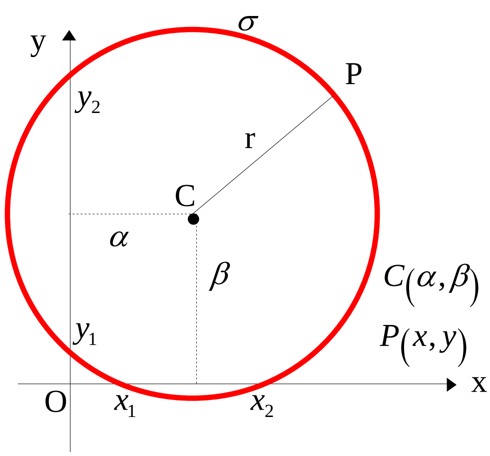
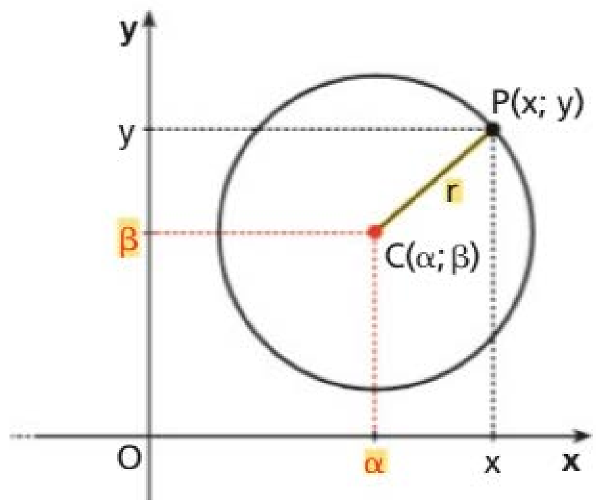
Unità Didattica N° 8 : La circonferenza

Equazione della circonferenza di raggio r e centro $\mathbf{C(\alpha;\beta)}$

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **C** detto **centro**. Riferito il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani, detto $C(\alpha,\beta)$ il centro della circonferenza σ, $P(x,y)$ un generico punto di σ abbiamo:

$$CP = r \quad \Rightarrow \quad CP^2 = r^2 \quad \Rightarrow \mathbf{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2} \qquad [1]$$





La [1] è l'equazione di una circonferenza di dato centro e dato raggio. Se $C \equiv O$ la [1] diventa:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = r^2} \qquad [2]$$

La [2] rappresenta l'equazione di una circonferenza avente il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani. L'equazione di una circonferenza dipende da tre parametri essenziali e quindi per individuare almeno una circonferenza occorrono tre condizioni.

Se $C(1,-2)$ ed $r = 3$ abbiamo:

$$\mathbf{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9} \qquad \text{cioè:} \qquad \mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0}$$

Equazione generale della circonferenza

Se sviluppiamo la [1] otteniamo: $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$ cioè:

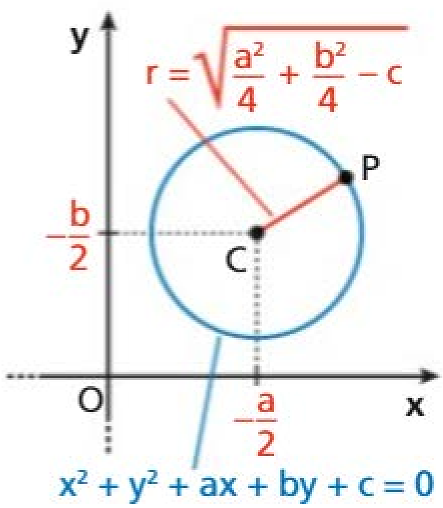
$$\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \qquad \mathbf{[3]}$$

se poniamo: [4] $\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$ [5] $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{2} \\ \beta = -\dfrac{b}{2} \\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$

La [3] è l'**equazione generale** della circonferenza che risulta **reale** se

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c > 0 \quad \text{cioè se:} \qquad \boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > c} \qquad \textbf{[6]}$$

Una circonferenza è rappresentata da una equazione algebrica di secondo grado a due incognite in cui: 1) manca il **termine rettangolare** xy 2) i coefficienti dei termini quadratici x^2 ed y^2 sono uguali e quindi sempre riducibili all'unità. [1]



$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Casi particolari

- **c = 0** La circonferenza passa per l'origine degli assi cartesiani in quanto la sua equazione è verificata dalle coordinate $O(0,0)$ del punto **O**. La sua equazione diventa

$$\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by = 0}$$

C.N.S. perché una circonferenza passi per l'origine degli assi cartesiani è che risulti: **c = 0**

- **a = 0 , b ≠ 0 , c ≠ 0** $a = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow C(0,\beta)$

---

[1] Quando risulta $c = \alpha^2 + \beta^2$ $(r = 0)$ l'equazione della circonferenza diventa: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$ cioè la circonferenza si scompone nelle due **rette isotrope** uscenti dal punto $C(\alpha, \beta)$.

La circonferenza $x^2 + y^2 + by + c = 0$ ha il centro sull'asse y; viceversa, una circonferenza avente il centro sull'asse y ha equazione priva del termine lineare in x .

● **a ≠ 0 , b = 0 , c ≠ 0** $b = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow C(\alpha, 0)$

La circonferenza $x^2 + y^2 + ax + c = 0$ ha il centro sull'asse delle x ; viceversa , una circonferenza avente il centro sull'asse delle x ha equazione priva del termine lineare in y .

● **a = b = 0 , c ≠ 0** $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow C \equiv O$

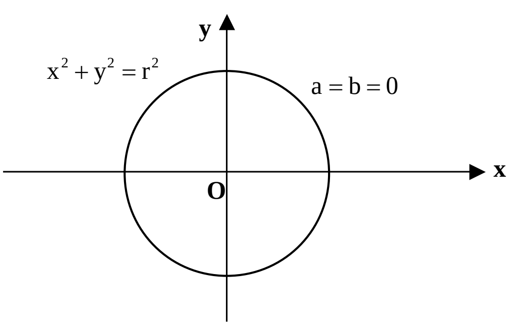
La circonferenza $x^2 + y^2 + c = 0$ ha centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani e raggio $r = \sqrt{-c}$, una circonferenza col centro nell'origine degli assi cartesiani ha equazione priva dei termini lineari in x ed in y , cioè ha equazione del tipo viceversa $x^2 + y^2 + c = 0$ oppure del tipo

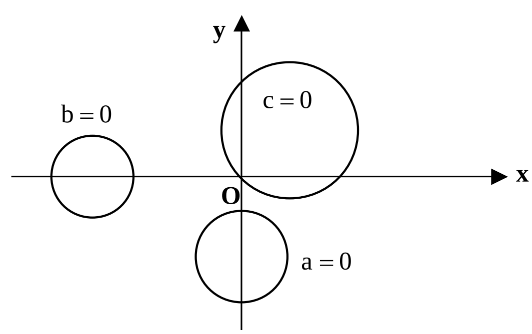
$$x^2 + y^2 = r^2$$

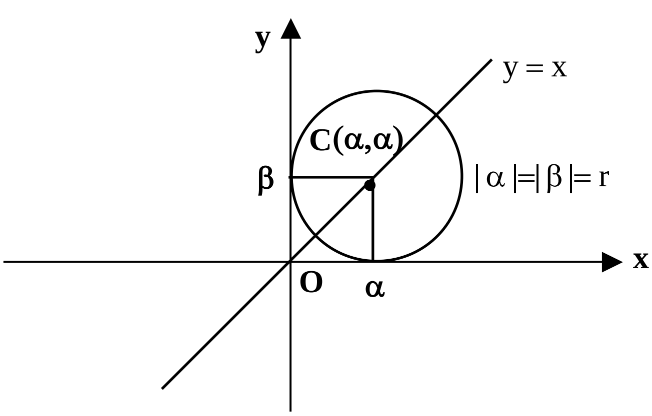
● **|α| = |β| = r** La circonferenza la cui equazione può essere scritta nella forma

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$$

è tangente agli assi cartesiani e, quindi, il suo centro appartiene ad una delle due bisettrici degli assi cartesiani.







