=\mathbf{\frac{1}{6}\cdot|a|\cdot|x_B - x_A|^3}$$

Questa espressione dell'area di un segmento parabolico vale in generale per ogni parabola di equazione $y=a\,x^2+b\,x+c$. Infatti traslando l'origine del sistema di riferimento nel vertice della parabola si riproduce la configurazione studiata.

Altra dimostrazione

Dimostriamo che $x_P=\frac{x_A+x_B}{2}$ $\quad y_P=\frac{a}{4}\cdot(x_A+x_B)^2$

$y-a\,x_P^2=m(x-x_P)$ equazione del fascio di rette di centro $P(x_P;y_P)$. Tra le rette del fascio cerco quella tangente alla parabola di equazione $y=a\,x^2$

$$\begin{cases} y = a\,x^2 \\ y - a\,x_P^2 = m\left(x - x_P\right) \end{cases}$$ $a\,x^2 - m\,x - a\,x_P^2 + m\,x_P$ è l'equazione risolvente il sistema

$\Delta = m^2 - 4a\left(-a\,x_P^2 + m\,x_P\right) = 0$ condizione di tangenza $m^2 - 4\,a\,x_P\,m + 4\,a^2\,x_P^2 = 0$

$\left(m - 2a\,x_P\right)^2 = 0 \quad m = 2\,a\,x_P \quad m_t = m_{AB} \Rightarrow 2\,\cancel{a}\,x_P = \cancel{a}\left(x_A + x_B\right) \quad x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2} \quad y_P = \dfrac{a}{4}\cdot\left(x_A + x_B\right)^2$

$y = a\cdot\left(x_A + x_B\right)x - a\cdot x_A\cdot\left(x_A + x_B\right) + a\,x_{AA}^{\,2}$ equazione della retta AB $P\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{a}{4}\cdot\left(x_A + x_B\right)^2\right)$

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(a\,x_B^2 - a\,x_A^2\right)^2} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + a^2\left(x_B - x_A\right)^2\left(x_B + x_A\right)^2}$$

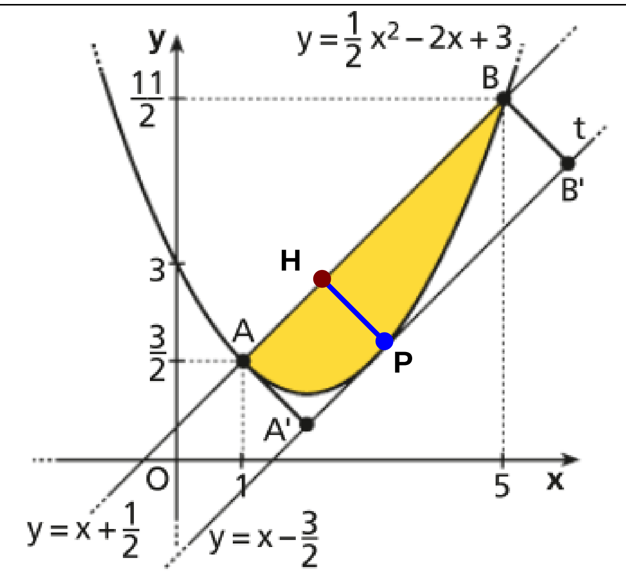
$$AB = \left(x_B - x_A\right)\sqrt{1 + a^2\left(x_B + x_A\right)^2}$$

$$h = d\left(P;AB\right) = \frac{\dfrac{a}{2}\left(x_B + x_A\right)^2 - \dfrac{a}{4}\left(x_B + x_A\right)^2 - \cancel{a\,x_A^2} - a\,x_A\,x_B + \cancel{a\,x_A^2}}{\sqrt{a^2\left(x_B + x_A\right)^2 + 1}}$$

$$h = \frac{2a\left(x_B + x_A\right)^2 - a\left(x_B + x_A\right)^2 - 4a\,x_A\,x_B}{4\sqrt{a^2\left(x_B + x_A\right)^2 + 1}} = \frac{a}{4}\cdot\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{\sqrt{a^2\left(x_B + x_A\right)^2 + 1}}$$

$$S = \frac{2}{3}\cdot AB\cdot h = \frac{2}{3}\cdot\left(x_B - x_A\right)\sqrt{1 + a^2\left(x_B + x_A\right)^2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{\left(x_B - x_A\right)^2}{\sqrt{a^2\left(x_B + x_A\right)^2 + 1}} = \frac{a}{6}\cdot\left(x_B - x_A\right)^3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\cdot\left|\mathbf{a}\right|\cdot\left|\mathbf{x_B - x_A}\right|^3$$

Calcolare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola γ di equazione $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e dalla retta di equazione $y = x + \dfrac{1}{2}$.



Per calcolare le coordinate dei punti A e B bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad A\left(1; \frac{3}{2}\right) \qquad B\left(5; \frac{11}{2}\right)$$

La retta tangente a γ e paralella alla retta **AB** incontra la parabola nel punto $P(x_P; y_P)$

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \quad y_P = \frac{1}{2}\cdot 9 - 6 + 3 = \frac{3}{2} \qquad P\left(3; \frac{3}{2}\right)$$

$y = x - \frac{3}{2}$ equazione della retta tangente a γ nel punto $P\left(3; \frac{3}{2}\right)$

$AB = \sqrt{(5-1)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ retta **AB** : $2x - 2y + 1 = 0$

$$h = d(P; AB) = \frac{6-3+1}{\sqrt{4+4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad S = \frac{2}{3}\cdot AB \cdot h = \frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{16}{3}$$

Le condizioni che individuano la parabola

L'equazione di una parabola con l'asse parallelo ad uno dei due assi cartesiani dipende in generale da tre parametri essenziali. Pertanto per individuare almeno una parabola di questo tipo occorrono tre condizioni che si tradurranno in altrettante equazioni nei parametri **a,b,c**. Il prodotto dei gradi di queste tre equazioni ci fornisce il numero massimo di parabole reali che verificano le tre condizioni date.

Elenchiamo le principali condizioni, con il rispettivo grado, a cui di solito una parabola è sottoposta.

