Unità Didattica N°01
Gli insiemi

Il concetto di insieme ed i primi elementi di logica matematica

- I concetti di **insieme** e di *elemento di un insieme* sono **concetti primitivi**, cioè non definibili mediante altri concetti più semplici. Il termine **insieme** è sinonimo di collezione, raccolta, aggregato. Cantor scrisse: << *Un insieme è una collezione di oggetti determinati e distinti, facenti parte del mondo della nostra intuizione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono* **elementi** *dell'insieme*>>. Questa, però, non è la definizione di insieme ma è soltanto la sua descrizione in quanto non è stato definito il significato di collezione mediante nozioni più semplici.

Un insieme esiste come ente matematico quando è possibile stabilire se un dato oggetto è o non è elemento dell'insieme.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: **A, B, C, D, E, F, G, ...**

Gli **elementi di un insieme** si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino: **x, y, a, b, c..**

Di solito noi avremo a che fare con uno dei seguenti insiemi numerici:

$N = \{0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri naturali**

$Z = \{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\cdots\}$ = insieme dei **numeri interi relativi**

Q = insieme dei **numeri razionali** , **R** = insieme dei **numeri reali**

C = insieme dei **numeri complessi**

Se **G** é un insieme, con la scrittura $x \in G$ (si legge: **x appartiene** a G, oppure, **x è un elemento dell'insieme G**) si indica che x è uno degli elementi che costituiscono l'insieme **G**.

Il segno $\in$ è detto simbolo di appartenenza. Il simbolo $\notin$ è la negazione della relazione di appartenenza. Con la scrittura $x \notin G$ (si legge: x non appartiene a G) si vuole significare che l'elemento x non fa parte dell'insieme G. Esempi: $2 \in N$, $\frac{1}{4} \notin N$. Il **principio di estensione** degli insiemi consiste nell'affermare che un insieme è individuato dai suoi elementi.

Se **E** ed **F** sono simboli di insiemi, scriveremo $E = F$ se gli elementi che costituiscono l'insieme rappresentato dal simbolo **E** sono gli stessi che costituiscono l'insieme rappresentato dal simbolo **F** .

Il **principio di estensione** fornisce un criterio per individuare un insieme.

La negazione dell'uguaglianza $E=F$ si indica con la notazione $E \neq F$. Essa significa che esiste almeno un elemento appartenente ad uno dei due insiemi ma non appartenente all'altro.

E' opportuno osservare che esiste una sola **copia** di ogni ente denominato insieme, per cui, quando si individua un insieme mediante i suoi elementi si scrive, di solito, una sola volta il simbolo di ogni suo elemento.

L'insieme delle lettere che compaiono nella parola **tutto** coincide con l'analogo insieme relativo alla parola **tuo** ed è costituito dagli elementi **o, t, u**, è cioè l'insieme $\{o,t,u\}$. In altri termini, gli insiemi sono aggregati **caotici** di elementi.

L'esempio precedente mostra come si possa assegnare un insieme costituito da un numero finito di elementi semplicemente mediante un elenco di tali elementi inseriti in un ordine qualunque.

- La necessità di considerare insiemi aventi infiniti elementi indusse **Cantor** all'idea di introdurre le **proprietà** (o **predicati**). La **proprietà** di un ente è tutto ciò per cui ciascun ente si distingue dagli altri. Ad esempio, <<**x è un libro** >> è una **proprietà** in quanto fissato l'elemento x possiamo stabilire se esso è o non è un libro. Si dirà che x è una **variabile** e la **proprietà** sarà indicata con $P(x)$. Una **proprietà** può contenere più variabili. L'idea di **Cantor** è la seguente:

(**principio di astrazione**): assegnata la proprietà $P(x)$ contenente la sola variabile **x** , esiste l'insieme **A** costituito dagli elementi **x** per i quali la proprietà $P(x)$ è vera. In simboli abbiamo: $A = \{x|P(x)\}$ e si legge: A è l'insieme degli elementi **x** per i quali è vera la proprietà $P(x)$.

Ci accorgiamo subito che in tal modo viene ammessa l'esistenza di un insieme $\varnothing$, privo di elementi, detto **insieme vuoto**. Esso si ottiene quando si considera una proprietà $P(x)$ falsa per ogni x, ad esempio la proprietà $x \neq x$. $\varnothing = \{x : x \neq x\} = \{\ \}$

$P(x)$ è detta anche **funzione proposizionale** o **funzione enunciativa in una variabile**.

Una proprietà $P(x)$ si dice **definita nell'insieme U** se per ogni elemento di **U** è possibile stabilire se $P(x)$ è vera o falsa. L'insieme **U** è detto **insieme universo** o **insieme ambiente** o **insieme totale** Diciamo **insieme verità** della funzione enunciativa $P(x)$ l'insieme **A** formato dagli elementi $x \in U$ per i quali risulta vera la proprietà $P(x)$. Ogni qualvolta un insieme viene determinato mediante una proprietà caratteristica dei suoi elementi, bisogna specificare l'insieme **U** (**insieme universo** o **insieme ambiente** o **insieme totale**) da cui prelevare gli elementi che costituiscono l'insieme. Quando non vi è possibilità di equivoci, l'insieme ambiente può essere trascurato.

Se **U** è l'insieme universo e $P(x)$ la **proprietà caratteristica** che individua l'insieme **A**, scriviamo: $A = \{ x | P(x) \wedge x \in U \}$

e leggiamo: << **A è l'insieme formato dagli elementi** x **prelevati dall'insieme U per i quali risulta vera la proprietà caratteristica** $P(x)$ >>.

$A = \{x : x = 2n \wedge x \in N\}$ rappresenta l'insieme dei **numeri pari**.

- Le frasi **qualunque sia** oppure **per ogni** ed equivalenti si esprimono col simbolo $\forall$ detto **quantificatore universale**. Cosi la scrittura $\forall x \in A$ si legge: <<per ogni elemento **x** appartenente all'insieme **A**>> oppure <<qualunque sia l'elemento **x** appartenente all'insieme **A**>>. Analogamente la scrittura $\forall x, y \in A$ si legge: <<qualunque siano gli elementi **x** ed **y** appartenenti all'insieme A>> .
- Spesso la frase << **tale che** >> si indica con uno dei seguenti simboli << | >> oppure << : >>
- Le frasi <<**esiste almeno un**>> ed equivalenti si indicano col simbolo $\exists$ detto **quantificatore esistenziale**. Cosi la scrittura $\exists x \in A$ si legge <<esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme A>>. La frase <<**esiste ed è unico**>> viene indicata col simbolo $\exists^*$. Ad esempio la scrittura $\exists^* x \in N : x + 2 = 8$ si legge << **esiste ed è unico** *il numero x tale che* $x + 2 = 8$ >> . Il numero in questione è il numero 6 . La scrittura $\exists x \in A : (\exists x \in A |)$ si legge: << esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme *A tale che*>>.

Due importanti **connettivi logici** che compongono due proposizioni sono:

- **e** (sarebbe l'**et** latino) con cui si forma la proposizione p e q (p et q) che viene indicata col simbolo $p \wedge q$
- **o** con cui si forma la proposizione p o q che viene indicata col simbolo $p \vee q$
- Molte grammatiche definiscono la **proposizione** come << un giudizio della mente espresso con parole >>. La **logica matematica** respinge questa definizione in quanto essa ammette come già noto il significato del termine **giudizio**. Per la logica matematica **proposizione** è una combinazione di parole o di simboli a cui compete uno solo dei seguenti attributi: <<vero>> o <<**falso**>>.

Tali attributi saranno simbolicamente indicati con le lettere **V , F**. <<Roma è una città bella>> non rappresenta una **proposizione** in quanto non possiamo stabilire se la circostanza è vera o falsa . Rappresenteremo le nostre proposizioni mediante lettere, ad esempio **p, q,..** . La terra è un pianeta è una **proposizione vera** , la luna è una stella è una **proposizione falsa**.

Quando una **proposizione q** è la conseguenza di una **proposizione p** si dice che **p** implica **q** *e si scrive:* $p \Rightarrow q$ (p implica **q**). Questa scrittura vuole dire che << se è vera la proposizione **p** è vera anche la proposizione **q** >>: **p** dicesi **premessa** o ipotesi, **q conseguenza** o tesi.

In matematica ogni teorema del tipo: << **p è condizione sufficiente per q** >> oppure, ed è la stessa cosa, <<**q *è condizione necessaria per* p**>> si può esprimere semplicemente scrivendo:

$p \Rightarrow q$, cioè ogni **teorema** avente **p** come **ipotesi** e **q** come **tesi** si esprime dicendo che **p** è condizione sufficiente per **q**, mentre **q è condizione necessaria per p**.

Quando l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera si dice che è un TEOREMA, **p** si chiama **ipotesi**, **q tesi**.

Quindi, in ogni teorema la verità dell'ipotesi è **condizione sufficiente** per la verità della tesi, mentre la verità della tesi è **condizione necessaria** (ma in generale non sufficiente) per la verità dell'ipotesi; cioè **una condizione sufficiente va posta come ipotesi, una condizione necessaria come tesi**. Il segno $\Rightarrow$ rappresenta il simbolo di **implicazione logica**. Il simbolo $\not\Rightarrow$ si legge <<**non implica**>>. Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ non è detto che debba risultare vera l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$.

Esempio: $\text{Paolo è torinese} \Rightarrow \text{Paolo è italiano}$, mentre $\text{Paolo è italiano} \not\Rightarrow \text{Paolo è torinese}$.

Se **p** e **q** sono due proposizioni per le quali risulta contemporaneamente $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ allora diremo che le proposizioni **p** e **q** sono equivalenti e scriviamo: $p \Leftrightarrow q$ e leggiamo:

<< **p equivale logicamente a q** >> oppure più semplicemente <<**p equivale a q** >> oppure <<**p coimplica q**>>.