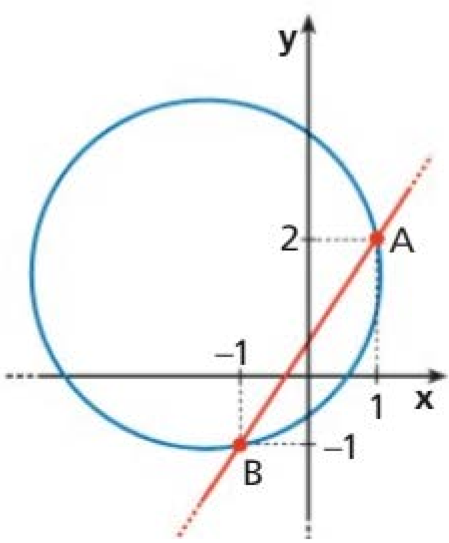
Intersezione di una retta con una circonferenza

Le coordinate dei punti d'intersezione di una retta r di equazione $y = mx + n$ con una circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \qquad [8]$$

Sia $\mathbf{Ax^2 + Bx + C = 0}$ [9] l'equazione risolvente il sistema [8] e $\Delta = B^2 - 4AC$ il suo determinante. Si possono presentare tre casi:

1) $\Delta > 0$ L'equazione [9] ammette due radici x_1 ed x_2 reali e distinte. La retta r incontra la circonferenza σ in due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ reali e distinti (retta secante)



Rappresentazione grafica dell'intersezione della circonferenza di equazione $x^2+y^2+3x-3y-2=0$ con la retta di equazione $3x-2y+1=0$

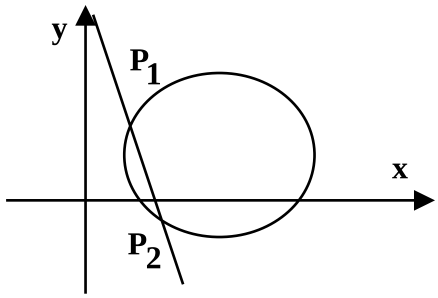
2) $\Delta = 0$ L'equazione [9] presenta una soluzione doppia ($x_1 = x_2 = -\dfrac{B}{2A}$) e quindi r incontra σ in due punti coincidenti (retta tangente)

3) $\Delta < 0$ Le radici x_1 ed x_2 sono complesse e coniugate. In questo caso r non incontra σ (retta esterna)

Calcolare le coordinate dei punti d'intersezione della retta r di equazione $3x + y - 5 = 0$ con la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x^2 + (5 - 3x)^2 - 6x - 2(5 - 3x) + 5 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 25 - 30x + 9x^2 - 6x - 10 + 6x + 5 = 0$, $10x^2 - 30x + 20 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$



$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad P_1(1,2)$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases} \quad P_2(2,-1)$$

Intersezione di due circonferenze: asse radicale

$$\sigma: \ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad , \qquad \sigma_1: \ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Per calcolare le coordinate dei punti comuni alle circonferenze σ e σ_1 basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \qquad [7]$$

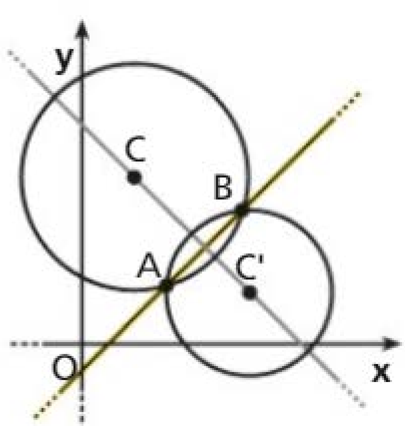
Sottraendo membro a membro otteniamo:

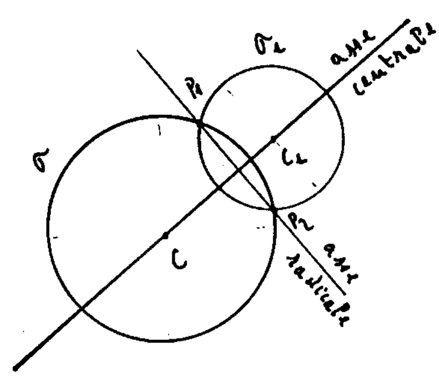
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \hline \# \quad \# \quad (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione $\mathbf{(a-a_1)x+(b-b_1)y+c-c_1=0}$ [6] rappresenta una retta detta **asse radicale** delle due circonferenze. Tale asse radicale contiene i due punti **A** e **B** (reali e distinti, reali e coincidenti, immaginari) comuni alle due circonferenze.

Pertanto le coordinate di questi due punti si ottengono risolvendo uno dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$





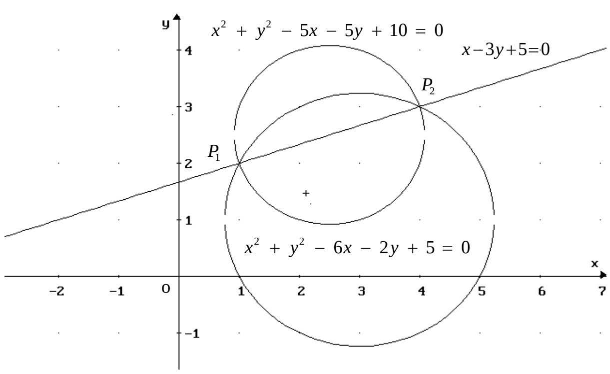
L'asse radicale risulta perpendicolare alla retta (detta asse centrale) passante per i centri delle due circonferenze.

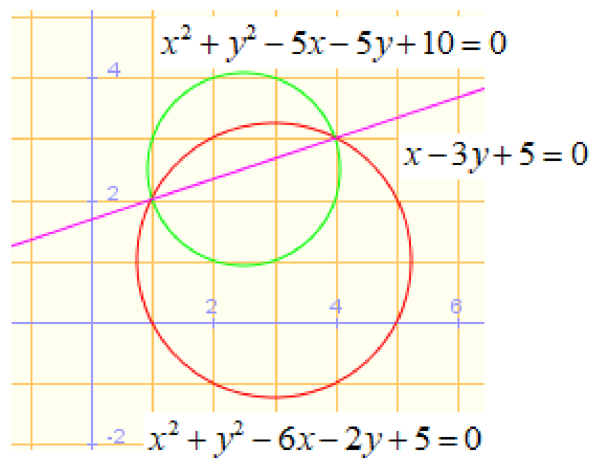
Calcolare le coordinate dei punti comuni alle circonferenze $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$

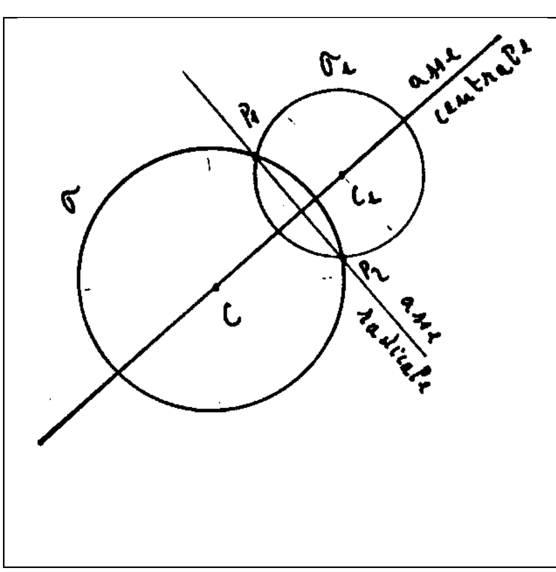
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \\ \hline \# \quad \# \quad x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y - 5 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

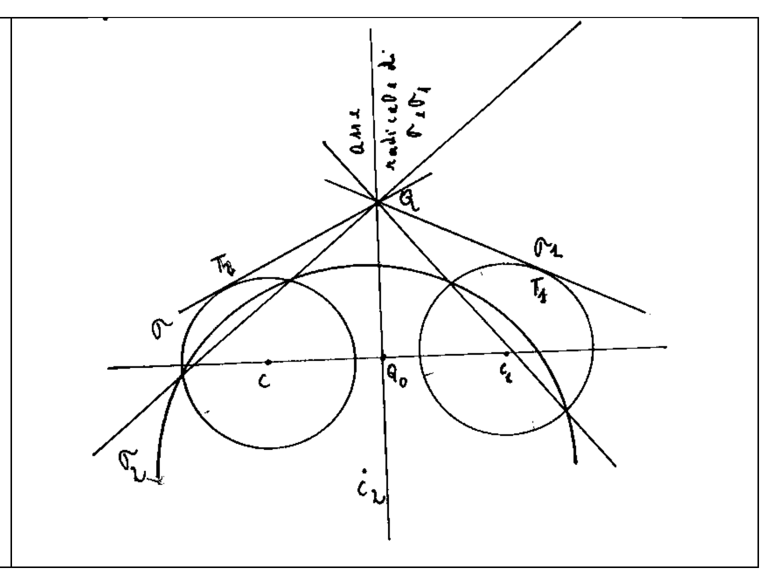
$$(3y - 5)^2 + y^2 - 6(3y - 5) - 2y + 5 = 0 \ , \quad y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \qquad P_1(1,2) \qquad \begin{cases} y_2 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \qquad P_2(4,3)$$