(1) Il passaggio della parabola per il punto $P_1(x_1,y_1)$ di assegnate coordinate equivale ad una condizione (di **appartenenza**) di primo grado. Infatti i coefficienti **a,b,c** debbono verificare l'equazione di primo grado $\mathbf{y_1 = a x_1^2 + b x_1 + c}$:

(2) La **condizione di tangenza** ad una retta di data equazione $y = mx + n$ equivale ad una condizione di secondo grado:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases} \qquad ax^2 + (b-m)x + c - n = 0 \qquad \Delta = (b-m)^2 - a(c-n) = 0$$

(3) Conoscere il vertice $V(x_V;y_V)$ di una parabola significa assegnare due condizioni di primo grado, precisamente:

$x_V = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$ (equazione solo apparentemente di secondo grado); oppure:

$x_V = -\dfrac{b}{2a}$, $\quad y_V = a x_V^2 + b x_V + c$ (appartenenza del vertice alla parabola)

(4) Conoscere il fuoco $\mathbf{F(x_F;y_F)}$ di una parabola significa assegnare due condizioni di primo grado. $\quad x_F = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a}$ (equazione solo apparentemente di secondo grado); oppure:

(5) La conoscenza del vertice V e del fuoco F di una parabola corrisponde a tre condizioni (e non a quattro) di primo grado (di cui solo due apparentemente di secondo grado).

$$x_V = x_F = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = \frac{-\Delta}{4a} \qquad y_F = \frac{1-\Delta}{4a}$$

(6) la conoscenza della direttrice corrisponde ad una condizione di primo grado: $\mathbf{y_d = -\dfrac{1+\Delta}{4a}}$

(7) La conoscenza dell'asse di una parabola corrisponde ad una condizione di primo grado:

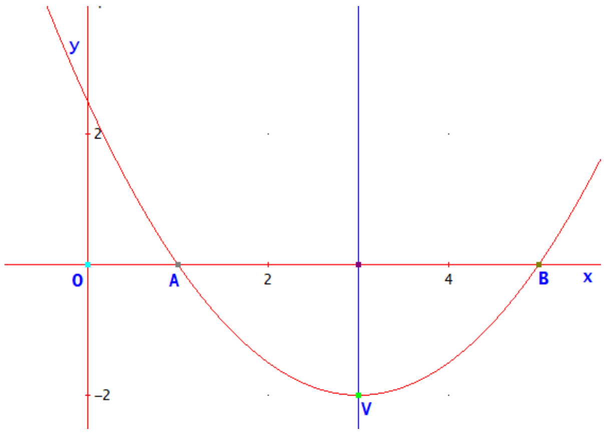
$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

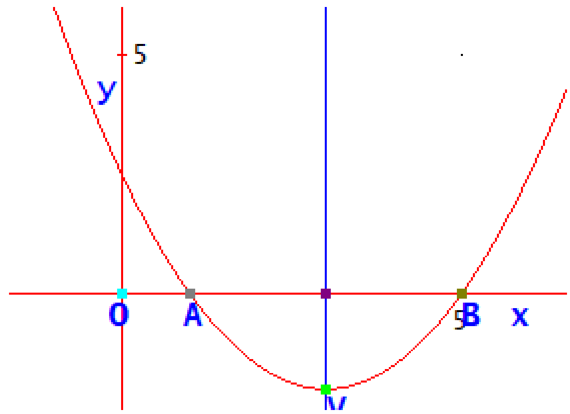
(8) La conoscenza del fuoco F e della direttrice di una parabola corrisponde a tre condizioni di primo grado (di cui solo due apparentemente di secondo grado).

$$x_F = -\frac{b}{2a} \qquad y_F = \frac{1-\Delta}{4a} \qquad \mathbf{y_d = -\frac{1+\Delta}{4a}}$$

Equazioni di particolari parabole

(1) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale passante per due punti $A(x_A;0)$ e $B(x_B;0)$ dell'asse delle ascisse.





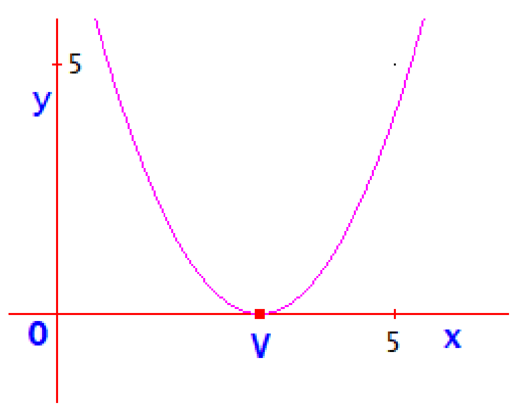
$y=a(x-x_A)(x-x_B)$ è l'equazione richiesta in quanto essa è verificata dalle coordinate dei punti $A(x_A;0)$ e $B(x_B;0)$. Si tratta di un fascio di parabole passante per i punti $A(x_A;0)$ e $B(x_B;0)$.

(2) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale passante per un punto $P_1(x_1;0)$ dell'asse delle ascisse.

La parabola richiesta ha equazione $\mathbf{y=a(x-x_1)(x-k)}$ dove i parametri da determinare sono a e k.

(3) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale tangente all'asse delle ascisse.

La parabola richiesta ha equazione $\mathbf{y=(kx+h)^2}$ in quanto questa equazione soddisfa le condizioni di tangenza con l'asse delle ascisse. I parametri da determinare sono h e k.



(4) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale tangente all'asse delle ascisse nel punto $V(x_V;0)$. Vedere figura precedente

La parabola richiesta ha equazione $\mathbf{y=a(x-x_V)^2}$ in quanto è verificata dalle coordinate del punto $V(x_V;0)$ e verifica la condizione di tangenza con l'asse delle ascisse. L'unico parametro da determinare è a.

(5) Scrivere l'equazione del fascio di parabole ad asse verticale aventi come vertice il punto $V(x_V;y_V)$.

$\mathbf{y-y_V=a(x-x_V)^2}$ L'unico parametro da determinare è a.