$\Leftrightarrow$ simbolo di **equivalenza logica** o di *doppia implicazione* o di **coimplicazione**

si legge : << *equivale logicamente* oppure **coimplica** >> $\not\Leftrightarrow$ non equivale a

In matematica, ogni teorema del tipo << **p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q** >> si può esprimere semplicemente scrivendo: $p \Leftrightarrow q$

La coesistenza di un teorema e del suo inverso determina le cosiddette **condizioni necessarie e sufficienti**. Precisamente una **condizione C**, rispetto ad una proprietà **P** si dice che è:

1) necessaria quando considerando **P** come ipotesi si deduce **C** come tesi

2) sufficiente quando considerando **C** come ipotesi si deduce **P** come tesi

OSSERVAZIONI

- Un insieme si dice **astratto** quando non è precisata la natura degli elementi che lo costituiscono. Un insieme si dice **numerico** quando i suoi elementi sono numeri
- Il simbolo di appartenenza $\in$ fu introdotto da **Giuseppe Peano** e si chiama pertanto **simbolo di Peano**
- Diremo che un insieme A è **finito** se esiste un numero naturale n tale che ad A appartengono n elementi, cioè quando non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme. Diremo invece che A è **infinito** se, qualunque sia il numero naturale n, all'insieme appartengono più di n elementi, cioè un insieme è infinito se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
- L'insieme formato da un solo elemento si dice un **singolo** e si indica col simbolo $\{a\}$. Risulta sempre $\{a\} \neq a$. L'insieme formato da due elementi si dice un **paio** e si indica col simbolo $\{a,b\}$. L'insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing = \{\ \}$

In particolare risulta : $\{\varnothing\} \neq \varnothing$

- L'ordine secondo cui sono elencati gli elementi di un insieme non ha importanza, cioè gli insiemi $\{a,b,c\}$ e $\{b,a,c\}$ rappresentano lo stesso insieme.

La rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in diverse maniere:

1) Rappresentazione tabulare

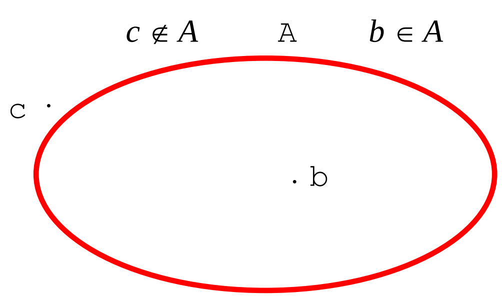
Si elencano gli elementi che costituiscono l'insieme; essi vengono racchiusi fra due parentesi graffe. Si ha cosi la **rappresentazione tabulare** (o per **elencazione** o **analitica** o in **estensione**) dell'insieme. Esempi: $A = \{a,e,i,o,u\}$ $B = \{1,3,8,17,25\}$

2) Rappresentazione caratteristica

Si possono definire gli elementi dell'insieme con una **proprietà** che permette di ricavarli senza ambiguità. Basta enunciare tale proprietà: si ha la **rappresentazione caratteristica** (o *sintetica* dell'insieme). $A = \{ x : P(x) \wedge x \in I \}$ $\quad A = \{ x : x < 8 \wedge x \in N \} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

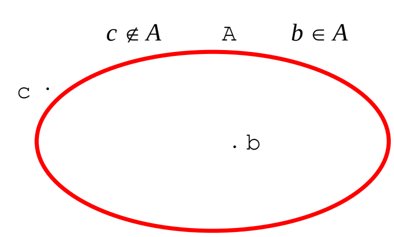
Si legge: **A** è l'insieme i cui elementi sono numeri naturali minori di 8, oppure: **A** è l'insieme degli elementi x appartenenti all'insieme dei numeri naturali tali che siano minore del numero 8.

3) Rappresentazione grafica

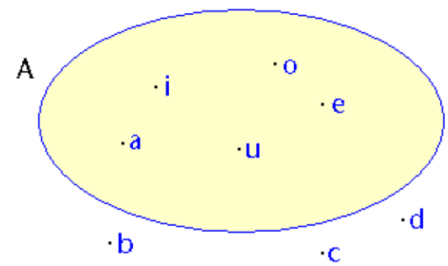


Per rendere suggestiva la considerazione di un insieme astratto A si usa dare una **rappresentazione grafica** mediante curve piane chiuse prive di nodi, limitanti delle superfici sulle quali sono rappresentate i punti che individuano gli elementi dei vari insiemi. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme*. Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.

Si disegna una linea chiusa priva di nodi nella cui regione interna si immagina siano racchiusi gli elementi dell'insieme. *Il contorno non può contenere alcun elemento dell'insieme*. Ogni punto disegnato all'interno della curva chiusa priva di nodi rappresenta un elemento dell'insieme; ogni punto disegnato esternamente rappresenta un elemento non appartenente all'insieme.



Rappresentazione mediante i diagrammi di **Eulero - Venn** dell'insieme **A** delle vocali dell'alfabeto italiano. Gli elementi inseriti all'interno della linea chiusa appartengono all'insieme considerato, gli elementi lasciati fuori non appartengono all'insieme **A**.



OSSERVAZIONI

- Quando si rappresentano insiemi finiti vi sono punti interni al contorno che non rappresentano nulla (Qualche volta si tratteggia la parte di superficie priva di elementi)
- Quando si rappresentano insieme infiniti tutti i punti della superficie limitata dalla curva sono elementi dell'insieme

- Le figure che così si ottengono si dicono **diagrammi di Venn** (logico inglese 1834-1927) o **diagrammi di Eulero** (matematico svizzero 1707-1783)

Sottoinsieme di un insieme

Si dice che un insieme **A** è un **sottoinsieme proprio** dell'insieme **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B**, ma esiste almeno un elemento di **B** che non appartiene ad **A**. Questa relazione fra insiemi, detta **relazione d'inclusione stretta**, si scrive: $A \subset B$

e si legge : << **A** è sottoinsieme proprio di **B**, oppure **A** è parte propria di **B**, oppure **A** è incluso (o contenuto) propriamente (o in senso stretto) in **B**. Il simbolo $\subset$ è detto simbolo di **inclusione stretta**. Si dice anche che **B** include o contiene **A** e si scrive $B \supset A$.

Se invece **A** non è incluso in **B** si scrive : $A \not\subset B$ oppure $B \not\supset A$

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \forall x \in A \Rightarrow \exists x \in B \wedge : x \notin A \right\}$$

Dati due insiemi **A** e **B** se ogni elemento di **A** è anche elemento di **B** si dice che **A** è un **sottoinsieme** di **B** od anche che è contenuto o incluso in **B**. In questo caso scriviamo: $A \subseteq B$ e si legge: <<**A** è un sottoinsieme di **B** oppure **A** è incluso in **B**>> . Il simbolo $\subseteq$ è il **simbolo di inclusione larga** nel senso che questa volta non si esclude che ogni elemento di **B** possa appartenere ad **A**. Si legge: <<L'insieme **A** è contenuto o coincide con l'insieme **B**>>. Dalla definizione di sottoinsieme si deduce che fra i sottoinsiemi di un certo insieme **B** c'è l'**insieme vuoto** $\varnothing$ e c'è l'insieme **B**. Si abbia l'insieme $B = \left\{ a, b, c \right\}$ I **sottoinsiemi** di **B** sono:

$$\varnothing \ , \ \left\{ a \right\} \ , \ \left\{ b \right\} \ , \ \left\{ c \right\} \ , \ \left\{ a,b \right\} \ , \ \left\{ a,c \right\} \ , \ \left\{ b,c \right\} \ , \ \left\{ a,b,c \right\}$$

Quando **A** è un sottoinsieme non vuoto di **B** e che non coincide con **B**, si dice che **A** è un **sottoinsieme proprio** di **B**, mentre l'insieme vuoto e l'insieme **B** si chiamano **sottoinsiemi impropri** di **B**. Il simbolo $\subset$ si legge: <<**contenuto**>>.

La relazione di **inclusione in senso largo** gode delle tre seguenti proprietà formali:

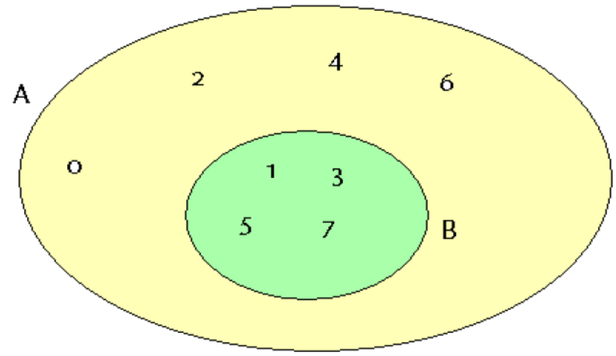
1) RIFLESSIVA: $A \subseteq A$

2) TRANSITIVA: $A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$

3) ANTISIMMETRICA: $A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B$

Un esempio di sottoinsieme:

Consideriamo i due seguenti insiemi: $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ e $B = \{1,3,5,7\}$. Notiamo che ogni elemento di **B** è anche un elemento di **A**. Questo ci consente di affermare che **B** è un sottoinsieme di **A**.



In simboli scriviamo: $B \subset A$ e leggiamo "l'insieme **B** è un sottoinsieme di **A**"; oppure: $A \supset B$ e leggiamo "l'insieme **A** contiene l'insieme **B**".

Il modo più naturale ed usato per assegnare un sottoinsieme **A** di **B** è quello di fornire una proprietà $P(x)$ che faccia inequivocabilmente decidere se un dato elemento $x \in B$ goda oppure no della proprietà $P(x)$.

In tal caso si parla di **proprietà** (o *legge*) **caratteristica** di **A** dentro **B**. Con la scrittura:

$$A = \{ x \in B : P(x) \}$$

intenderemo l'insieme **A** costituito dagli elementi $x \in B$ per cui è vera la **proprietà caratteristica** $P(x)$. Se $J \subset U$, definiamo **complementare di J rispetto ad U** l'insieme $C_U J$ costituito dagli elementi di **U** che non appartengono a **J**. In simboli abbiamo:

$$C_U J = \{ x : x \in U \wedge x \notin J \wedge J \subset U \}$$

Insieme ambiente o insieme universo o insieme totale

Quando si assegna un insieme **A** mediante una **proprietà caratteristica** $P(x)$, occorre indicare l'**ambiente** dal quale estrarre gli elementi x dell'insieme. Questo ambiente dal quale preleviamo gli elementi x dell'insieme **A** è, a sua volta, un insieme denominato **insieme ambiente**, o **insieme universo** o **insieme totale** e, di solito, viene indicato col simbolo **U**. Se **U** è l'insieme universo e $P(x)$ la **proprietà caratteristica** che individua l'insieme **A**, scriviamo:

$$A = \{ x | P(x) \wedge x \in U \}$$

e leggiamo: << **A è l'insieme formato dagli elementi** x **prelevati dall'insieme U per i quali risulta vera la proprietà caratteristica** $P(x)$ >>.