Equazione delle rette Tangenti ad una circonferenza uscenti da un dato punto

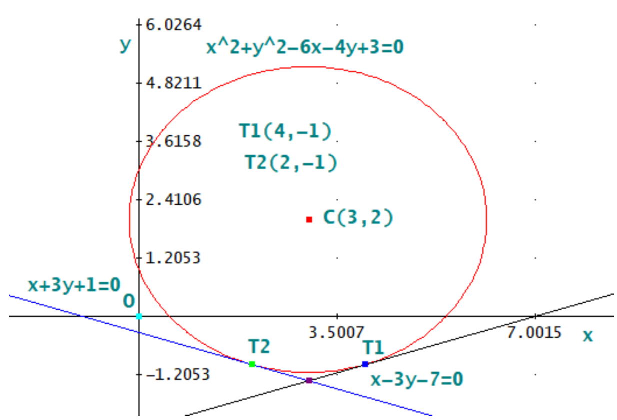
Siano dati la circonferenza σ di equazione $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ oppure $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ed il punto $P_1(x_1,y_1)$. Vogliamo calcolare:

a) le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti a σ e passanti per $P_1(x_1,y_1)$

b) l'equazione della retta r passante per i punti di contatto delle tangenti t_1 e t_2 con la circonferenza σ

Svilupperemo questi argomenti prima a livello generale e poi utilizzando il seguente esempio numerico.

Scrivere le equazioni delle rette uscenti dal punto $P_o\left(3;-\frac{4}{3}\right)$ e tangenti alla circonferenza σ di equazione $\mathbf{x^2+y^2-6x-4y+3=0}$



Prima questione

Primo metodo (carattere generale)

- Ci calcoliamo il centro ed il raggio della circonferenza σ
- Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro $P_1(x_1,y_1)$: $\mathbf{y-y_1=m(x-x_1)}$ **[1]**
- I punti comuni alla generica retta del fascio [1] ed alla circonferenza σ si ottengono risolvendo il

sistema: $\begin{cases} y-y_1=m(x-x_1) \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y-y_1=m(x-x_1) \\ x^2+y^2+ax+by+c=0 \end{cases}$ **[2]**

- Come risolvente otteniamo una equazione di secondo grado in x o in y:

$$A(m)\cdot x^2 + B(m)\cdot x + C(m) = 0 \quad \text{oppure} \quad D(m)\cdot y^2 + E(m)\cdot y + F(m) = 0$$

Se risulta $x_1 = x_2$ ($y_1 = y_2$) allora la retta del fascio è tangente alla circonferenza σ. Quindi la condizione di tangenza impone che sia: $\boldsymbol{\Delta = B^2 - 4AC = 0}$ cioè: $pm^2 + qm + s = 0$ [4]

Le radici m_1 ed m_2 dell'equazione [4] sono i coefficienti angolari delle tangenti richieste.

t_1: $\mathbf{y - y_1 = m_1(x - x_1)}$ t_2: $\mathbf{y - y_1 = m_2(x - x_1)}$

Osservazione

1) Se le radici m_1 ed m_2 dell'equazione [4] sono reali e distinte allora P_1 è **esterno** a σ ed esistono due tangenti reali. Viceversa, se P_1 è esterno a σ allora le radici dell'equazione [4] sono reali e distinte.

- $m_1 = m_2 \Rightarrow P_1 \in \sigma$ Le due tangenti coincidono
- m_1 ed m_2 complesse e coniugate $\Rightarrow$ P_1 interno a σ $\Rightarrow$ non esistono tangenti reali. Viceversa , P_1 interno a σ $\Rightarrow$ m_1 ed m_2 complesse e coniugate . Per risolvere l'esempio numerico proposto precedentemente si procede come segue:

1) Mi scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$ e risolvo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y + \frac{4}{3} = m(x - 3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

2) Mi trovo l'equazione risolvente tale sistema eliminando la y:

$$x^2 + \left[-\frac{4}{3} + m(x-3)\right]^2 - 6x - 4\cdot\left[-\frac{4}{3} + m(x-3)\right] + 3 = 0$$

$$x^2 + \frac{16}{9} + m^2(x-3)^2 - \frac{8}{3}m(x-3) - 6x + \frac{16}{3} - 4m(x-3) + 3 = 0$$

$$x^2 + m^2(x^2 - 6x + 9) - \frac{20}{3}m(x-3) - 6x + \frac{91}{9} = 0$$

$$9x^2 + 9m^2x^2 - 54m^2x + 81m^2 - 60mx + 180m - 54x + 91 = 0$$

$$\mathbf{9(m^2+1)x^2 - 2(27m^2 + 30m + 27)x + 81m^2 + 180m + 91 = 0}$$

3) Impongo che il $\frac{\Delta}{4}$ dell'equazione risolvente il sistema sia uguale a zero.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(27m^2 + 30m + 27\right)^2 - 9\left(m^2 + 1\right)\left(81m^2 + 180m + 91\right) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(9m^2 + 10m + 9\right)^2 - 9\left(m^2 + 1\right)\left(81m^2 + 180m + 91\right) = 0$$

$$81m^4 + 100m^2 + 180m^3 + 162m^2 + 180m - 81m^2 - 180m - 91 - 81m^4 - 180m^3 - 91m^2 = 0$$

$$9m^2 - 1 = 0 \ , \ 9m^2 = 1 \ , \ m = \pm\frac{1}{3}$$

$t_1 :\ y = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x + 1 \ , \ y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\mathbf{x + 3y + 1 = 0}$

$t_2 :\ y = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x - 1 \ , \ y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$ $\qquad$ $\mathbf{x - 3y - 7 = 0}$

Osservazione

Con questo secondo procedimento, in generale, i calcoli sono piuttosto laboriosi.

Secondo metodo (carattere generale)

Basta scrivere l'equazione del fascio di rette [1] nella forma implicita:

$$\mathbf{mx - y + y_1 - mx_1 = 0} \qquad [5]$$

ed imporre che la distanza del centro C della circonferenza σ dalla generica retta del fascio vale r .

Otteniamo: $\dfrac{\left|\mathbf{m\alpha - \beta + y_1 - mx_1}\right|}{\sqrt{\mathbf{m^2 + 1}}} = \mathbf{r}$ $\qquad$ **[6]**

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo una equazione di secondo grado in m le cui radici m_1 ed m_2 rappresentano i coefficienti angolari delle due tangenti richieste.

Con l'esempio numerico precedentemente proposto si opera come segue:

1) Mi calcolo le coordinate del centro **C** di σ e la misura del suo raggio: $C(3;2)$, $r = \sqrt{10}$

2) Mi scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$ **:**

$$y + \frac{4}{3} = m(x - 3) \quad , \quad 3y + 4 = 3mx - 9m \quad \mathbf{3mx - 3y - 4 - 9m = 0}$$

3) Impongo che la distanza del centro **C** della circonferenza σ da una generica retta del fascio sia uguale al raggio **r** della circonferenza, cioè: $\overline{CH} = r$, $\dfrac{|9m - 6 - 4 - 9m|}{\sqrt{9m^2 + 9}} = \sqrt{10}$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo: $\dfrac{100}{9m^2 + 9} = 10$, $10 = 9m^2 + 9$, $9m^2 = 1$

$$m^2 = \frac{1}{9} \;,\; m = \pm\frac{1}{3} \;,\; m_1 = -\frac{1}{3} \;,\; m_2 = \frac{1}{3} \quad \text{(si sostituisce nella [*])}$$

$$t_1 : \ \mathbf{x-3y-7=0} \qquad t_2 : \ \mathbf{x+3y+1=0}$$

Osservazione

Per calcolare le coordinate dei punti di tangenza basta risolvere il sistema fra l'equazione della circonferenza e l'equazione di ciascuna tangente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \qquad T_1(4,-1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \qquad T_2(2,-1)$$

Terzo metodo

Basta calcolare l'equazione della retta T_1T_2 che, come vedremo nella seconda questione, si ottiene applicando a σ la regola degli sdoppiamenti come se P_1 appartenesse a σ. Otteniamo:

$$\mathbf{x_1x + y_1y - \alpha(x + x_1) - \beta(y + y_1) + c = 0} \qquad \mathbf{[7]}$$

Questa equazione , messa a sistema con l'equazione di σ , ci consente di calcolare le coordinate dei punti T_1 e T_2 e quindi anche le due tangenti t_1 (retta P_1T_1) e t_2 (retta P_1T_2) .