(6) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale Avente come vertice il punto $V(x_V;y_V)$ e come fuoco il punto $F(x_F=x_V;y_F)$.

Si considera il seguente sistema $\begin{cases} \mathbf{y-y_V=a(x-x_V)^2} \\ y_F=y_V+\dfrac{1}{4a} \end{cases}$ $y_V=\mathbf{\dfrac{-\Delta}{4a}}$ $\mathbf{y_F=\dfrac{1-\Delta}{4a}=\dfrac{-\Delta}{4a}+\dfrac{1}{4a}=y_V+\dfrac{1}{4a}}$

Dalla relazione $y_F=y_V+\dfrac{1}{4a}$ mi ricavo il valore del parametro a, che sostituito nella relazione $\mathbf{y-y_V=a(x-x_V)^2}$ ci fornisce l'equazione della parabola richiesta.

r) una proprietà della parabola.

« Il segmento di tangente ad una parabola i cui estremi sono il punto di tangenza e l'intersezione con la direttrice è visto dal fuoco secondo un angolo retto ».

Per semplificare i calcoli ci riferiamo ad una parabola avente equazione $y = ax^2$, il cui fuoco ha coordinate $(0, {}^{p}/_{2})$ e la cui direttrice ha equazione $y = -{}^{p}/_{2}$.

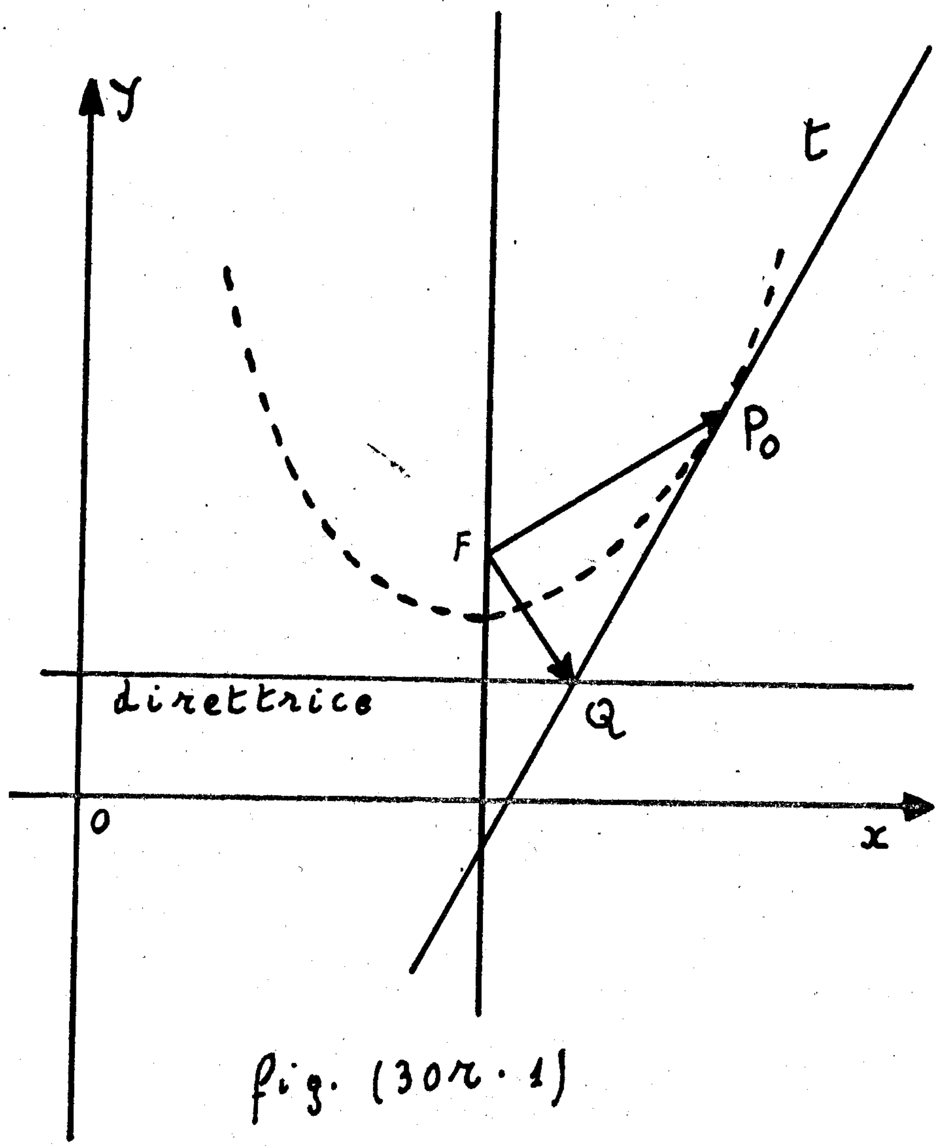


fig. (30r · 1)

La retta tangente alla parabola nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ha equazione $x_0 x = p(y + y_0)$

$$x_Q = \frac{p}{x_0}\left(y_0 - \frac{p}{2}\right), \qquad y_Q = -p/2$$

sono le coordinate del punto comune alla tangente t ed alla direttrice.

Esse si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -p/2 \\ x_0 x = p(y + y_0) \end{cases}$$

$$P_0 - F = x_0 \cdot \vec{i} + \left(y_0 - \frac{p}{2}\right) \cdot \vec{j}$$

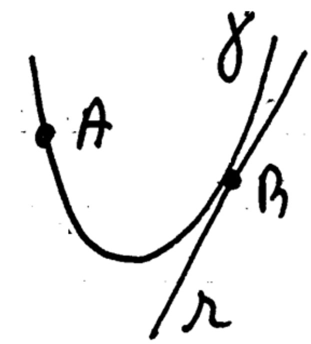
$$Q - F = \frac{p}{x_0}\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) \cdot \vec{i} - p \cdot \vec{j}$$

$$(Q - F) \times (P_0 - F) = x_0 \cdot \frac{p}{x_0}\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) + -p\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) = 0$$

Quindi:

$$\widehat{QFP_0} = 90°$$

Scrivere l'equazione della parabola γ ad asse verticale passante per il punto $A(x_A;y_A)$ e tangente in $B(x_B;y_B)$ alla retta r di equazione $a_1x+b_1y+c_1=0$



Primo metodo

$A\in\gamma \quad\Rightarrow\quad a x_A^2+b x_A+c=y_A \quad [1]$

Retta tangente a γ nel punto $B(x_B;y_B)$: $\dfrac{y+y_B}{2}=a x_B x+\dfrac{b(x+x_B)}{2}+c \quad\Rightarrow\quad Ax+By+C=0$

Questa retta coincide con la retta r se: $\dfrac{A}{a_1}=\dfrac{B}{b_1}=\dfrac{C}{c_1}$ utilizzando due di queste tre uguaglianze assieme alla [1] possiamo calcolare i valori a,b,c e quindi l'equazione $y=ax^2+bx+c$ della parabola richiesta.