$A = \{ x : x = 2n \wedge x \in N \}$ rappresenta l'insieme dei **numeri pari**.

• Diremo che un insieme A è **finito** se esiste un numero naturale n tale che ad A appartengono n elementi, cioè quando non può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme. Quindi, si chiamano finiti gli insiemi composti da un numero di elementi che è possibile contare fino all'esaurimento. • L'insieme formato da un solo elemento si dice un **singolo** e si indica col simbolo $\{a\}$. L'insieme formato da due elementi si dice un **paio** e si indica col simbolo $\{a,b\}$. L'insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing = \{\}$. Tali insiemi sono tutti insiemi finiti. • L'ordine secondo cui sono elencati gli elementi di un insieme non ha importanza, cioè gli insiemi $\{a,b,c\}$ e $\{b,a,c\}$ rappresentano lo stesso insieme.

Diremo invece che A è **infinito** se, qualunque sia il numero naturale n, all'insieme appartengono più di n elementi, cioè un insieme è infinito se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Intersezione di due o più insiemi

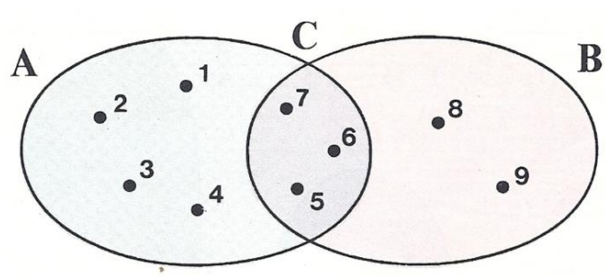
• Dati due insiemi **A** e **B**, l'insieme C formato dagli elementi comuni ad **A** e **B** si chiama **insieme intersezione** o **intersezione** di **A** e **B**. Scriviamo $C = A \cap B$ e leggiamo : << *C è uguale ad* **A** *intersecato* **B**>>. In simboli abbiamo : $C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

$\cap$ è il simbolo di **intersezione**

<< **Dire che x appartiene all'intersezione di A con B equivale a dire che x appartiene contemporaneamente ad A e B** >>.

Consideriamo ancora i seguenti insiemi:

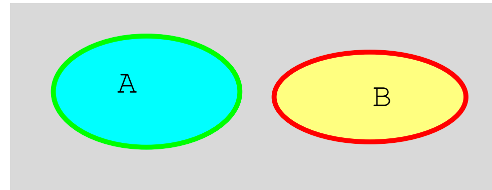
$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\} \quad e \quad B = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$



Si ha: $A \cap B = C$, essendo $C = \{5,\ 6,\ 7\}$.
I numeri 5, 6 e 7 sono infatti comuni ai due insiemi.

Due insiemi **A** e **B** si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \varnothing$

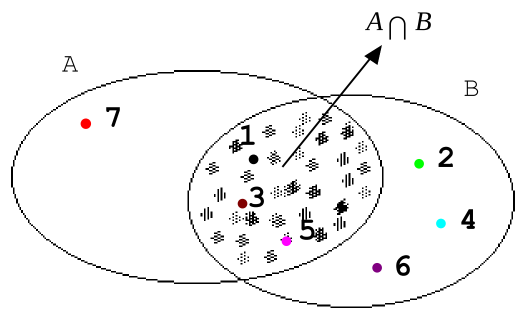
Immagine grafica di due insiemi **disgiunti**



$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ oppure $B = \varnothing$

oppure **A** e **B** sono **insiemi disgiunti**.

Graficamente l'insieme intersezione è rappresentato dalla parte spruzzata.



$A = \{1,3,5,7\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$C = A \cap B = \{1,3,5\}$

Per convenzione si pone:

$A \cap \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap A = \varnothing$

L'intersezione di due insiemi gode delle seguenti proprietà formali:

1) proprietà iterativa o di **idempotenza** $A \cap A = A$

2) proprietà commutativa $A \cap B = B \cap A$

3) proprietà associativa $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

La definizione di intersezione si estende anche al caso di tre o più insiemi. L'intersezione degli insiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ è l'insieme C formato dagli elementi comuni a tutti gli insiemi dati -

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots\ldots A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

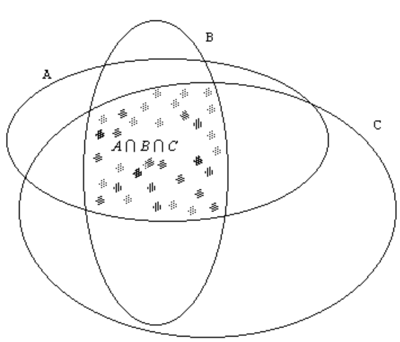


Diagramma di Eulero-Venn relativo all'intersezione di tre insiemi.

Unione di due insiemi

Definiamo **unione** di due insiemi **A** e **B** l'insieme **C** costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, cioè dagli elementi che appartengono ad **A** o **B** o ad entrambi.

(Gli elementi comuni agli insiemi **A** e **B** vanno presi una sola volta). In simboli abbiamo:

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

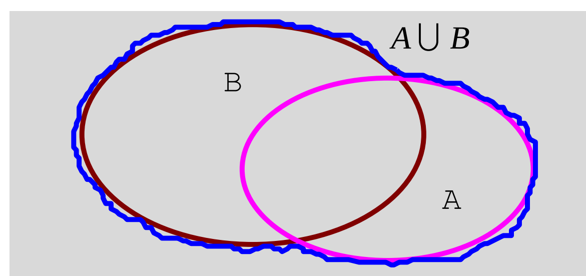
e si legge <<**U** uguale **A** unito **B** >>. Qui il significato di **oppure** ($\vee$)non ha valore esclusivo, cioè il significato di $\vee$ è quello di **vel** latino e non di aut. Quindi un elemento appartiene all'unione se: **1)** appartiene ad **A** **2)** oppure appartiene a **B** **3)** oppure appartiene ad entrambi gli insiemi.

$\cup$ è il **simbolo di unione**.

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $\Rightarrow$ $C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{2,3,4,7\}$, $B = \{5,9\}$ $\Rightarrow$ $C = A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$

La parte di piano delimitata dal contorno azzurro a tratto pieno rappresenta $A \cup B$



Per l'unione di due insiemi valgono le seguenti **proprietà formali**:

1) $A \cup A = A$ **idempotenza**

2) $A \cup B = B \cup A$ **commutativa**

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ **associativa**

4) $A \cup \varnothing = A$ $\varnothing$ è l'**elemento neutro**

Si dice unione di più insiemi **A**, **B**, **C**, **D**,... l'insieme X formato dagli elementi appartenenti ad uno almeno di tali insiemi. $X = A \cup B \cup C \cup D....$

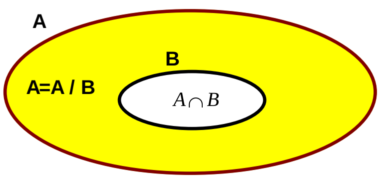
Differenza di due insiemi

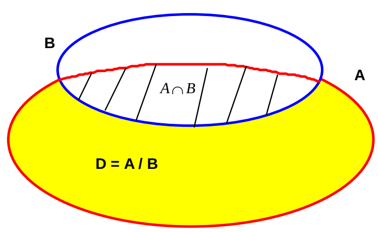
Si dice **differenza** di due insiemi **A** e **B** (in questo ordine) l'insieme **D** costituito dagli elementi dell'insieme **A** che non appartengono all'insieme **B**. In simboli abbiamo:

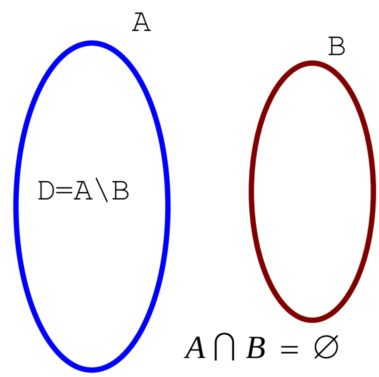
$$D = A \setminus B = A - B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

e si legge <<**D uguale A meno B**>>

I seguenti **diagrammi di Eulero-Venn** visualizzano la situazione nei vari casi. La differenza è rappresentata dalla parte di piano riempita con lo spruzzo.







$\forall\ A$ risulta : $A - \varnothing = A$, $A - A = \varnothing$, $A - B \neq B - A$

Se in particolare risulta $A \subset B$ allora l'insieme differenza $D = A \setminus B$ si dice il **complementare di B rispetto ad A**, si scrive $C_A B$ (vedere **primo diagramma di Eulero-Venn**) e si indica con $C_A B = A \setminus B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$

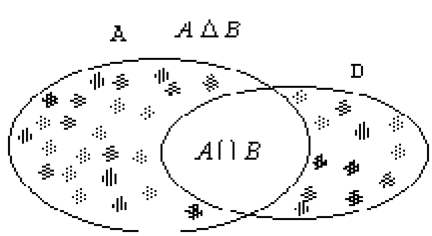
e si legge: << **differenza complementare di B rispetto ad A**>>

Osservazione: Le operazioni di intersezione e di unione corrispondono, volendo fare una analogia con le operazioni aritmetiche, al prodotto ed alla somma.

Si definisce **differenza simmetrica** di due insiemi **A** e **B** l'insieme i cui elementi sono quelli non comuni ad **A** e **B**. In simboli abbiamo:

$$A \Delta B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap B \} = (A - B) \cup (B - A)$$

e si legge : << **differenza simmetrica fra gli insiemi A e B**>>



La **differenza simmetrica** con i **diagrammi di Eulero-Venn**. La parte di piano macchiata rappresenta la differenza simmetrica fra gli insiemi **A** e **B**

Insieme delle parti di un insieme

Si definisce **insieme delle parti** di un insieme non vuoto **A** e si indica col simbolo $P(A)$ l'insieme che ha come elementi tutti i possibili sottoinsiemi di **A**, compresi l'insieme stesso A e l'insieme vuoto $\varnothing$.