Nel nostro caso particolare abbiamo: $3x - \frac{4}{3}y - 3(x + 3) - 2\left(y - \frac{4}{3}\right) + 3 = 0$, $y = -1$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad x_1 = 2 \;,\; x_2 = 4 \;,\; T_1(4,-1) \quad T_2(2,-1)$$

$$t_2 : \quad \frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y + 1}{-\frac{4}{3} + 1} \quad , \quad x - 2 = \frac{3(y + 1)}{-1} \quad , \quad \mathbf{x+3y+1=0}$$

$t_1: \quad \dfrac{x-3}{4-3} = \dfrac{x+\frac{4}{3}}{-1+\frac{4}{3}}$ **x - 3y - 7 = 0**

Seconda questione

Primo metodo

Scriviamo l'equazione della circonferenza σ_1 di centro $P_1(x_1, y_1)$ e raggio $r_1 = \overline{P_1T}$ dove T è uno dei due punti di tangenza ricordando che:

$$r_1^2 = \overline{P_1T}^2 = \overline{CP_1}^2 - \overline{CT}^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - r^2$$

L'equazione di σ_1 è: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ cioè:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + \alpha^2 - 2x_1\alpha + y_1^2 + \beta^2 - 2y_1\beta - r^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y - c + 2x_1\alpha + 2y_1\beta = 0} \quad \textbf{[8]}$$

La retta T_1T_2, che congiunge i due punti di tangenza, è l'asse radicale delle circonferenze σ e σ_1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y - c + 2x_1\alpha + 2y_1\beta = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + c = 0 \end{cases}$$ Sottraendo membro a membro otteniamo:

[9] $\mathbf{(x_1 - \alpha)x + (y_1 - \beta)y + x_1\alpha + y_1\beta + c = 0}$ ed anche:

$\mathbf{x_1x + y_1y - \alpha(x + x_1) - \beta(y + y_1) + c = 0}$ **[10]**

Osservazione

Dicesi polare di un punto P_1 (polo) rispetto ad una circonferenza σ la retta T_1T_2 che congiunge i punti di contatto delle tangenti condotte alla circonferenza dal punto P_1. Per la polare del punto P_1 rispetto a σ abbiamo trovato l'equazione [10]. Possiamo concludere affermando che: <<**se all'equazione di una circonferenza σ applichiamo la regola degli sdoppiamenti otteniamo l'equazione della polare del punto P_1 rispetto a σ**>>

Se P_1 è esterno a σ la polare è **secante**, se P_1 è interno a σ la polare è **esterna**, se $P_1 \in \sigma$ la polare coincide con la tangente a σ in P_1. Questa proprietà è valida per tutte le coniche.

Secondo metodo

Sia $T(x,y)$ uno dei due punti di tangenza. $P_1 - T = (x_1 - x)\vec{i} + (y_1 - y)\vec{j}$

$C - T = (\alpha - x)\vec{i} + (\beta - y)\vec{j}$, $(C - T)\times(P_1 - T) = 0 \Rightarrow$

$(\alpha - x)\cdot(x_1 - x) + (\beta - y)\cdot(y_1 - y) = 0$ $\boldsymbol{\alpha x_1 - \alpha x - x_1 x + x^2 + \beta y_1 - \beta y - y_1 y + y^2 = 0}$

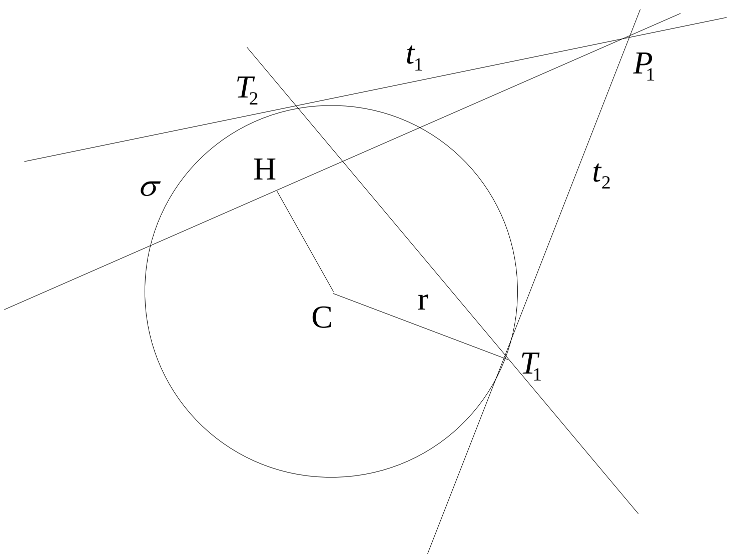
$$\begin{cases} \alpha x_1 - \alpha x - x_1 x + x^2 + \beta y_1 - \beta y - y_1 y + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + c = 0 \end{cases}$$

-- in quanto $T \in \sigma$

$$-\alpha x - \beta y + x_1 x + y_1 y + c - \alpha x_1 - \beta y_1 = 0$$

$$\mathbf{x_1 x + y_1 y - \alpha(x + x_1) - \beta(y + y_1) + c = 0} \qquad \textbf{[10]}$$

OSSERVAZIONE



Se una delle due tangenti è perpendicolare all'asse **x**, una delle due radici dell'equazione $pm^2 + qm + s = 0$ [4] è infinita. In questo caso avremo $p = 0$, cioè l'equazione [4] si abbasserà di grado. Viceversa, se l'equazione [4] è di **primo grado** una delle due tangenti è parallela all'asse delle y ed avrà equazione $x = x_1$

Equazione della retta tangente ad una circonferenza in un suo punto P_o

Sia $P_1(x_1,y_1)$ un punto della circonferenza σ di centro $C(\alpha,\beta)$. Sia $P(x,y)$ un generico punto della tangente **t** a σ in $P_1(x_1,y_1)$.

$$(P - P_1)\perp(P_1 - C) \Rightarrow (P - P_1)\perp(P_1 - C) = 0 \qquad \textbf{[11]}$$

La [11] rappresenta l'‘equazione vettoriale della tangente **t**.

Scrivendo i vettori $(P - P_1)$ e $(P_1 - C)$ in componenti cartesiani otteniamo:

$$\mathbf{(x - x_1)(x_1 - \alpha) + (y - y_1)(y_1 - \beta) = 0} \qquad [12]$$

La [12] rappresenta l'equazione cartesiana della tangente **t** . Sviluppando la [12] otteniamo:

$$x_1x + y_1y - \alpha x - \beta y - x_1^2 - y_1^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 = 0$$

$$x_1x + y_1y - \alpha x - \beta y + \alpha x_1 + \beta y_1 - \left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0 \qquad \textbf{[13]}$$

$$P_1 \in \sigma \;\Rightarrow\; x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y + c = 0 \;\Rightarrow\; x_1^2 + y_1^2 = 2\alpha x_1 + 2\beta y - c$$

La [13] diventa: $\mathbf{x_1x + y_1y - \alpha(x + x_1) - \beta(y + y_1) + c = 0}$ **[10]**

La [10] rappresenta ancora l'equazione della tangente **t** e può essere ricordata applicando la cosiddetta regola degli sdoppiamenti secondo la quale

$$\mathbf{x^2 \to x_o x \quad y^2 \to y_o y \quad x \to \frac{x_o + x}{2} \quad y \to \frac{y_o + y}{2} \quad 2xy \to x_1 y + y_1 x \quad (2x \to x_o + x \quad 2y \to y_o + y)}$$