Secondo procedimento

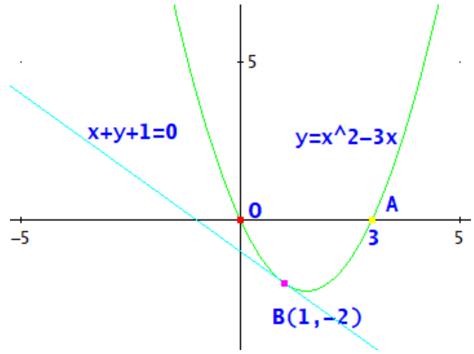
γ: $y=ax^2+bx+c \qquad A\in\gamma \quad\Rightarrow\quad a x_A^2+b x_A+c=y_A \qquad B\in\gamma \quad\Rightarrow\quad a x_B^2+b x_B+c=y_B$

$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ Eliminando la y otteniamo l'equazione risolvente: $p x^2+q x+d=0$

Impongo la condizione di tangenza $\Delta=q^2-4pd=0 \qquad \begin{cases} a x_A^2+b x_A+c=y_A \\ a x_B^2+b x_B+c=y_B \\ q^2-4pd=0 \end{cases}$

Si tratta di un sistema lineare nelle tre incognite a,b,c le cui soluzioni risolvono il problema.

Scrivere l'equazione della parabola γ ad asse verticale passante per il punto $A(3;0)$ e tangente in $B(1;-2)$ alla retta di equazione $x+y+1=0$



$\gamma:\ \mathbf{y = ax^2 + bx + c} \quad A\in\gamma \quad 9a+3b+c=0$

$\frac{y-2}{2}=ax+\frac{b(x+1)}{2}+c$ è l'equazione della retta tangente a γ nel punto $\mathbf{B(1;-2)}$ **applicando la regola degli sdoppiamenti**

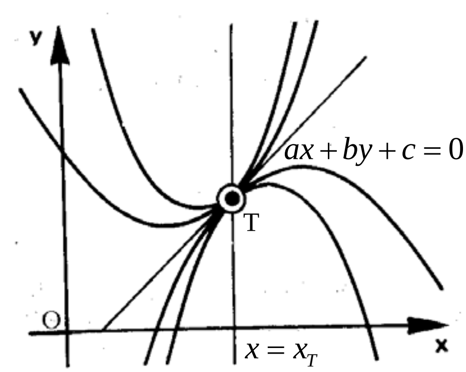
$(2a+b)x-y+b+2c+2=0$ tale retta coincide con la retta $\mathbf{x+y+1=0}$ **se:**

$$\frac{2a+b}{1}=\frac{-1}{1}=\frac{b+2c+2}{2} \qquad \begin{cases} 2a+b=-1 \\ b+2c+2=-1 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \end{cases} \quad \gamma:\ \mathbf{y = x^2 - 3x}$$

Altra soluzione

Mi scrivo l'equazione del fascio di parabole tangenti alla retta di equazione $\mathbf{x+y+1=0}$ nel punto $\mathbf{B(1;-2)}$

Scrivere l'equazione del fascio di parabole tangenti alla retta t di equazione $ax + by + c = 0$ **nel suo punto T di ascissa** $x = x_T$ L'equazione del fascio è: $\mathbf{ax+by+c+\lambda(x-x_T)^2}$



L'equazione del fascio è: $\mathbf{ax+by+c+\lambda(x-x_T)^2} \quad x+y+1+\lambda(x-1)^2=0$

$A\in\gamma \ \Rightarrow \ 3+1+\lambda(3-1)^2=0 \quad 4+4\lambda=0 \quad \lambda=-1 \quad x+y+1-(x-1)^2=0$

$x+y+\cancel{1}-x^2=0+2x-\cancel{1}=0 \quad \gamma:\ \mathbf{y = x^2 - 3x}$

Altra soluzione

$A\in\gamma \Rightarrow 9a+3b+c=0 \quad B\in\gamma \Rightarrow a+b+c=-2 \quad \mathbf{c+2=-(a+b)}$

$$\begin{array}{ccccccc} 9a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ \hline 8a & + & 2b & & & = & 2 \end{array}$$

$4a+b=1 \quad \mathbf{b=1-4a}$ Impongo la condizione di tangenza:

$\begin{cases} y=-x-1 \\ \mathbf{y = ax^2 + bx + c} \end{cases} \quad ax^2+bx+c=-x-1 \quad \mathbf{ax^2+(b+1)x+c+1=0} \quad \Delta=(b+1)^2-4a(c+1)=0$

$(b+1)^2+4a(a+b+1)=0 \qquad (1-4a+1)^2+4a(a+1-4a+1)=0 \quad 4(a^2-2a+1)=0$

$(a-1)^2=0 \quad a-1=0 \quad \mathbf{a=1} \quad \mathbf{b=-3} \quad \mathbf{c=0}$

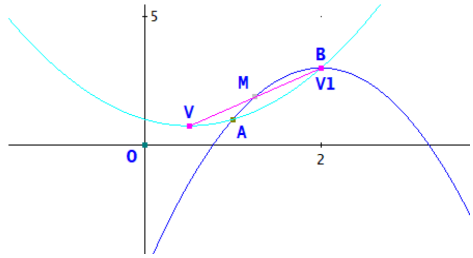
Scrivere l'equazione della parabola γ passante per i punti $\mathbf{A(x_A;y_A)}$ e $\mathbf{B(x_B;y_B)}$ ed avente il vertice $V(x_V;y_V)$ sulla retta r di equazione $a_1x+b_1y+c_1=0$.