Dato l'insieme $A = \{a,b,c\}$, tutti i suoi possibili sottoinsiemi sono:

$$\varnothing \ , \ \{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{c\} \ , \ \{a,b\} \ , \ \{a,c\} \ , \ \{b,c\} \ , \ \{a,b,c\}$$

$$P(A) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Si dimostra che un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi. In particolare, un insieme con 3 elementi ha $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0$ sottoinsiemi, come constatiamo dall'esempio precedente.

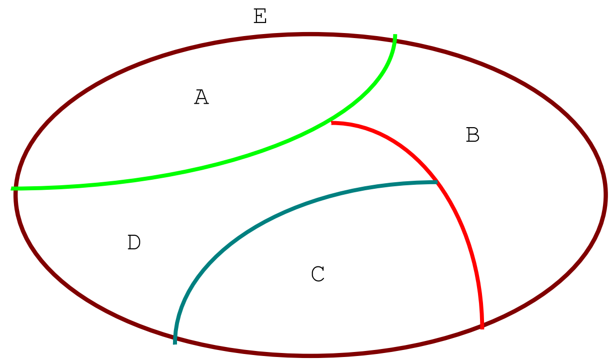
Partizione di un insieme

Dato un insieme **E** consideriamo i suoi sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, che verificano le seguenti condizioni:

1) nessuno dei sottoinsiemi è vuoto **2)** due sottoinsiemi distinti sono **disgiunti**, cioè la loro intersezione è l'insieme vuoto **3)** l'unione di tali sottoinsiemi è l'insieme dato **E**. In tali condizioni si dice che i sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, costituiscono una **partizione** dell'insieme **E**.

- L'insieme dei *numeri naturali pari* e quello dei *numeri naturali dispari* costituiscono una partizione dell'insieme dei numeri naturali.
- L'insieme N dei numeri naturali ammette come sottoinsiemi i multipli del 3 (insieme A), i multipli del 5 (insieme B), i multipli del 6 (insieme C) , i numeri primi (insieme D) . Tuttavia questi sottoinsiemi (A, B, C, D) non costituiscono una partizione di N . Infatti , ad esempio , il numero 15 appartiene sia ai multipli di 3 che ai multipli di 5 ($15 \in A$, $15 \in B$) e quindi due sottoinsiemi distinti (A e B) non risultano disgiunti. Vi sono, poi, numeri come il 14 , 16 ed altri che non appartengono a nessuno dei sottoinsiemi di considerati. Questo significa che l'unione dei sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, non dà l'insieme N.

I sottoinsiemi **A**, **B**, **C**, **D**, costituiscono una **partizione** dell'insieme **E** perché sono insiemi non vuoti a due a due **disgiunti** e la loro unione è l'insieme **E**



Coppie ordinate

Siano dati due insiemi **A** e **B** non vuoti. Col simbolo (a,b) con $a \in A$, $b \in B$ indichiamo una **coppia ordinata** avente come **prima componente** (o **primo elemento**) un elemento $a \in A$ e come **seconda componente** (o **secondo elemento**) un elemento $b \in B$. Non bisogna fare confusione tra la coppia ordinata (a,b) e l'insieme $\{a,b\}$. Nella coppia ordinata (a,b) è essenziale l'ordine in cui vengono considerate le componenti, mentre nell'insieme $\{a,b\}$ l'ordine in cui si considerano gli elementi non ha importanza. Il concetto di **coppia ordinata** può essere meglio precisato stabilendo un opportuno **criterio di uguaglianza**. Per i nostri scopi risulta necessario stabilire che due coppie ordinate (a,b) e (c,d) sono **uguali** se, e solo se, $a=c \wedge b=d$.
In particolare abbiamo $(a,b) = (b,a)$ se , e solo se , **a = b** , mentre è $(a,b) \neq (b,a)$ se $a \neq b$.
Quindi per gli insiemi risulta sempre $\{a,b\} = \{b,a\}$, per le coppie ordinate $(a,b) \neq (b,a)$ a meno che non sia $a=b$.

Prodotto cartesiano

Siano **A** e **B** due insiemi non vuoti (distinti o non). Si chiama **prodotto cartesiano** di **A** per **B** e si indica col simbolo $A \times B$ (si legge **A** cartesiano **B** oppure **A** per **B**) un nuovo insieme che ha per elementi tutte le coppie ordinate che hanno come prima componente un elemento di **A** e come seconda componente un elemento di **B**, cioè: $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

$A \times B$ = **prodotto cartesiano di A per B**

Il prodotto cartesiano di un insieme **A** per se stesso si indicherà anche col simbolo A^2.

Risulta pertanto: $A \times A = A^2 = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in A \}$

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$, $A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

$$B \times A = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

Dagli esempi precedenti si può concludere che il prodotto cartesiano non è commutativo, cioè in generale risulta: $A \times B \neq B \times A$ in quanto di tratta di insiemi i cui elementi sono coppie ordinate.

Si può, anzi, dimostrare che se **A** e **B** sono insiemi non vuoti , si ha : $A \times B = B \times A \iff A = B$

Si può dimostrare che se l'insieme **A** contiene **m** elementi e l'insieme **B** contiene **n**, allora l'insieme $A \times B$ contiene $m \cdot n$ elementi.

E' particolarmente importante il caso in cui il secondo insieme è uguale al primo $A=B$. Allora tra le coppie ordinate di $A \times B = A \times A = A^2$ ve ne sono di quelle costituite dagli stessi elementi, cioè del tipo: (a_1,a_1) , (a_2,a_2) , (a_3,a_3) , (a_4,a_4) ,$\cdots$

Esse costituiscono un sottoinsieme si $A \times A$ detto **sottoinsieme diagonale** di A^2 . Si conviene inoltre di porre: $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$, $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

Proprietà formali del prodotto cartesiano:

1) proprietà distributiva rispetto all'intersezione:

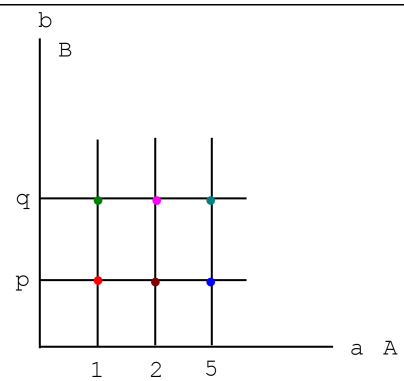
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad , \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

2) proprietà distributiva rispetto all'unione

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad , \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

Rappresentazione reticolare di un prodotto cartesiano

Gli elementi (coppie ordinate) di un prodotto cartesiano possono essere indicati mediante i **nodi** delle maglie di un reticolo. Conviene disegnare due semirette fra loro ortogonali e con l'origine in comune, rappresentando sulla semiretta orizzontale a gli elementi dell'insieme **A** e sulla semiretta verticale b tutti gli elementi dell'insieme **B**.



Rappresentazione reticolare del **prodotto cartesiano**

$A \times B = \{(1,p),(1,q),(2,p),(2,q),(5,p),(5,q)\}$

quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

Le rette condotte per i punti di a che rappresentano gli elementi di **A** parallele alla semiretta b e le rette condotte per i punti di b che rappresentano gli elementi di B parallele alla semiretta a individuano dei **nodi** che rappresentano simbolicamente gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Poiché nel prodotto cartesiano l'ordine è importante, può essere utile convenire di considerare come **primo insieme A** quello rappresentato sulla semiretta a disposta orizzontalmente ed il **secondo insieme** B sulle semiretta b disposta verticalmente.

Il prodotto cartesiano di due insiemi **A** e **B** può essere visualizzato anche mediante una tabella rettangolare, detta **tabella a doppia entrata**, nella quale:

1) ogni riga è contrassegnata da una sola ascissa

2) ogni ascissa contrassegna una sola riga

3) ogni colonna è contrassegnata da una sola ordinata

4) ogni ordinata contrassegna una sola colonna

5) nell'intersezione della riga contrassegnata con $a \in A$ e della colonna contrassegnata con $b \in B$ si colloca la coppia ordinata (a,b).

L'elemento che contrassegna una determinata riga prende il nome di **indirizzo di riga**,
l'elemento che contrassegna una determinata colonna prende il nome di **indirizzo di colonna**.

	p	**q**
1	$(1, p)$	$(1, q)$
2	$(2, p)$	$(2, q)$
5	$(5, p)$	$(5, q)$

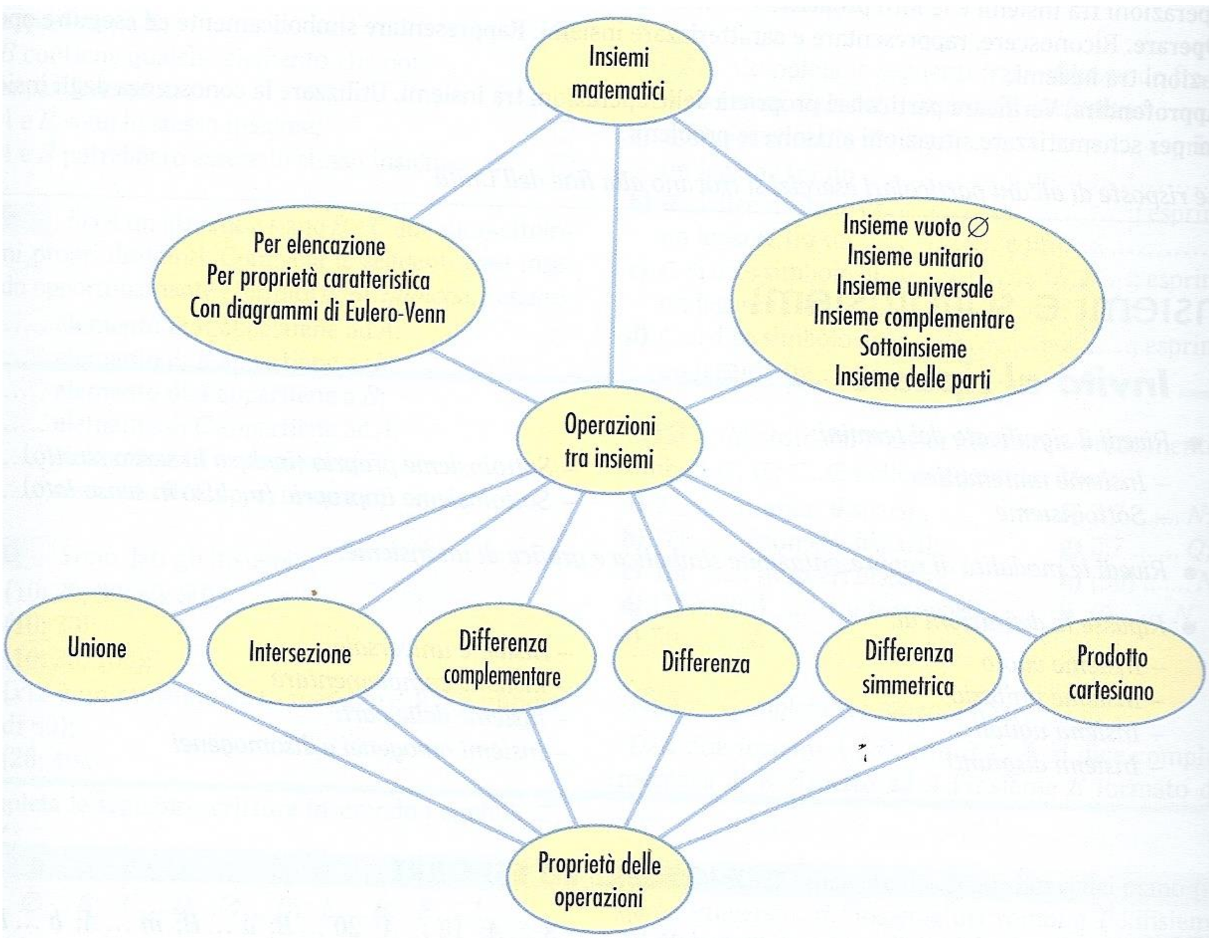
Visualizzazione del **prodotto cartesiano** $A \times B$ mediante una tabella a doppia entrata quando $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{p,q\}$