- La [10] può essere ricavata in base alle seguenti considerazioni vettoriali :

$$P - C = (P_1 - C) + (P - P_1) \;\Rightarrow\; (P - P_1) = (P - C) + (C - P_1) = (P - C) - (P_1 - C)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per il vettore $(P_1 - C)$ otteniamo:

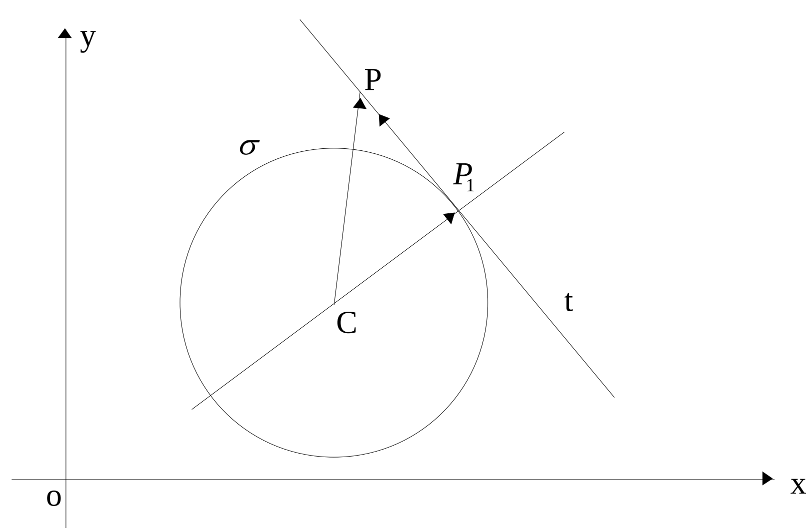
$$0 = (P - C)\times(P_1 - C) - (P_1 - C)\times(P_1 - C) \quad \text{con :} \qquad (P_1 - C)\times(P_1 - C) = r^2$$

Ricordando che: $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$ otteniamo la [10] .

- Senza l'ausilio del calcolo vettoriale la [10] può essere ricavata in base alle seguenti considerazioni

$$m_{CP_1} = \frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha} \;,\; m_t = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta} \quad \text{e quindi l'equazione di t è:} \quad y - y_1 = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}(x - x_1)$$

da cui possiamo dedurre prima la [12] e poi la [10].



- Se $C \equiv O$, cioè se vogliamo calcolare l'equazione della tangente a σ nell'origine degli assi cartesiani abbiamo: $\boxed{ax + by = 0}$ oppure $\boxed{\alpha x + \beta y = 0}$ **[15]**

cioè <<**l'equazione della retta tangente a σ nell'origine degli assi cartesiani si ottiene annullando il complesso dei termini di primo grado presenti nell'equazione cartesiana di σ priva del termine noto**>>

<< Scrivere l'equazione della tangente a σ : $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ nel punto $P_1(4,3)$ >>

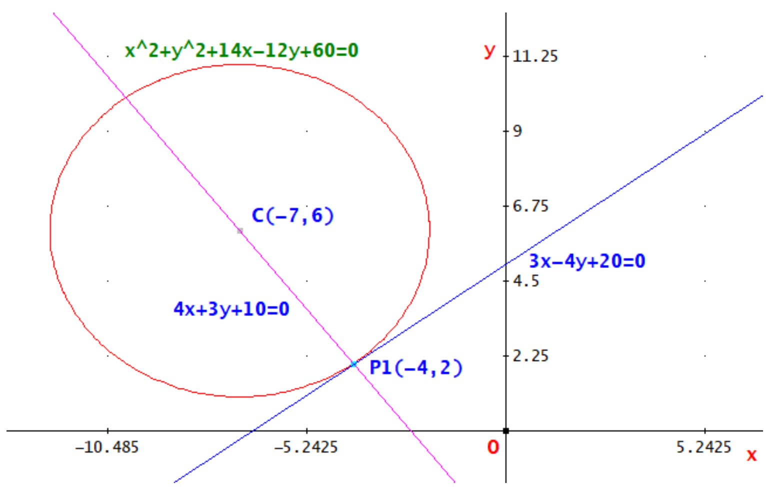
$C(3,1)$, $m_{CP_1} = \frac{3-1}{4-3} = 2$, $m_t = -\frac{1}{2}$ $\quad y - 3 = -\frac{1}{2}(x-4)$, $2y - 6 = -x + 4$

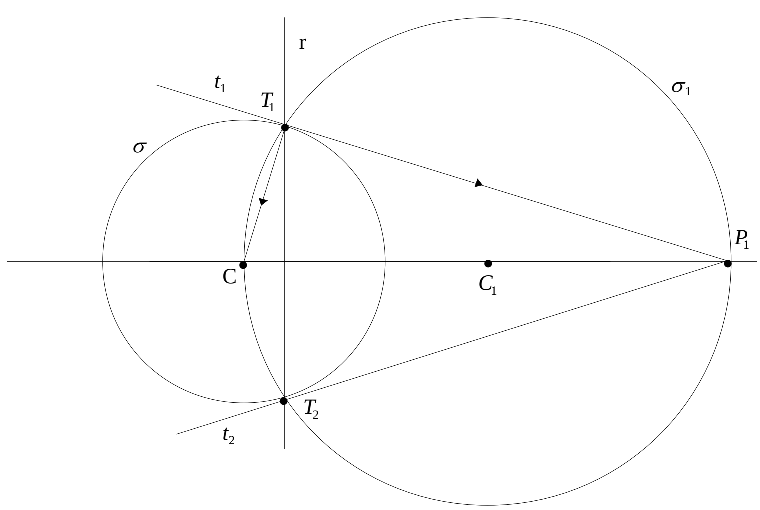
$$\mathbf{x + 2y - 10 = 0}$$

Scrivere l'equazione della tangente a σ: $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 60 = 0$ nel punto $P_1(-4,2)$

$C(-7,6)$ $\quad m_{CP_1} = \frac{2-6}{-4+7} = -\frac{4}{3}$ $\quad m_t = \frac{3}{4}$ $\quad y-2 = \frac{3}{4}(x+4)$ $\quad 4y-8 = 3x+12$ $\quad \mathbf{3x - 4y + 20 = 0}$

$P_1C: 4x + 3y + 10 = 0$





Riepilogo generale attraverso un esempio numerico.

Scrivere l'equazione della tangente a σ: $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 60 = 0$ nel punto $P_1(-4,2)$

Primo procedimento

1) Mi calcolo le coordinate del centro **C** di σ: $C(-7,6)$

2) Mi calcolo il coefficiente angolare della retta P_oC: $m_{P_oC} = \dfrac{y_C - y_{P_o}}{x_C - x_{P_o}} = \dfrac{6-2}{-7+4} = -\dfrac{4}{3}$

3) $CP_o \perp t \Rightarrow m_t = -\dfrac{1}{m_s} = \dfrac{3}{4}$

4) $y - y_o = m_t(x+4)$, $y - 2 = \dfrac{3}{4}(x+4)$, $4y - 8 = 3x + 12$, $\mathbf{3x-4y+20=0}$

Secondo procedimento

Basta applicare la regola degli sdoppiamenti:

$$x^2 \to x_o x\ ,\ y^2 \to y_o y\ ,\ x \to \frac{x+x_o}{2}\ ,\ y \to \frac{y+y_o}{2} \qquad \mathbf{xy \to \frac{y_o x + x_o y}{2}}$$

σ: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, t: $\mathbf{x_1x+y_1y-\alpha(x+x_1)-\beta(y+y_1)+c=0}$

oppure: $\mathbf{x_1x+y_1y-\alpha(x+x_1)-\beta(y+y_1)+c=0}$

Nel caso dell'esempio numerico abbiamo: $-4x + 2y + 7(x-4) - 6(y+2) + 60 = 0$

$$\mathbf{3x-4y+20=0}$$

Terzo metodo

Si può utilizzare uno dei procedimenti usati per il calcolo della retta tangente ad una circonferenza uscenti da un punto.