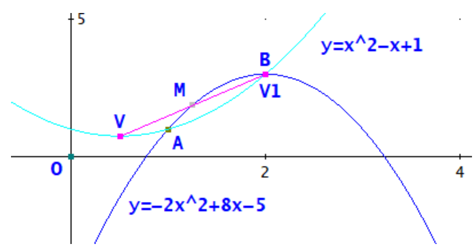
Basta imporre l'appartenenza dei punti $\mathbf{A(x_A;y_A)}$ e $\mathbf{B(x_B;y_B)}$ alla parabola γ e del vertice $V(x_V;y_V)$ alla retta r.

$A\in\gamma; \quad B\in\gamma; \quad V\left(\frac{-b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\in r$

Otteniamo due parabole che sono simmetriche rispetto al punto medio del segmento avente come estremi i vertici delle due parabole.

Scrivere l'equazione della parabola γ passante per i punti $\mathbf{A(1;1)}$ e $\mathbf{B(2;3)}$ ed avente il vertice $V(x_V;y_V)$ sulla retta r di equazione $\mathbf{3x-2y=0}$.





$r: \ \mathbf{3x-2y=0} \quad V\left(\frac{-b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)\in r \quad \Rightarrow \quad -\frac{3b}{\cancel{2}a}+\frac{\cancel{2}(b^2-4ac)}{\cancel{4a}} \quad b^2-3b-4ac=0$

$A \in \gamma \Rightarrow a+b+c=1 \quad B \in \gamma \Rightarrow 4a+2b+c=3 \quad \begin{cases} b^2-3b-4ac=0 \\ a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \\ c=-5 \end{cases}$

$\gamma : \mathbf{y=x^2-x+1} \quad \mathbf{V\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)} \quad \gamma_1 : \mathbf{y=-2x^2+8x-5} \quad \mathbf{V_1(2;3)}$

Formulario sulla parabola

La parabola

Si chiama parabola il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F, detto fuoco, e da una retta fissa detta direttrice. Assumendo l'asse x parallelo alla direttrice, si dimostra che la parabola ha equazione:

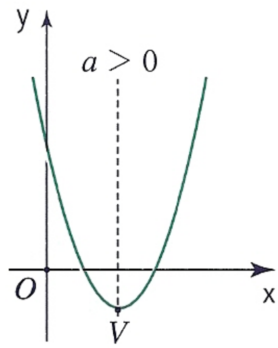
$$y = ax^2 + bx + c$$

In questa parabola (essendo $\Delta = b^2 - 4ac$):

Il vertice è il punto di coordinate:	$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
L'asse di simmetria è la retta, parallela all'asse y, di equazione:	$x = -\frac{b}{2a}$.
Il fuoco è il punto di coordinate:	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$.
La direttrice della retta, parallela all'asse delle x, ha equazione:	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.
La parabola di vertice $V(x_v, y_v)$ ha equazione:	$y - y_v = a(x - x_v)^2$.

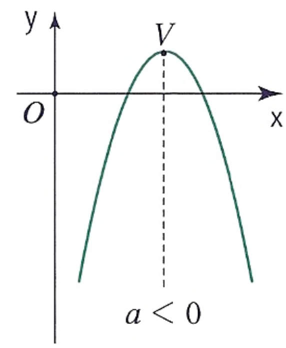
Se nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$

$a > 0$ $\Rightarrow$ la parabola volge la concavità verso l'alto (Figura a).



▲ Figura a

$a < 0$ $\Rightarrow$ la parabola volge la concavità verso il basso (Figura b).



▲ Figura b

Casi particolari

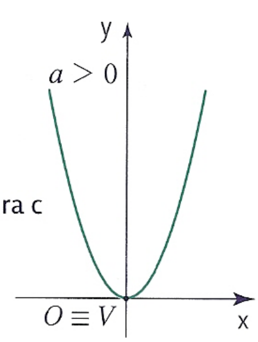
$y = ax^2$

vertice; $V(0;0)$

asse: $x = 0$

fuoco: $F\left(0;\frac{1}{4a}\right)$

direttrice: $y = -\frac{1}{4a}$ (Figura c)



▲ Figura c

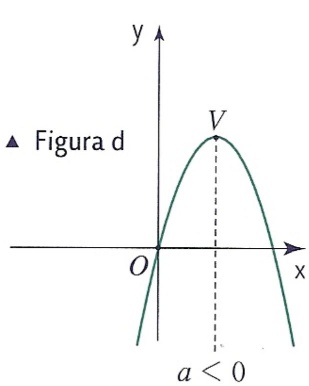
$y = ax^2 + bx$

$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$

$x = -\frac{b}{2a}$

$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-1-b^2}{4a}\right)$

$y = \frac{-1-b^2}{4a}$ (Figura d)



▲ Figura d

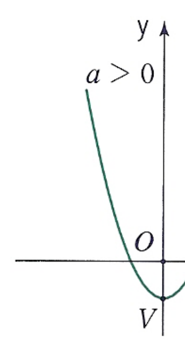
$y = ax^2 + c$

$V(0;c)$

$x = 0$

$F\left(0;\frac{1}{4a} + c\right)$

$y = c - \frac{1}{4a}$ (Figura e)



▲ Figura e

Scambiando fra loro gli assi coordinati, si ottiene l'equazione:

$$x = ay^2 + by + c$$

che differisce dall'equazione $y = ax^2 + bx + c$ per lo scambio della x con la y (figure f e g).