Prospetto riassuntivo dei simboli finora introdotti.

Simbolo di	*Lettura*	*Significato*
appartenenza $\in$	$a \in \mathbf{A}$ *a* appartiene all'insieme **A**	significa che l'elemento *a* appartiene all'insieme **A**
non appartenenza $\notin$	$b \notin \mathbf{A}$ *b* non appartiene all'insieme **A**	significa che l'elemento *b* non appartiene all'insieme **A**
insieme vuoto $\varnothing$	$\mathbf{A} = \varnothing$ **A** insieme vuoto	significa che l'insieme **A** è privo di elementi
inclusione $\subset$	$\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ l'insieme **B** è incluso in **A**	significa che l'insieme **B** è un sottoinsieme di **A**
intersezione $\cap$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C}$ **A** intersecato **B** uguale a **C**	significa che l'insieme **C** è costituito dagli elementi che appartengono sia ad **A**, sia a **B**
insiemi disgiunti $A \cap B = \varnothing$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$ **A** intersecato **B** uguale a un insieme vuoto	significa che l'intersezione degli insiemi **A** e **B** è un insieme vuoto, cioè i due insiemi non hanno alcun elemento in comune
unione $\cup$	$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{C}$ **A** unito **B** uguale a **C**	significa che l'insieme **C** ha come elementi tutti gli elementi dei due insiemi **A** e **B** e solo quelli; se **A** e **B** hanno elementi comuni, ciascuno di questi figura una sola volta in **C**

Che cosa?	Definito come?	Esempi
Uguaglianza tra insiemi proprietà riflessiva proprietà simmetrica proprietà transitiva	Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi $A = A$ Se $A = B$, allora $B = A$ Se $A = B$ e $B = C$, allora $A = C$	
Sottoinsieme di un insieme Sottoinsieme proprio di un insieme	B è sottoinsieme di A ($B \subseteq A$) se A contiene tutti gli elementi di B B è un sottoinsieme proprio di A ($B \subset A$) se B è un sottoinsieme di A e A non è un sottoinsieme di B	L'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali
Differenza tra insiemi Insieme complementare	La differenza tra A e B è l'insieme $A - B$ che contiene solo gli elementi di A che non appartengono anche a B Il complementare $\overline{A}$ di un insieme A contiene tutti gli elementi dell'insieme universo che non appartengono ad A	$\{1, 2, 3, 7, 9\} - \{1, 2, 3\} = \{7, 9\}$ Il complementare rispetto a $\mathcal{N}$ dell'insieme dei numeri pari è l'insieme dei numeri dispari
Unione di insiemi Proprietà commutativa Proprietà associativa	L'unione di A e B è l'insieme $A \cup B$ i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B $A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	 $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 8, 9\} = \{4, 8, 9\} \cup \{1, 2, 3\}$ $(\{1, 2, 3\} \cup \{4, 8, 9\}) \cup \{7, 9\} =$ $= \{1, 2, 3\} \cup (\{4, 8, 9\} \cup \{7, 9\})$
Intersezione di insiemi Proprietà commutativa Proprietà associativa Proprietà distributiva	L'intersezione di A e B è l'insieme $A \cap B$ i cui elementi appartengono sia ad A sia a B $A \cap B = B \cap A$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	 $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$ $(\{1, 4\} \cap \{2, 4\}) \cap \{4\} =$ $= \{1, 4\} \cap (\{2, 4\} \cap \{4\})$ $\{4\} \cap (\{1, 4\} \cup \{2, 4\}) =$ $= (\{4\} \cap \{1, 4\}) \cup (\{4\} \cap \{2, 4\})$
Corrispondenza biunivoca tra insiemi	Tra due insiemi A e B si può stabilire una corrispondenza biunivoca se a ogni elemento di A si può far corrispondere un solo elemento di B e a ogni elemento di B si può far corrispondere un solo elemento di A	Gli insiemi $\{1, 2, 3\}$ e {uno, due, tre} si possono mettere in corrispondenza biunivoca facendo corrispondere (per esempio): 1. a uno 2. a due 3. a tre
Coppia ordinata Uguaglianza tra coppie ordinate	Insieme di due elementi con un ordine $(a, b) = (c, d)$ se e solo se $a = c$ e $b = d$	$(2, 3) \neq (3, 2)$ $(2, 3) = (x, y)$ se e solo se $x = 2$ e $y = 3$
Prodotto cartesiano di due insiemi	$A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con a elemento di A e b elemento di B	$\{1, 2\} \times \{a, b\} =$ $= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

Insiemi e sottoinsiemi. Operazioni tra insiemi



Simbolismo di particolari insiemi numerici

$N = \{0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri **naturali** , zero compreso

$N^* = N_o = \{1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri naturali , zero escluso

$Z = \{\cdots\cdots -3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri **interi** relativi, zero compreso

$Z^* = Z_o = \{\cdots\cdots -3,-2,-1,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri **interi non nulli**

....insieme dei numeri interi relativi , zero escluso

$Z^+ = \{1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$ ....insieme dei numeri interi positivi

$Z^- = \{\cdots\cdots -5,-4,-3,-2,-1\}$ ....insieme dei numeri interi negativi

Q ....insieme dei numeri razionali relativi , zero incluso

$Q^* = Q_o$ ....insieme dei numeri razionali relativi , zero escluso

Q^+ ....insieme dei numeri razionali positivi

Q^- ....insieme dei numeri razionali negativi

R..insieme dei numeri reali relativi , zero compreso

R^+ ....insieme dei numeri reali positivi

R^- ....insieme dei numeri reali negativi

$R - Q$ ....insieme dei numeri irrazionali relativi

C ....insieme dei numeri complessi

Q_a ....insieme dei numeri razionali assoluti , zero compreso

R_a ....insieme dei numeri reali assoluti , zero compreso

$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ ....insieme **R** ampliato

Quindi con **R** intendiamo l'insieme dei numeri reali finiti .

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & Q^+ & \subset & R^+ & & \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

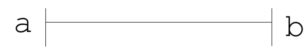
Nei tre insieme **Q** , **R** , **C** sono illimitatamente possibili le 4 operazioni razionali (addizione , sottrazione , moltiplicazione , divisione) . Per questa notevole proprietà si dice che ciascuno dei tre insiemi numerici costituisce un **campo numerico** .

I concetti di costante e di variabile

Nello studio di determinati problemi assumono particolare importanza i concetti di **costante** e di **variabile**. Definiamo **variabile** (numerica) in un dato insieme (numerico) **A** una lettera (ad esempio **x**) o un qualsiasi altro simbolo atto a rappresentare un elemento (numero) qualsiasi dell'insieme (numerico) **A**. Definiamo **costante** (numerica) in un dato insieme (numerico) **A** una lettera (ad esempio a) o qualsiasi altro segno atto a rappresentare un ben determinato elemento (numero) dell'insieme (numerico) **A**. Di solito riserviamo alle costanti le prime lettere dell'**alfabeto latino** (a , b, c, d,...) ed alle variabili le ultime lettere dell'**alfabeto latino** (x, y, z, u, v,...).

In particolare parleremo di **variabile intera** se $x \in Z$, di **variabile razionale** se $x \in Q$, di **variabile reale** se $x \in R$, di **variabile complessa** se $x \in C$.

Concetto di intervallo

Detti **a** e **b** due qualsiasi numeri reali con $a < b$, definiamo **intervallo limitato e chiuso** di estremi **a** e **b** il seguente insieme numerico: 

$[a,b] = \{x : x \in R \wedge a \le x \le b\}$ = **intervallo limitato e chiuso** di estremi **a** e **b**

a è detto **estremo inferiore** (o **estremo sinistro**), **b** **estremo superiore** (o **estremo destro**), $b - a$ **ampiezza dell'intervallo**, $\frac{b-a}{2}$ **raggio dell'intervallo**, $\frac{a+b}{2}$ **centro** dell'intervallo. Un intervallo limitato e chiuso ha la seguente immagine geometrica:

Se **a** o **b** oppure entrambi non appartengono all'intervallo, allora questi dicesi **aperto**, in particolare abbiamo:

$[a,b[= \{x : x \in R \wedge a \le x < b\}$ = intervallo limitato, chiuso a sinistra ed aperto a destra

$]a,b] = \{x : x \in R \wedge a < x \le b\}$ = **intervallo limitato, chiuso a destra ed aperto a sinistra**

$]a,b[= \{x : x \in R \wedge a < x < b\}$ = **intervallo limitato aperto** 

L'**immagine geometrica** di un intervallo limitato è un segmento. Esistono anche **intervalli illimitati** per i quali **a** o **b** o entrambi assumono valore infinito.