Fascio di circonferenze

Siano date due circonferenze σ e σ_1 aventi rispettivamente equazioni:

$g(x,y) = x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad g_1(x,y) = x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$

Si consideri l'equazione:

[21A] $\mathbf{f(x,y) = g(x,y) + t\cdot g_1(x,y) = k\cdot g(x,y) + h\cdot g_1(x,y) = 0}$ con $t = \dfrac{h}{k}$

Questa equazione rappresenta, per ogni valore di $t \neq -1$, una circonferenza δ passante per i punti H e K comuni alle due circonferenze σ e σ_1 ed, al variare di t, genera infinite circonferenze (∞^1)

che costituiscono un fascio di circonferenze di punti base **H** e **K**. Si dice anche che il fascio è **generato** dalle due circonferenze σ e σ_1.

Una combinazione lineare delle equazioni di due circonferenze è l'equazione di un fascio di circonferenze individuato dalle due circonferenze dette circonferenze generatrici del fascio.

L'equazione [21A] può essere scritta anche nella seguente maniera:

$$(h+k)x^2+(h+k)y^2-2(k\alpha+h\alpha_1)x-2(k\beta+h\beta_1)y+k\left(\alpha^2+\beta^2-r^2\right)+k\left(\alpha_1^2+\beta_1^2-r_1^2\right)=0$$

$$(1+t)x^2+(1+t)y^2+(a+ta_1)x+(b+tb_1)y+c+tc_1=0 \qquad [21C]$$

$$x^2+y^2-\frac{2(k\alpha+h\alpha_1)}{h+k}x-\frac{2(k\beta+h\beta_1)}{h+k}y+\frac{k\left(\alpha^2+\beta^2-r^2\right)+h\left(\alpha_1^2+\beta_1^2-r_1^2\right)}{h+k}=0 \qquad [21D]$$

$$x^2+y^2+\frac{a+ta_1}{1+t}x+\frac{b+tb_1}{1+t}y+\frac{c+tc_1}{1+t}=0 \qquad [21E]$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a+ta_1}{1+t}\right)^2+\left(\frac{b+tb_1}{1+t}\right)^2-4\left(\frac{c+tc_1}{1+t}\right)}$$

$$r=\sqrt{\left[\frac{(k\alpha+h\alpha_1)}{h+k}\right]^2+\left[\frac{(k\beta+h\beta_1)}{h+k}\right]^2-\frac{k\left(\alpha^2+\beta^2-r^2\right)+h\left(\alpha_1^2+\beta_1^2-r_1^2\right)}{h+k}} \qquad [21F]$$

Se $h+k=0$ cioè se $h=-k$ la [21A] non è più di secondo grado in quanto assume la forma [22B] , e rappresenta l'asse radicale delle due circonferenze σ e σ_1.

Osservando che: $\displaystyle\lim_{(h+k)\to 0} r=\infty$ possiamo concludere che l'asse radicale può essere considerato come la circonferenza del fascio avente raggio infinito.

Teorema: Una qualsiasi circonferenza δ appartenente al fascio individuato dalle circonferenze σ e σ_1 è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto delle potenze rispetto a σ e σ_1 . Infatti dalla [21A] ricaviamo: $\dfrac{g(x,y)}{g_1(x,y)}=-t$ [22A]

Dove $g(x,y)$ e $g_1(x,y)$ sono le potenze di un punto $P(x,y)$ variabile su δ rispetto a σ e σ_1 e $-t$ è una costante . Quando è $\boxed{t=-1}$ la [21A] diventa :

$$f(x,y)=g(x,y)-g_1(x,y)=(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)=0 \qquad [22B]$$

che è l'equazione della retta (asse radicale) passante per i punti **H** e **K** e perpendicolare alla retta congiungente i centri delle due circonferenze σ e σ_1 (retta centrale del fascio).

Tale asse radicale è il luogo geometrico dei punti del piano aventi uguale potenza ($g = g_1$) sia rispetto a σ che rispetto a σ_1 . Quando le due circonferenze sono tangenti (esternamente o internamente) l'asse radicale coincide con la tangente comune nel punto di contatto.

Teorema: I centri delle circonferenze del fascio appartengono tutti alla retta dei centri delle due circonferenze date σ e σ_1 (asse centrale del fascio).

- Nell'equazione [21A] del fascio di circonferenze possiamo sostituire l'equazione di una delle due circonferenze che lo generano con l'equazione dell'asse radicale.
- l'asse radicale del fascio è detto anche circonferenza degenere del fascio
- tutte le circonferenze del fascio passano per due punti H e K (che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti o immaginari) detti punti base del fascio.

Vari tipi di fasci di circonferenze

L'equazione di un fascio di circonferenze dipende da un solo parametro t. Per questo motivo diciamo che le circonferenze di un fascio sono ∞^1. Per avere un fascio di circonferenze almeno uno dei tre coefficienti a,b,c presenti nell'equazione deve essere funzione lineare di un parametro **t**. Possiamo avere quattro tipi di fasci di circonferenze.

Primo caso: Le due circonferenze σ e σ_1 che individuano il fascio si intersecano in due punti distinti H e K, detti punti base del fascio. Il fascio di circonferenze viene detto ellittico.

Tutte le circonferenze del fascio (compresa quella degenere che è l'asse radicale del fascio) passano per i punti base H e K.

Per ogni punto A del piano distinto da H e K passa una ed una sola circonferenza δ del fascio la cui equazione si ottiene imponendo che sia: $\mathbf{g(x_A, y_A) + t \cdot g_1(x_B, y_B) = 0}$

L'asse radicale è la retta HK, mentre l'asse centrale è l'asse del segmento HK.

Come circonferenze che individuano il fascio possiamo considerare l'asse radicale e la circonferenza avente come diametro il segmento HK. Tale circonferenza ha come centro le coordinate del punto medio del segmento HK e come raggio la metà del diametro HK.

Secondo caso: Le due circonferenze σ e σ_1 sono fra loro tangenti nel punto T, che costituisce l'unico **punto base** del fascio. Il fascio di circonferenze viene detto **parabolico**. Tutte le circonferenze del fascio (compresa quella degenere) passano per **T**. Tutte le circonferenze non degeneri del fascio sono a due a due tangenti (esternamente o internamente) nel punto T ed ammettono come tangente comune l'asse radicale s.

Il fascio contiene due circonferenze degeneri: l'asse radicale che coincide con la retta tangente e la circonferenza come centro l'unico punto base del fascio e raggio nullo. $(x-x_T)^2+(y-y_T)^2=0$

Per ogni punto A del piano distinto da H e K passa una ed una sola circonferenza δ del fascio la cui equazione si ottiene imponendo che sia: $\mathbf{g(x_A, y_A) + t \cdot g_1(x_B, y_B) = 0}$

Terzo caso: Le circonferenze σ e σ_1 sono concentriche e quindi non hanno punti in comune ($a = a_1$, $\alpha = \alpha_1$, $b = b_1$, $\beta = \beta_1$) . In questa situazione non esiste l'asse radicale del fascio di circonferenze e tutte le circonferenze del fascio hanno lo stesso centro $C(\alpha, \beta)$.

L'equazione del fascio assume una delle seguenti forme:

$$\mathbf{x^2+y^2+ax+by+c+t\cdot(x^2+y^2+ax+by+c_1)=0}$$

$$\mathbf{(1+t)x^2+(1+t)y^2+a(1+t)x+b(1+t)y+c+tc_1=0}$$

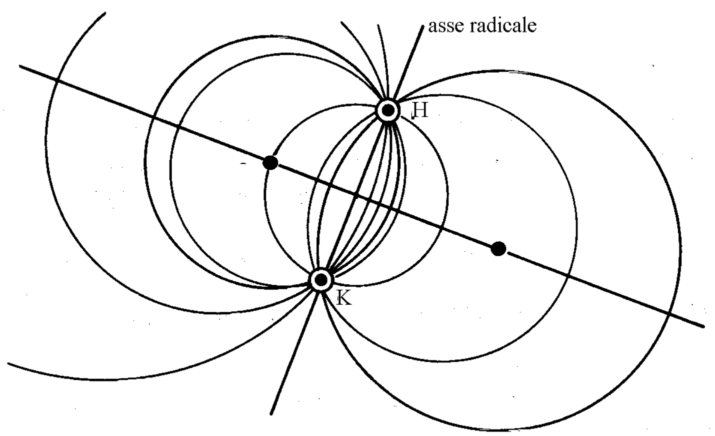
$$\mathbf{x^2+y^2+ax+by+\frac{c+tc_1}{1+t}=0}$$