Perciò, in un piano cartesiano, anche l'equazione $x = ay^2 + by + c$ rappresenta una parabola in cui (essendo $\Delta = b^2 - 4ac$):

Il vertice è il punto di coordinate: $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

L'asse di simmetria è la retta, parallela all'asse x, di equazione: $y = -\frac{b}{2a}$

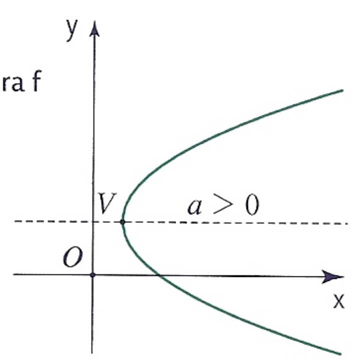
Il fuoco è il punto di coordinate: $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

La direttrice della retta, parallela all'asse delle y, ha equazione: $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Se nell'equazione $x = ay^2 + by + c$

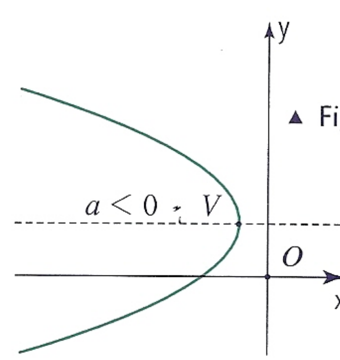
$a > 0$ ⇒ la parabola volge la concavità verso destra (Figura f).

▲ Figura f



$a < 0$ ⇒ la parabola volge la concavità verso sinistra (Figura g).

▲ Figura g



Come calcolare l'equazione di una parabola ad asse verticale

La traslazione degli assi cartesiani

Riferiamo il piano a due sistemi ortonormali di assi cartesiani : xOy (di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$) ed $XO'Y$ (di versori $\vec{i}\,' = \vec{i}$ e $\vec{j}\,' = \vec{j}$) . Si dice pure che il sistema $XO'Y$ si ottiene dal sistema xOy mediante la traslazione $O' - O = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j}$

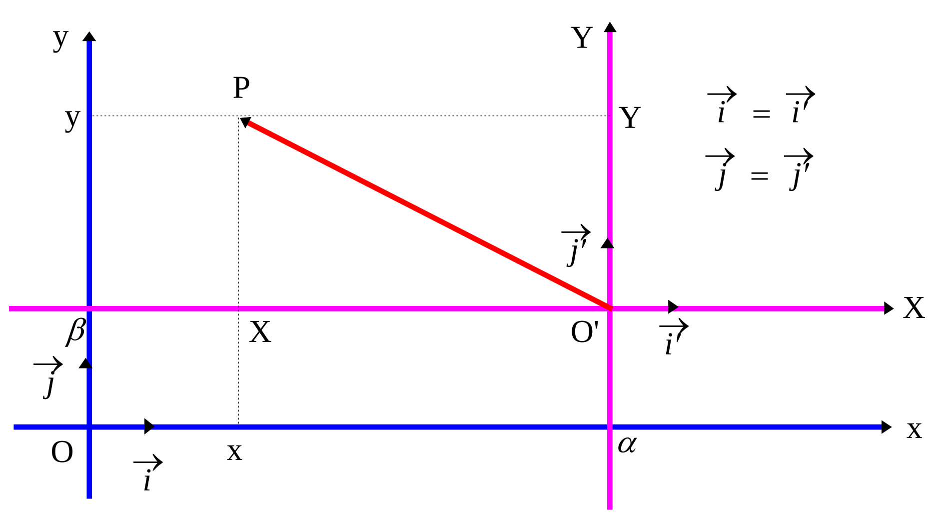
(x,y) $[(X,Y)]$ sono le coordinate cartesiane di un generico punto P del piano rispetto al riferimento cartesiano xOy $[XO'Y]$. Siano (α,β) le coordinate cartesiane di O' rispetto al sistema di riferimento xOy . Quali sono le relazioni che intercorrono tra le coordinate (x,y) del punto **P** riferito al sistema xOy e le coordinate (X,Y) dello stesso punto riferito al sistema $XO'Y$?

Scrivendo il vettore $P - O'$ in coordinate cartesiane, una volta rispetto ad xOy e poi rispetto ad $XO'Y$, ricordando che $\vec{i}\,' = \vec{i}$ e $\vec{j}\,' = \vec{j}$, otteniamo:

$$P - O' = (x - \alpha)\vec{i} + (y - \beta)\vec{j} = X \cdot \vec{i}\,' + Y \cdot \vec{j}\,' \quad \text{e quindi :}$$

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = \alpha + X \\ y = \beta + Y \end{cases}$$

che esprimono le formule di trasformazione per la traslazione.



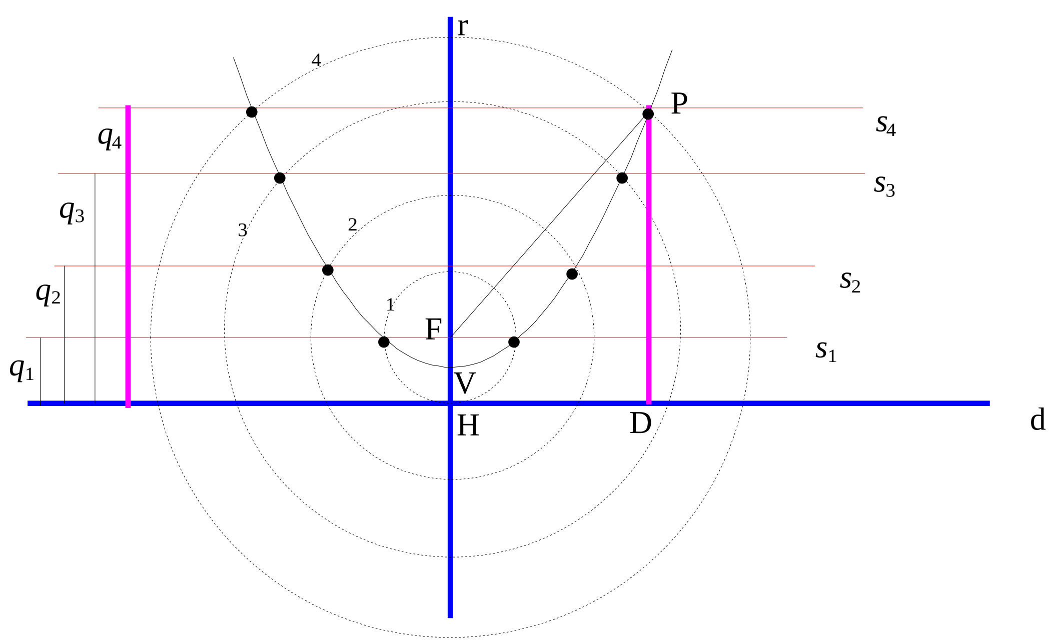
Costruzione e definizione grafica della parabola

Definiamo **parabola** il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **F** detto **fuoco** e da una retta fissa **d** (non contenente il fuoco) detta **direttrice**.