$[a,+\infty[= \{x : x \in R \wedge x \ge a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente) e **chiuso a sinistra** (o di estremo inferiore a)

$]a,+\infty[= \{x : x \in R \wedge x > a\}$ = **intervallo illimitato a destra** (o illimitato superiormente) **ed aperto a sinistra** (o di estremo inferiore a) 

$[-\infty,a] = \{x : x \in R \wedge x \le a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente) **e chiuso a destra** (o di estremo superiore a)

$[-\infty, a[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x < a\}$ = **intervallo illimitato a sinistra** (o illimitato inferiormente) **e aperto a destra** (o di estremo superiore a)

L'immagine geometrica di uno di questi intervalli illimitati è una semiretta.

$R = \ ]-\infty, +\infty[\ = \{x : x \in R\}$ = **intervallo illimitato**

La sua immagine geometrica è l'intera retta

$R^+ = \ ]0, +\infty[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x > 0\}$

$R^- = \ ]-\infty, 0[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x < 0\}$

Concetto di intorno

■ Si definisce **intorno completo del punto** $x_o \in R$ e si denota col simbolo $I(x_o)$, un qualunque intervallo $]a, b[\ = \ ]x_o - \delta_1, x_o + \delta_2[$ che abbia x_o al suo interno.

$$I(x_o) = \ ]a, b[\ = \ ]x_o - \delta_1, x_o + \delta_2[\qquad \forall \delta_1, \delta_2 \in R^+$$

Per $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 = 0$ otteniamo l'**intorno sinistro**: $I^-(x_o) = \ ]x_o - \delta_1, x_o[\quad \forall \delta_1 \in R^+$

Per $\delta_2 > 0$ e $\delta_1 = 0$ otteniamo l'**intorno destro**: $I^+(x_o) = \ ]x_o, x_o + \delta_2[\quad \forall \delta_2 \in R^+$

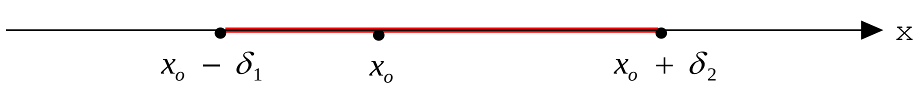


Immagine geometrica di un **intorno completo**

Per $\delta_1 = \delta_2 = \delta > 0$ abbiamo l'**intorno circolare di centro** x_o **e raggio** $\delta \in R^+$, o **intorno simmetrico del punto** x_o.

$$I(x_o) = \ ]x_o - \delta, x_o + \delta[\ = \{x : x \in R \ \wedge \ x_o - \delta < x < x_o + \delta\} \qquad \forall \delta \in R^+$$

L'insieme $\mathcal{J}(x_o, \delta)$ è soluzione della inequazione $|x - x_o| < \delta \in R^+$.

Quest'ultimo è il modo in cui talvolta viene indicato **un intorno circolare** di x_o.

Se si vuole escludere dall'intorno il punto x_o stesso, si scrive:

$$0 < |x - x_o| < \delta \in R^+$$

Immagine geometrica di intorno simmetrico

Dicesi **intorno di più infinito** un qualsiasi intervallo aperto a sinistra ed illimitato superiormente:

$$I(+\infty) =]h,+\infty[= \{ x : x \in R \wedge x > h \} \qquad \forall\, h \in R$$

Dicesi **intorno di meno infinito** un qualsiasi intervallo aperto a destra ed illimitato inferiormente:

$$I(-\infty) =]-\infty, k[= \{ x : x \in R \wedge x < k \} \qquad \forall\, k \in R$$

Definiamo **intorno di infinito** l'unione dell'intorno di $-\infty$ e dell'intorno di $+\infty$

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty, k[\cup]h, +\infty[\qquad \forall\, h, k\, R$$

Spesso è utile considerare il seguente **intorno simmetrico di ∞**:

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty, -k[\cup]k, +\infty[\qquad \forall\, k \in R^+$$

$$I(\infty) = \{ x : x \in R \wedge |x| > k \} \qquad \forall\, k \in R^+$$

Inequazioni razionali intere di primo grado ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle seguenti forme:

$$ax > b \qquad ax < b$$

Per risolvere una inequazione di primo grado ridotta a forma canonica basta dividere ambo i membri per **a**, ricordando di cambiare il senso dell'inequazione se è $a < 0$.

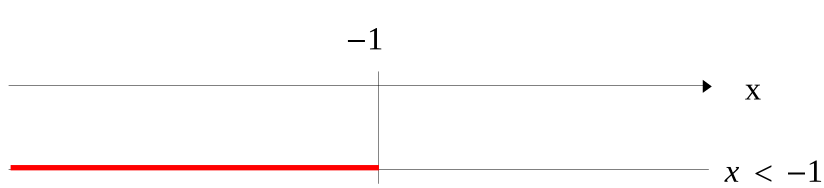
$$ax > b \quad \Rightarrow \quad x > \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a > 0 \quad , \quad x < \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a < 0$$

$$ax < b \quad \Rightarrow \quad x < \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a > 0 \quad , \quad x > \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a < 0$$

ESEMPI

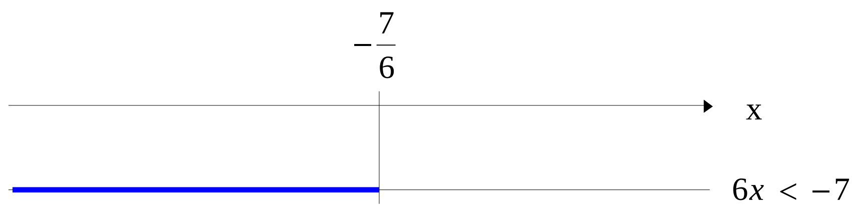
$$\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3} \qquad \text{per} \qquad x < -1$$

$$6 - 3x - 12 - 6x > 6x + 21 - 8x - 20 \quad ; \quad -7x > 7 \quad , \ 7x < -7 \quad ; \quad x < -1$$



$(x+1)^3 + 3x + 3 < x^3 + 3(x+1)(x-1)$ per $x < -\dfrac{7}{6}$

$$\cancel{x^3} + \cancel{3x^2} + 3x + 1 + 3x + 3 < \cancel{x^3} + \cancel{3x^2} - 3 \quad , \quad 6x < -7 \quad , \quad x < -\frac{7}{6}$$



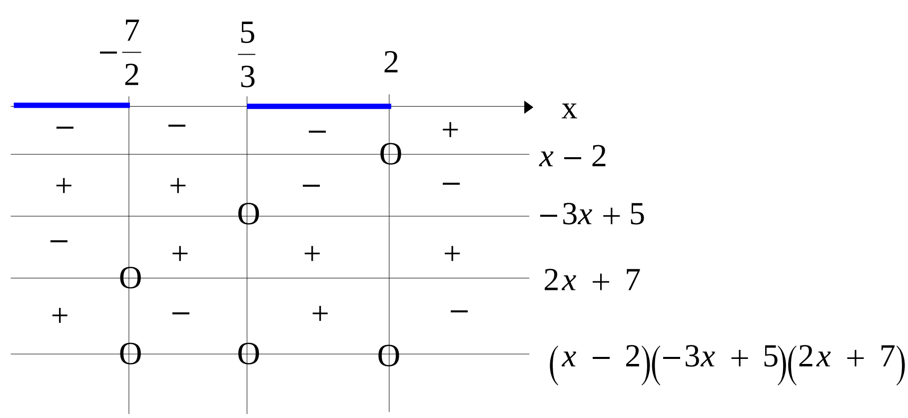
Attraverso lo studio del segno di un binomio di primo grado è possibile risolvere inequazioni di grado superiore al primo. Naturalmente il primo membro dell'inequazione ridotta a forma canonica deve essere decomposto in fattori di primo grado.

IL **segno** del binomio di primo grado $ax + b$ coincide col segno di **a** alla destra dello zero del binomio. Questo significa che il segno del binomio di primo grado $ax + b$ coincide col segno di **a** per valori della x maggiori dello zero del binomio $ax + b$.

$-6x^3 + x^2 + 57x - 70 > 0$ $\quad (x-2)(-3x+5)(2x+7) > 0$ per $x < -\dfrac{7}{2}$ e $\dfrac{5}{3} < x < 2$

Si calcolano gli **zeri** dei tre fattori di primo grado e si compila il seguente prospetto .

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad -3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad , \; 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$



Segno di un trinomio di secondo grado ad una incognita

Consideriamo un trinomio di secondo grado nella variabile x: $T(x) = ax^2 + bx + c$ **[5]**

con a, b, c numeri reali relativi costanti (cioè numeri dati indipendenti da x) ed $a \neq 0$.

Col simbolo $T(\alpha)$ intendiamo il numero che si ottiene quando nella [5] al posto della x poniamo α cioè il valore numerico che assume il trinomio per $x = \alpha$.

Se poniamo: $ax^2 + bx + c = 0$ **[6]**

otteniamo una equazione di secondo grado in **x** (detta **equazione associata al trinomio**) le cui radici x_1 ed x_2 si chiamano **zeri** del trinomio. Per convenzione poniamo $x_1 < x_2$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ = **DISCRIMINANTE** del trinomio **[7]**

01) $\Delta > 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e distinti**

02) $\Delta = 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e coincidenti** $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

03) $\Delta < 0$: **il trinomio ammette due zeri complessi e coniugati**, il trinomio non si annulla mai $\forall\, x \in R$.

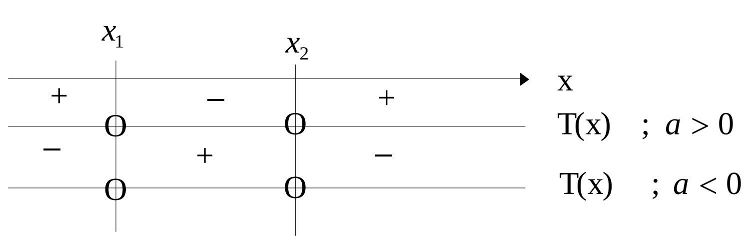
L'intervallo limitato ed aperto $]x_1, x_2[$ è detto **intervallo delle radici**.