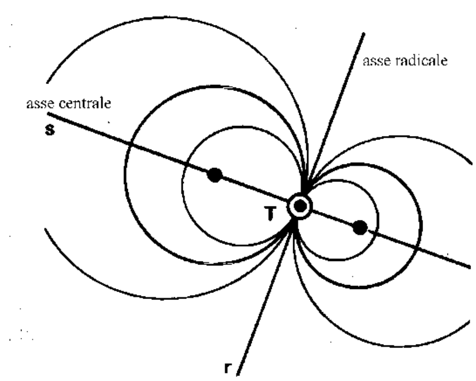
Concludendo possiamo affermare che quando le circonferenze che generano il fascio sono **concentriche** il fascio si dice **fascio a centro** e l'asse radicale non esiste in quanto la sua equazione si riduce all'espressione $c - c_1 = 0$, cioè $c = c_1$ che è una uguaglianza non vera in quanto le due circonferenze che generano il fascio, hanno si lo steso centro, ma hanno anche raggi diversi. Il fascio è costituito da tutte le circonferenze aventi lo stesso centro $C(\alpha;\beta)$ e raggi diversi. La sua equazione è la seguente: $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+k=0$

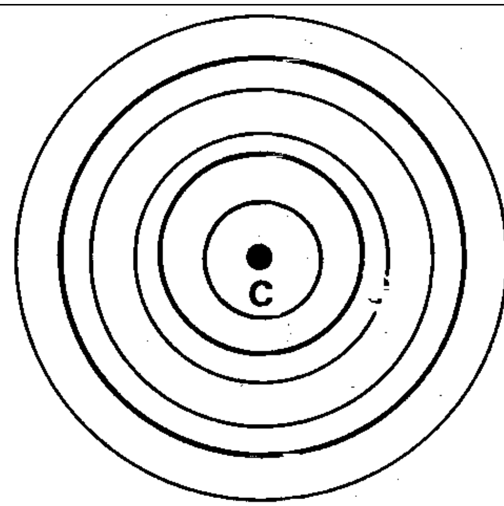
Quarto caso: Le circonferenze σ e σ_1 non sono concentriche e non hanno punti in comune. Il fascio di circonferenze viene detto **fascio iperbolico**. In questa circostanza si dimostra che le circonferenze del fascio, compresa quella degenere, sono a due a due prive di punti comuni e che le circonferenze non degeneri del fascio sono a due a due non concentriche, essendo i loro centri situati tutti su una medesima retta perpendicolare all'asse radicale.

L'**asse radicale** è una ben determinata retta esterna a ciascuna circonferenza del fascio.

Il fascio contiene una sola circonferenza degenere, l'asse radicale.







Studio di un fascio di circonferenze

Date due circonferenze σ e σ_1 aventi rispettivamente equazioni:

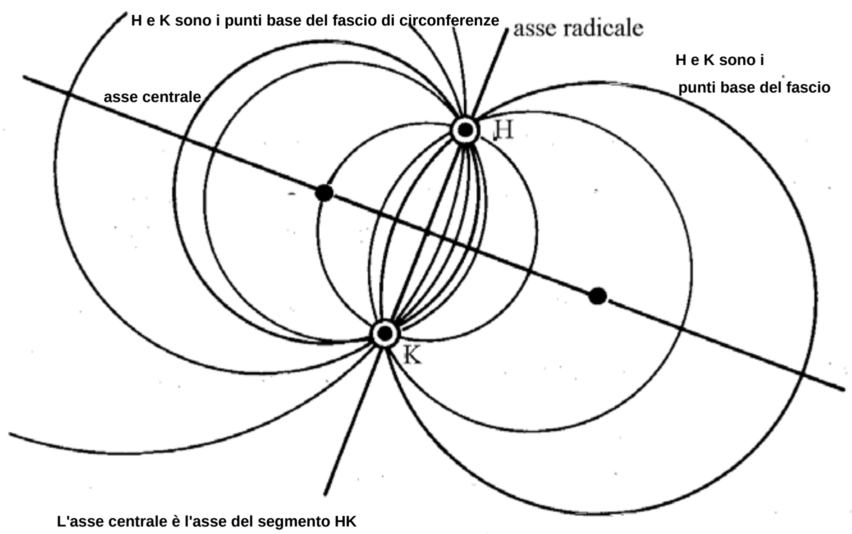
$$g(x,y) = x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad g_1(x,y) = x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$$

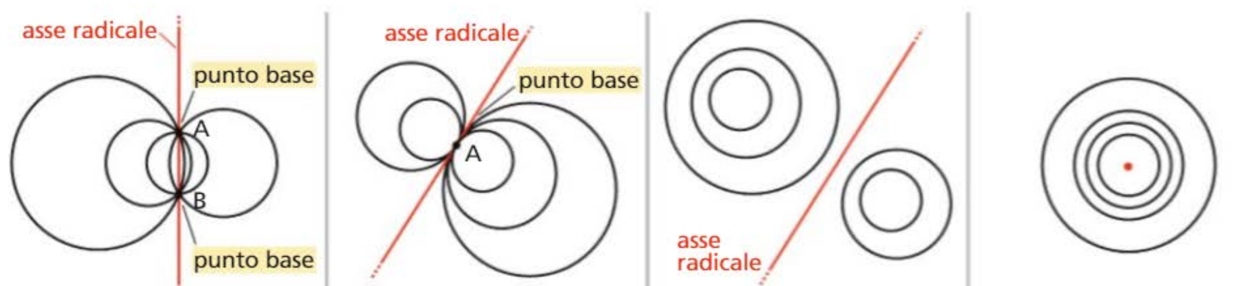
Si chiama fascio di circonferenze generato da σ e σ_1 l'insieme di tutte le circonferenze aventi equazioni: $f(x,y) = g(x,y) + k\cdot g_1(x,y) = 0$ cioè.

$$\mathbf{f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c + k\cdot\left(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1\right) = 0} \quad \text{cioè:}$$

$$\mathbf{(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (a+k\,a_1)x + (b+k\,b_1)y + c + k\,c_1 = 0}$$

Per studiare un fascio di circonferenze occorre trovare: **01)** il suo centro $C(\alpha;\beta)$, **02)** il suo raggio $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$ **03)** le due circonferenze (una delle due potrebbe essere degenere) che generano il fascio **04)** gli eventuali punti base H e K **05)** l'asse radicale (si ottiene ponendo $k=-1$ nell'equazione del fascio) **06)** l'asse centrale **07)** eventuali circonferenze degeneri.





a. Fascio di circonferenze per due punti. **b.** Fascio di circonferenze per un punto. **c.** Fascio di circonferenze senza punti comuni. **d.** Fascio di circonferenze concentriche.

Studiare il fascio di circonferenze di equazione:

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+2(1-2k)x-6y-1+2k=0$$

Scriviamo l'equazione del fascio in forma canonica:

$$x^2+y^2+\frac{2-4k}{1+k}x-\frac{6}{1+k}y+\frac{2k-1}{1+k}=0 \qquad a=\frac{2(1-2k)}{1+k} \qquad b=-\frac{6}{1+k} \qquad c=\frac{2k-1}{1+k}$$

$$C\left(\frac{2k-1}{1+k};\frac{3}{1+k}\right) \qquad r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}=\sqrt{\frac{2k^2-5k+11}{(k+1)^2}}=\frac{\sqrt{2k^2-5k+11}}{|k+1|}$$

Per trovare le equazioni delle circonferenze che generano il fascio basta sviluppare il primo membro dell'equazione del fascio e mettere in evidenza il parametro k. Otteniamo:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 + k \cdot \left(x^2 + y^2 - 4x + 2\right) = 0$$

Le due circonferenze che generano il fascio hanno, rispettivamente, equazioni:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0} \qquad \mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0}$$

Ponendo $k = -1$ nell'equazione del fascio otteniamo **2x - 2y - 1 = 0** che è l'equazione dell'**asse radicale** del fascio di circonferenze. Per calcolare le coordinate dei **punti base A e B** del fascio basta risolvere uno dei due sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-6y-1=0 \\ 2x-2y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2-4x+2=0 \\ 2x-2y-1=0 \end{cases}$$ Otteniamo $A\left(\frac{5+\sqrt{7}}{4};\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)$ $B\left(\frac{5-\sqrt{7}}{4};\frac{3-\sqrt{7}}{4}\right)$