La retta **r** passante per **F** e perpendicolare alla direttrice **d** è l'**asse** della parabola. La retta **r** incontra la retta **d** nel punto **D**. Il punto medio **V** del segmento FD è il **vertice** della parabola.

Una costruzione geometrica per punti della parabola è la seguente. Disegnate alcune rette $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$ parallele alla direttrice **d** dalla quale distano, ad esempio, $q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots$ tracciamo le circonferenze $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, v_4, \cdots$ di centro **F** e raggio $q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots$.

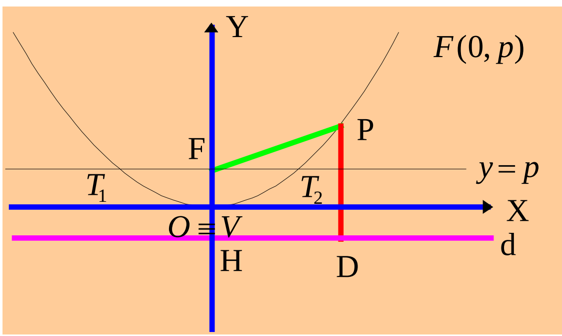
I punti comuni di ciascuna retta **s** con la corrispondente circonferenza σ sono punti della parabola la quale risulta essere simmetrica rispetto al suo asse **r**. La direttrice **d** divide il piano in due semipiani.
La parabola si sviluppa interamente nel semipiano che contiene il fuoco.



La parabola ad asse verticale

Scegliamo un riferimento cartesiano in modo che l'asse X delle ascisse risulti parallelo alla direttrice **d**, l'asse Y delle ordinate coincida con l'asse r della parabola, l'origine O coincida col vertice V. Per i punti $P(X,Y)$ appartenenti alla parabola è valida la relazione:

$$D(P,F) = d(P,d) \qquad \textbf{[1]}$$



Se indichiamo con $2p$ la distanza tra il fuoco e la direttrice abbiamo:

$d(F,d) = 2p$, $p \in R^+$, $F(0,p)$, $P(X,Y)$, $Y + p = 0$ (equazione della direttrice)

La **[1]** diventa: $\sqrt{X^2 + (Y - p)^2} = |Y + p|$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo:

$X^2 + Y^2 - 2pY + p^2 = Y^2 + 2py + p^2$ $\mathbf{Y = \frac{1}{4p}X^2}$ **[2]** pongo: $\mathbf{a = \frac{1}{4p}}$ **[3]**

ottengo: $\mathbf{Y = aX^2}$ **[4]** $\mathbf{F\left(0; \frac{1}{4a}\right)}$ $\mathbf{Y = -p = -\frac{1}{4a}}$ (equazione della direttrice)

L'equazione [2] è detta equazione normale o canonica della parabola di parametro $2p$.

Vediamo quali sono le principali proprietà della parabola di equazione $\mathbf{Y = aX^2}$

1) Si tratta di una curva simmetrica rispetto all'asse delle ordinate

2) $a > 0 \Rightarrow Y \geq 0 \ \forall X \in R$ la parabola volge la concavità verso l'alto

$a < 0 \Rightarrow Y \leq 0 \ \forall X \in R$ la parabola volge la concavità verso il basso

3) Il parametro $2p$ ha il seguente significato geometrico. La retta di equazione $Y = p$ incontra la parabola nei punti $T_1(-2p, p)$ e $T_2(2p, p)$ come si deduce facilmente risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} Y = p \\ x^2 = 4pY \end{cases} \qquad d(T_1, T_2) = X_{T_2} - X_{T_1} = 4p$$

La distanza tra i punti T_1 e T_2 vale $4p$ ed è tanto maggiore quanto più grande è il valore del parametro $2p$; cioè $2p$ caratterizza quella che possiamo definire, anche se impropriamente larghezza della parabola.

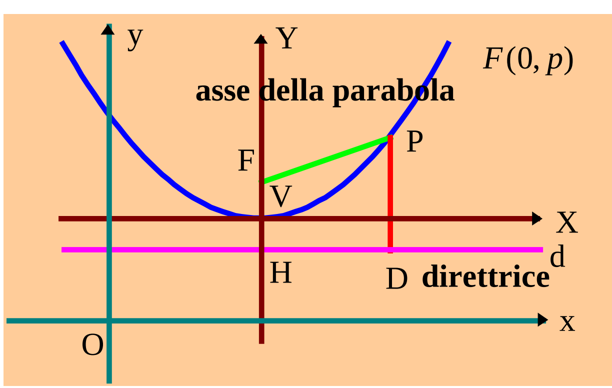
4) Il piano è diviso dalla parabola in due parti di cui quella che contiene il fuoco è detta interna (alla parabola), l'altra esterna.

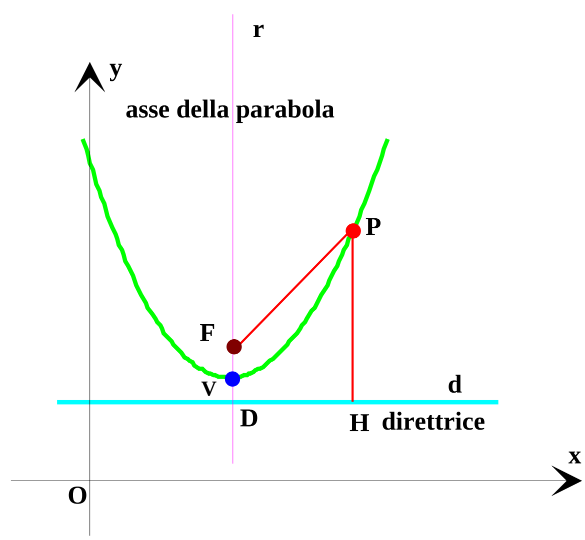
Vediamo adesso quale forma assume l'equazione della parabola γ quando come asse delle ascisse scegliamo una qualsiasi retta **x** parallela alla direttrice e come asse delle ordinate una qualsiasi retta **y** perpendicolare alla direttrice.