Se $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ diciamo che la variabile x assume **valori esterni all'intervallo delle radici**. Dall'algebra sappiamo che: $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ **[8]**

Studiare il segno del trinomio significa stabilire per quali valori della variabile x esso assume valori positivi, negativi, nulli. Dobbiamo distinguere tre casi:

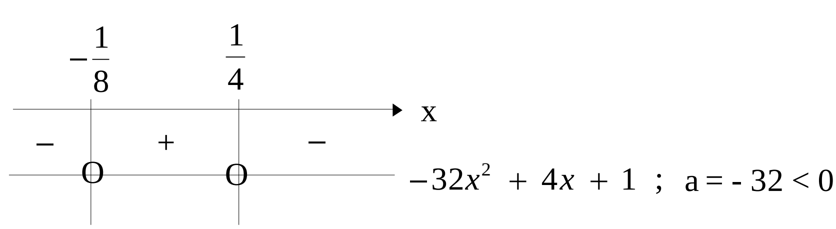
01) $\Delta > 0$ **Il trinomio assume lo stesso segno di a per valori della x esterni all'intervallo delle radici, segno opposto ad a per valori della x interni all'intervallo delle radici.**

Sinteticamente possiamo scrivere:



Studiare il segno del trinomio $T(x) = -32x^2 + 4x + 1$

L'equazione associata al trinomio è: $32x^2 - 4x - 1 = 0$, $x_1 = -\dfrac{1}{8}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$ (zeri del trinomio)



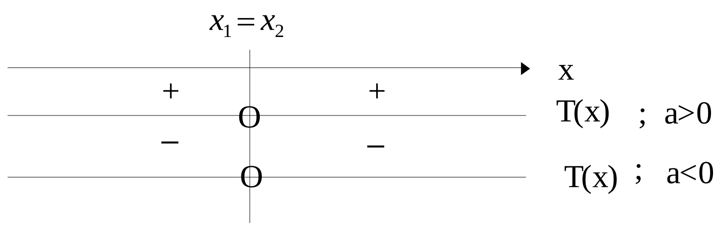
$T(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \left]-\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right[$ (cioè per $-\dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{4}$]

$T(x) < 0 \qquad \forall\, x \in \left]-\infty, -\frac{1}{8}\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\qquad$ (cioè per $x < -\frac{1}{8}$ ed $x > \frac{1}{4}$]

$T(x) = 0 \qquad$ per $x = -\frac{1}{8}$ ed $x = \frac{1}{4}$

02) $\Delta = 0$: **il trinomio assume sempre lo stesso segno di a e si annulla per** $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Quindi il segno di **T(x)** coincide col segno di **a** , tranne che per $x = x_1$ in corrispondenza del quale il trinomio si annulla.

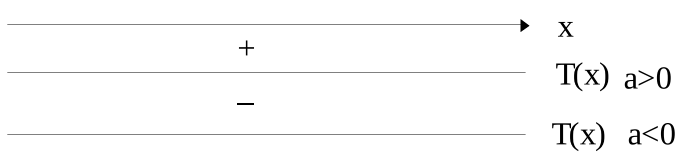


Studiare il segno del trinomio $T(x) = -4x^2 + 12x - 9 = 0$

$$\Delta = 0 \ , \ a = -4 < 0 \ , \ x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$$

$T(x) > 0 \quad \forall\, x \in \varnothing \qquad , \qquad T(x) < 0 \quad \forall\, x \neq \frac{3}{2} \qquad , \qquad T(x) = 0 \quad$ per $x = \frac{3}{2}$

03) $\Delta < 0$ **Il trinomio assume sempre lo stesso segno di a**.



Studiare il segno del trinomio $T(x) = 4x^2 - 12x + 1$

$\Delta < 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad T(x) > 0 \quad \forall\, x \in R \quad , \quad T(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \varnothing$

Inequazioni razionali intere di secondo grado

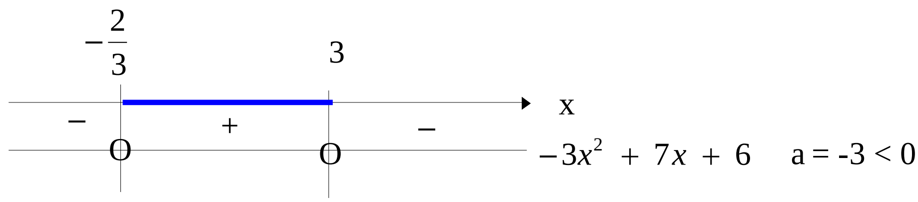
Sono inequazioni riconducibili ad una delle due seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad\qquad ax^2 + bx + c < 0$$

Per risolvere una inequazione di secondo grado ad una incognita ridotta a forma canonica basta ricordare le proprietà del segno del trinomio.

$-3x^2 + 7x + 6 > 0 \qquad \forall\, x \in \left]-\frac{2}{3}, 3\right[\qquad (-\frac{2}{3} < x < 3\ )$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \; , \; x_1 = -\frac{2}{3} \; , \; x_2 = 3$$



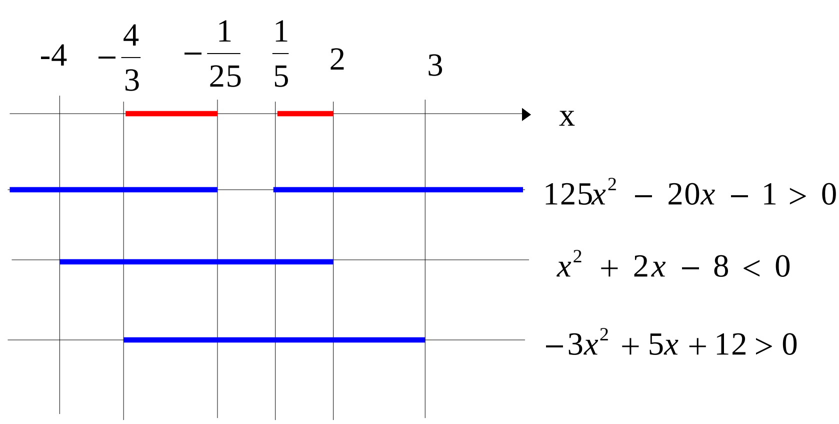
Sistemi di inequazioni in una incognita

Dicesi **sistema di inequazioni in una incognita** l’insieme di due o più incognite di cui vogliamo trovare, quando esistono, le soluzioni comuni. Un sistema di inequazioni dicesi **possibile** se ammette soluzioni, **impossibile** se non ammette soluzioni. In quest’ultimo caso le inequazioni che compongono il sistema sono fra loro **incompatibili**.

Per risolvere un sistema di inequazioni si procede come segue:

- si trovano le soluzioni di tutte le inequazioni che compongono il sistema. Come sappiamo tali soluzioni sono intervalli numerici
- L‘intervallo o gli intervalli numerici comuni a tutti gli intervalli precedentemente trovati sono le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} 125x^2 - 20x - 1 > 0 & per \quad x < -\frac{1}{25} \; e \; x > \frac{1}{5} \\ x^2 + 2x - 8 < 0 & per \quad -4 < x < 2 \\ -3x^2 + 5x + 12 > 0 & per \quad -\frac{4}{3} < x < 3 \end{cases}$$



(*)

(*) Gli intervalli soluzioni delle singole inequazioni vengono messi in evidenza mediante linee continue colorate serpentine. Le linee continue colorate disegnate sull’asse orientato ci dicono quali sono le soluzioni del sistema dato.

Il sistema dato è verificato per $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{25}$ e $\frac{1}{5} < x < 2$ cioè $\forall x \in \left]-\frac{4}{3},-\frac{1}{25}\right[\cup \left]\frac{1}{5},2\right[$

Inequazioni razionali fratte ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle due seguenti forme:

[1] $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ **[2]** con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi in x .

Per risolvere queste inequazioni bisogna scartare i valori della x che annullano il denominatore $B(x)$, cioè bisogna porre: $B(x) \neq 0$.

Le soluzioni dell'inequazione $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi :

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'inequazione $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

Nella pratica, però, conviene risolvere una inequazione frazionaria attraverso lo studio del segno dei **fattori di primo e di secondo grado** in cui possono essere decomposti i polinomi **A(x)** e **B(x)**.

I seguenti esempi serviranno a chiarire quanto detto.

$\frac{2(7-x)(3x^2+4x-15)}{3(-2x^2+3x+2)} > 0$ per $-3 < x < -\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3} < x < 2$, $x > 7$

$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$, $3x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad x = \frac{5}{3}$

$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$

x		-3		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		2		7	
$7-x$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	
$3x^2+4x-15$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-2x^2+3x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\dfrac{2(7-x)(3x^2+4x-15)}{3(-2x^2+3x+2)}$	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$

Elementi di logica matematica

Molte grammatiche definiscono la **proposizione** come "**un giudizio della mente espresso con parole**", cioè da un punto di vista grammaticale la parola proposizione sta ad indicare l'espressione di un pensiero compiuto, formato da almeno un soggetto e da un predicato (cui possono fare eventualmente seguito alcuni complementi). La *logica matematica* respinge questa definizione e per la logica matematica la **proposizione** è una combinazione di parole o di simboli a cui compete uno solo dei seguenti attributi: **vero** o **falso**. Tali attributi saranno simbolicamente indicati con le lettere **V, F**.

Definizione: Nella logica matematica si definisce **proposizione** una frase per la quale si può stabilire se è vera o se è falsa. << Roma è una città bella >> non rappresenta una *proposizione* in quanto non possiamo stabilire se la circostanza è vera o falsa. Rappresenteremo le nostre proposizioni mediante lettere, ad esempio **p, q,**. La terra è un pianeta è una **proposizione vera**, la luna è una stella è una **proposizione falsa**.

Definizione: Si chiama **variabile logica** ogni lettera utilizzata al posto di una proposizione.

Definizione: Se la proposizione **p** è vera, diremo che il valore di verità di **p** è **V** o anche che il valore di verità di **p** è 1. Se la proposizione **q** è falsa, diremo che il valore di verità di **q** è **F** o anche che il valore di verità di **q** è 0 .