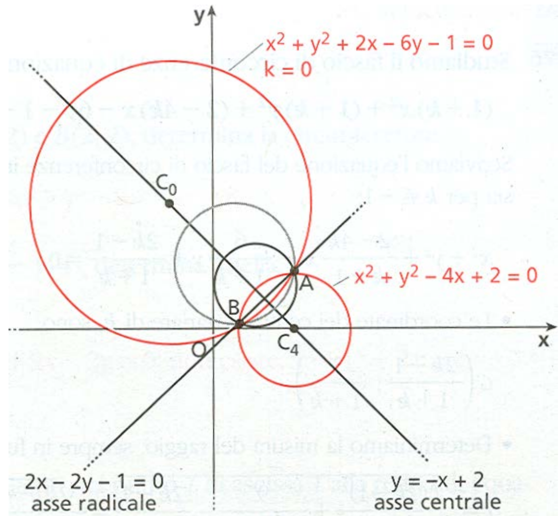
L'asse del segmento AB è l'**asse centrale** del fascio di circonferenze. Non ci serviremo di questa proprietà per calcolare l'asse centrale in quanto le coordinate dei punti base sono espressi da numeri che rendono faticoso il calcolo. Seguiremo una via più semplice. Sia $C\left(-2;0\right)$ il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ che, assieme alla circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$, genera il fascio. L'asse centrale è la retta passante per il punto $C\left(-2;0\right)$ e perpendicolare all'asse radicale $2x-2y-1=0$ del fascio. $2\left(x-2\right)+2y=0$ $x-2+y=0$ $\mathbf{y = -x + 2}$ (**asse centrale**)

Scriviamo le equazioni di alcune particolari circonferenze del fascio attribuendo al parametro k particolari valori numerici:

$k = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ che è la prima generatrice del fascio $C_o\left(-1;3\right)$ $r_0 = \sqrt{11}$

$k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - -x - 3y + \frac{1}{2} = 0 \quad C_1\left(\frac{1}{2}:\frac{3}{2}\right) \quad r_1 = \sqrt{2}$

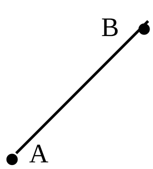
$k = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad C_2\left(1;1\right) \quad r_2 = 1$



Equazioni di particolari fasci di circonferenze

Scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze passante per i punti $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$

Per scrivere l'equazione del fascio di circonferenze avente come punti base i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dobbiamo conoscere le equazioni di due circonferenze (una eventualmente degenere) passanti per A e B. Le più facili da determinare sono le equazione della retta AB (circonferenza degenere o asse radicale) e della circonferenza di diametro AB

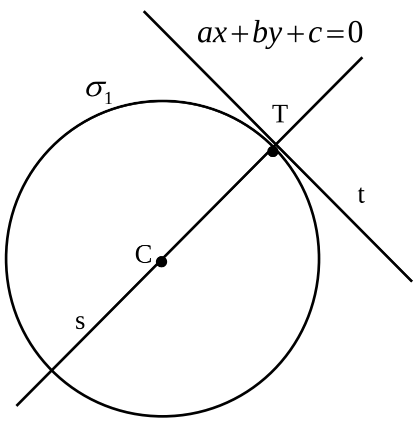


1) σ_1 circonferenza avente come diametro il segmento AB . $\sigma_1 : \sigma_1(x, y) = 0$

2) retta s passante per i punti A e B. s : $s(x, y) = 0$

3) $\sigma_1(x, y) + \lambda \cdot s(x, y) = 0$ è l ' **equazione del fascio di circonferenze** richiesto

Scrivere l'equazione di un fascio di circonferenze tangenti alla retta di equazione $ax+by+c=0$ nel suo punto $T(x_T;y_T)$



1) Scrivo l'equazione della retta s passante per il punto di tangenza $T(x_T, y_T)$ **e** $\perp$ alla tangente t**.**

$b(x - x_T) - a(y - y_T) = 0$ s: $\mathbf{a_1x+b_1y+c_1=0}$

2) la retta t è l'asse radicale del fascio di circonferenze

3) Mi scelgo un punto $C(x_C, y_C)$ qualsiasi della retta s

4) Scrivo l'equazione della circonferenza σ_1 di centro C e raggio $r = CT$.

$(x - x_C)^2 + (y - y_C) = r^2 = (x_T - x_C)^2 + (y_T - y_C)$ σ_1 : $\boxed{x^2+y^2+px+qy+\gamma=0}$

5) L 'equazione del fascio di circonferenze è: $\mathbf{x^2+y^2+px+qy+\gamma+\lambda(ax+by+c)=0}$

Le generatrici del fascio sono la circonferenza σ_1 e la retta tangente **t** (asse radicale del fascio)

N.B. Come circonferenza σ_1 posso scegliere la circonferenza di centro T e raggio nullo, cioè la circonferenza di equazione: $(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 = 0$ σ_1: $\mathbf{x^2+y^2+mx+ny+d=0}$

L 'equazione del fascio di circonferenze è: $\mathbf{x^2+y^2+mx+ny+\lambda(ax+by+c)=0}$

Esempio numerico: $T(1,0)$ t : $x + 2y - 1 = 0$ retta s: $2(x - 1) - y = 0$

S: $2x - y - 2 = 0$, $C(0,-2)$, $r^2 = \overline{CT}^2 = 1 + 4 = 5$, $(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 5$

σ_1: $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ $x^2 + y^2 + 4y - 1 + k(x + 2y - 1) = 0$

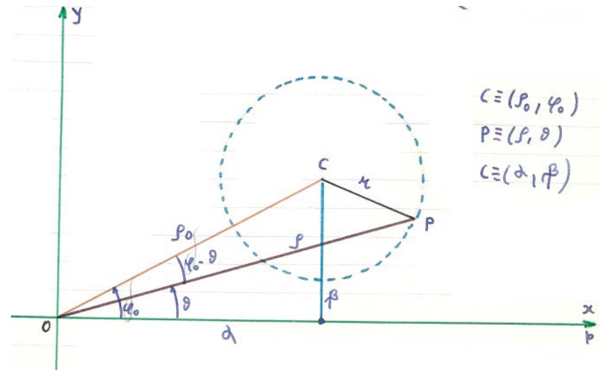
σ : $\mathbf{x^2++kx+2(2+k)y^2-1-k=0}$

Altro procedimento

Circonferenza di centro $T(1,0)$ e raggio nullo: $(x - 1)^2 + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + \lambda(x + 2y - 1) = 0$ $\mathbf{x^2+y^2+(\lambda-2)x+2\lambda y-\lambda=0}$

Equazione polare della circonferenza



Vogliamo calcolare l'equazione della circonferenza di centro $C(\alpha,\beta)$ e raggio r.

Applicando il teorema di Carnot al triangolo POC abbiamo:

$\overline{OP}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OP}\cdot\overline{OC}\cdot\cos P\hat{O}C=\overline{CP}^2$ cioè:

$$\boldsymbol{\rho^2-2\rho_o\rho\cdot\cos(\vartheta-\varphi_o)+\rho_o^2=r^2} \quad [8]$$

Possiamo determinare l'equazione polare della circonferenza utilizzando le formule $\mathbf{x=\rho\cos\vartheta}$ $\mathbf{y=\rho\sin\vartheta}$ e l'equazione cartesiana della circonferenza $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$

$$\alpha=\rho_o\cdot\cos\varphi_o \quad \beta=\rho_o\cdot\sin\varphi_o \quad \rho_o^2=\alpha^2+\beta^2$$

$$\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta-2\rho_o\rho\cos\vartheta\cos\varphi_o-2\rho_o\rho\sin\vartheta\sin\varphi_o+\rho_o^2-r^2=0$$

$$\rho^2\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)-2\rho_o\rho\left(\cos\vartheta\cos\varphi_o+\sin\vartheta\sin\varphi_o\right)+\rho_o^2-r^2=0$$

$$\boldsymbol{\rho^2-2\rho_o\rho\cdot\cos(\vartheta-\varphi_o)+\rho_o^2=r^2} \quad [8]$$

Se $\rho_o=r$ la circonferenza passa per il polo O e la sua equazione polare diventa:

$$\boldsymbol{\rho^2=2\rho_o\rho\cdot\cos(\vartheta-\varphi_o)} \quad [9]$$

mentre se risulta: $C\equiv O$ abbiamo: $\rho=r \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2+y^2=r^2} \quad [10]$

Se C appartiene all'asse polare p, allora è: $\varphi_o=0$.