Fissiamo nel piano i riferimenti cartesiani XVY e xOy come indicato in figura. La parabola γ, rispetto al riferimento cartesiano XVY, ha equazione: $\mathbf{Y = a X^2}$

Vogliamo calcolare l'equazione di γ rispetto al riferimento cartesiano xOy sapendo che le formule di trasformazione sono: **[5]** $\begin{cases} x = \alpha + X \\ y = \beta + Y \end{cases}$ $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$ **[6]**

dove α e β sono le coordinate cartesiane del vertice **V** rispetto al sistema xOy.





Ponendo: **[7]** $\begin{cases} -2a\alpha = b \\ a\alpha^2 + \beta = c \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = -a\alpha^2 + c = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$ **[8]** otteniamo:

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c} \qquad \textbf{[9]}$$

che è l'equazione della parabola γ rispetto al riferimento cartesiano xOy. Vediamo adesso come è possibile dedurre dall'equazione [9] gli elementi caratteristici della parabola γ

$x_V = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $y_V = \beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$ $\quad \mathbf{V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)}$ [10] Vertice della parabola

$\begin{cases} x_F = x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_F = Y_F + \beta = \dfrac{1}{4a} - \dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{1-\Delta}{4a} \end{cases}$ $\quad \mathbf{F\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)}$ Fuoco della parabola

$\mathbf{Y = -\dfrac{1}{4a}}$ equazione della direttrice rispetto al riferimento XVY

$y = Y + \beta = -\dfrac{1}{4a} - \dfrac{\Delta}{4a}$ **[11]** $\mathbf{y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}}$ equazione della direttrice della parabola

$\mathbf{x = \dfrac{-b}{2a}}$ equazione dell'asse della parabola

Altro procedimento

Se $\mathbf{Y = aX^2}$ è l'equazione della parabola γ rispetto al riferimento XVY, allora la sua equazione rispetto al riferimento xOy assume la forma $y = ax^2 + bx + c$. Infatti:

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \ , \ y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad , \quad y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Ponendo : $\begin{cases} x + \dfrac{b}{2a} = X \\ y + \dfrac{\Delta}{4a} = Y \end{cases}$ $\begin{cases} x = X - \dfrac{b}{2a} \\ y = Y - \dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$ otteniamo: $\mathbf{Y = aX^2}$

Altro procedimento

Adesso voglio dimostrare che la parabola γ rispetto al riferimento cartesiano xOy ha equazione $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$. Sostituendo le formule [5] nell'equazione $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ otteniamo:

$\beta + Y = a(\alpha + X)^2 + b(\alpha + X + c)$, $Y = aX^2 + (2a\alpha + b)X + a\alpha^2 + b\alpha + c - \beta$

Questa equazione coincide con l'equazione della parabola $Y = aX^2$ solo e solo quando:

$$\begin{cases} 2a\alpha + b = 0 \\ a\alpha^2 + b\alpha + c - \beta = 0 \end{cases} \quad \text{cioè quando:} \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

Altro procedimento

Se (x,y) sono le coordinate correnti del punto P che descrive la parabola, $y = k$ è l'equazione della direttrice, (s,t) le coordinate del fuoco, la condizione geometrica $\overline{PF} = \overline{PD}$ si traduce nell'equazione : $\sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2} = |y - k|$ cioè :

$$x^2 - 2sx + s^2 + y^2 - 2ty + t^2 = y^2 - 2ky + k^2$$

$$x^2 - 2sx - 2(t - k)y + s^2 + t^2 - k^2 = 0 \quad , \quad y = \frac{1}{2(t - k)}x^2 - \frac{s}{t - k}x + \frac{s^2 + t^2 - k^2}{2(t - k)}$$

Ponendo: $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(t - k)} \\ b = \dfrac{s}{k - t} \\ c = \dfrac{s^2 + t^2 - k^2}{2(t - k)} \end{cases}$ $\begin{cases} s = -\dfrac{b}{2a} \\ t = \dfrac{1 - b^2 + 4ac}{4a} = \dfrac{1 - \Delta}{4a} \\ k = \dfrac{1 + b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{1 + \Delta}{4a} \end{cases}$ otteniamo: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

che rappresenta l'equazione di una parabola con l'asse parallelo all'asse delle ordinate e che chiameremo, per semplicità, parabola ad asse verticale. (1)

Il coefficiente $a = \dfrac{1}{2(t - k)}$ non può mai essere nullo

$t > k \Rightarrow a > 0$: il fuoco della parabola è al di sopra della direttrice e la parabola volge la

concavità verso l'alto

(1) Per ottenere l'equazione [9] abbiamo scelto $x // d$ e quindi $r \perp d$. Siccome di solito l'asse x è orizzontale allora r sarà verticale . Per questo motivo la [9] dicesi **equazione della parabola ad asse verticale**, per cui dire parabola ad asse verticale significa dire parabola con l'asse con la direttrice parallela all'asse delle ascisse , cioè con l'asse della parabola perpendicolare alla direttrice . Pertanto dire parabola ad asse verticale o parabola con l'asse parallelo all'asse delle ordinate è la stessa cosa .

$t < k \Rightarrow a < 0$: il fuoco della parabola è al di sotto della direttrice e la parabola volge la

concavità verso il basso

Risulta: $F(s,t) \Rightarrow$ $\mathbf{F}\left(\frac{-b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$ $\mathbf{y = k = -\frac{1+\Delta}{4a}}$ equazione della **direttrice**

L'asse della parabola ha equazione $\mathbf{x = \frac{-b}{2a}}$

Le coordinate del vertice si ottengono risolvendo il sistema: $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$

$y = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ $\mathbf{V}\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$