La logica formale alla quale intendiamo riferirci si occupa unicamente di quelle proposizioni alle quali compete uno ed uno solo degli attributi **vero** o **falso**. Si tratta di una **logica bivalente**. In tale logica sussistono ancora i **principi fondamentali della logica aristotelica**, che sono: **(1)** il **principio di identità** secondo il quale ogni oggetto del pensiero logico è identico a se stesso e a nessun altro oggetto **(2)** il **principio di non contraddizione** secondo il quale una proposizione non può essere sia vera che falsa **(3)** il **principio del terzo escluso** (**tertium non datur**) secondo il quale i valori di verità di una proposizione sono soltanto due e sono il **vero** o il **falso** non potendo esistere un terzo valore di verità.

Definizione: Una proposizione si dice **semplice** o **atomica** o **elementare** se non può essere scomposta in proposizioni più semplici; altrimenti si dice **composta** o **molecolare**.

La parte della logica che si occupa delle operazioni con le proposizioni prende il nome di **calcolo delle proposizioni** o **logica delle proposizioni.**

Le tavole di verità

Attribuire un **valore di verità** ad una singola particolare proposizione significa affermare che essa è vera oppure falsa. Se invece consideriamo una proposizione generica **A**, dobbiamo esaminare i casi possibili: **A** è vera, oppure **A** è falsa. In questo caso usiamo una tabella, chiamata tavola di verità formata da una colonna perché la proposizione esaminata è una. Se le proposizioni da analizzare sono due, A e B, si possono presentare i seguenti quattro casi: sono entrambe vere, la prima è vera e la seconda è falsa, la prima è falsa e la seconda è vera, sono entrambe false. Se le proposizioni sono tre, A, B, C si presentano $2^3 = 8$ casi. Se le proposizioni presi in considerazione sono n allora i casi possibili sono 2^n.

A
V
F

A	*B*
V	*V*
V	*F*
F	*V*
F	*F*

A	*B*	*C*
V	*V*	*V*
V	*V*	*F*
V	*F*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*
F	*F*	*F*

I connettivi logici

Abbiamo visto che si possono eseguire operazioni con gli insiemi. Anche con le proposizioni si possono eseguire operazioni: due o più proposizioni si possono connettere tra loro mediante opportuni connettivi in modo da ottenere una nuova proposizioni. Ad ognuno di questi connettivi corrisponde un’operazione elementare. Mediante uno di questi connettivi a due proposizioni date in un certo ordine corrisponde una terza nuova proposizione.

Definizione: Nella logica matematica, due proposizioni **p**, **q** possono essere unite mediante opportune particelle dette **connettivi** o **operatori logici** per formare una nuova proposizione.

Il connettivo $\wedge$, cioè la congiunzione logica

Si definisce **congiunzione** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \wedge q$ (si legge p e q oppure p et q) la proposizione composta che è vera se **p** e **q** sono contemporaneamente vere, mentre è falsa in ogni altro caso.

La tavola di verità della proposizione composta $p \wedge q$.

La prima riga della tavola si legge: "Se p è vera, se q è vera , allora $p \wedge q$ è vera." La seconda riga si legge: "Se p è vera, se q è falsa , allora $p \wedge q$ è falsa."

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Il connettivo $\vee$, cioè la disgiunzione inclusiva

Si definisce **disgiunzione inclusiva** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \vee q$ (si legge "**p** o **q**" ed anche "**p** vel **q**") la proposizione composta che è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, ed è falsa se entrambe le proposizioni sono false.

La tavola di verità della proposizione composta $p \vee q$ è:

p	q	$p \vee q$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il connettivo $\dot{\vee}$, cioè la disgiunzione esclusiva

Si definisce **disgiunzione esclusiva** di due proposizioni **p** e **q** e si indica col simbolo $p \dot{\vee} q$ (si legge "**p** o **q**" ed anche "**p** aut **q**") la proposizione composta che è vera se una soltanto delle due proposizioni è vera, falsa in tutti gli altri casi.

La tavola di verità della proposizione composta $p \dot{\vee} q$ è:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	*V*	*F*
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il connettivo di negazione $\neg$

La negazione di una proposizione **p**, che si indica col simbolo $\neg$ (oppure con $\overline{p}$) è la proposizione che è vera se p è falsa ed è falsa se p è vera.

p	¬p	¬(¬p)
V	F	V
F	V	F

L'implicazione materiale

Si definisce **implicazione materiale** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \to q$ (si legge "se **p**….allora **q**" oppure " **p** implica **q**") la proposizione che risulta falsa se solo se **p** è vera e **q** è falsa. In tutti gli altri casi è vera.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \to B$
V	V	*F*	V	V
V	F	F	*F*	F
F	V	V	*V*	*V*
F	F	V	V	V

Coimplicazione materiale

Si definisce **coimplicazione materiale** di due proposizioni p e q e si indica col simbolo $p \leftrightarrow q$ (si legge "**p se e solo se q**, oppure **p** ***coimplica q***") la proposizione che è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità ed è falsa in caso contrario.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	*F*
F	F	V

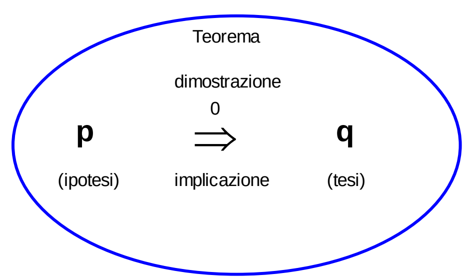
A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La doppia implicazione equivale alla congiunzione di delle due implicazioni $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$, come si vede dalla tavola di verità. I valori di verità $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ coincidono con i valori $A \leftrightarrow B$.

Deduzione logica

Un importantissimo concetto fondamentale è quello di **deduzione o implicazione logica**. Se p e q sono due proposizioni, se dalla verità di p deduciamo, attraverso ragionamenti logici, la verità di q, diciamo che p implica q e scriviamo $p \Rightarrow q$ e questo procedimento del ragionamento logico matematico si chiama **implicazione** o **deduzione logica**. La proposizione p si chiama **ipotesi**, la proposizione q si chiama **tesi**, il ragionamento che ci permette di passare dalla verità di p alla verità di q si chiama **dimostrazione**.

Il simbolo $\Rightarrow$ si dice simbolo di **implicazione logica**. **Ipotesi**, **dimostrazione** e **tesi** costituisco il teorema come risulta dallo schema realizzato nella figura accanto.



A volte succede che si verifichino contemporaneamente le due seguenti implicazioni:

$$p \Rightarrow q \quad \text{e} \quad q \Rightarrow p$$

In tal caso si dice che le proposizioni p e q sono logicamente equivalenti e si scrive $p \Leftrightarrow q$

Quando una **proposizione q** è la conseguenza di una **proposizione p** si dice che **p** implica **q** *e si scrive:* $p \Rightarrow q$ (p implica **q**). Questa scrittura vuole dire che << se è vera la proposizione **p** è vera anche la proposizione **q** >>: **p** dicesi **premessa** o ipotesi, **q** **conseguenza** o tesi.

In matematica ogni teorema del tipo: << **p è condizione sufficiente per q** >> oppure, ed è la stessa cosa, << **q è condizione necessaria *per* p** >> si può esprimere semplicemente scrivendo:

$p \Rightarrow q$, cioè ogni **teorema** avente **p** come **ipotesi** e **q** come **tesi** si esprime dicendo che **p** è condizione sufficiente per **q**, mentre **q è condizione necessaria per p** .

Quando l'implicazione $p \Rightarrow q$ è vera si dice che è un TEOREMA, **p** si chiama **ipotesi**, **q** **tesi**.

Quindi, in ogni teorema la verità dell'ipotesi è **condizione sufficiente** per la verità della tesi, mentre la verità della tesi è **condizione necessaria** (ma in generale non sufficiente) per la verità dell'ipotesi; cioè **una condizione sufficiente va posta come ipotesi, una condizione necessaria come tesi**. Il segno $\Rightarrow$ rappresenta il simbolo di **implicazione logica**. Il simbolo $\not\Rightarrow$ si legge <<**non implica**>>. Se è vera l'implicazione $p \Rightarrow q$ non è detto che debba risultare vera l'implicazione inversa $q \Rightarrow p$.

Esempio: $\text{Paolo è torinese} \Rightarrow \text{Paolo è italiano}$, mentre $\text{Paolo è italiano} \not\Rightarrow \text{Paolo è torinese}$.

Se **p** e **q** sono due proposizioni per le quali risulta contemporaneamente $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ allora diremo che le proposizioni **p** e **q** sono equivalenti e scriviamo: $p \Leftrightarrow q$ e leggiamo:

<< **p equivale logicamente a q** >> oppure più semplicemente <<**p equivale a q** >> oppure <<**p coimplica q** >>.

$\Leftrightarrow$ simbolo di **equivalenza logica** o di *doppia implicazione* o di **coimplicazione**

si legg : << *equivale logicamente* oppure **coimplica** >> $\not\Leftrightarrow$ non equivale a

In matematica, ogni teorema del tipo << **p è condizione necessaria e sufficiente perché valga q** >> si può esprimere semplicemente scrivendo: $p \Leftrightarrow q$

La coesistenza di un teorema e del suo inverso determina le cosiddette **condizioni necessarie e sufficienti**. Precisamente una **condizione C**, rispetto ad una proprietà **P** si dice che è:

1) necessaria quando considerando **P** come ipotesi si deduce **C** come tesi

2) sufficiente quando considerando **C** come ipotesi si deduce **P** come tesi

Le tautologie

Definizione: Una proposizione composta è una **tautologia** se risulta **sempre vera**, qualunque valore di verità si attribuisce alle proposizioni elementari di cui è composta.

La formula $(p \wedge q) \wedge \rightarrow p$ è una tautologia, come si verifica costruendo la seguente tavola di verità:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Come si vede, qualunque sia il valore di verità attribuito alle lettere p e q, la formula $(p \wedge q) \wedge \rightarrow p$ risulta sempre vera.

Le contraddizioni

Definizione: Una proposizione composta è una **contraddizione** se risulta **sempre falsa**, qualunque valore di verità si attribuisce alle proposizioni elementari di cui è composta.

La proposizione "11 è un numero primo ed ha 3 divisori" è una contraddizione. Infatti essa può essere così formalizzata: $p \wedge \overline{p}$ ed equivale all'affermazione " 11 è un numero primo e non lo è".

Verifichiamo che la proposizione $p \wedge \overline{p}$ è una contraddizione, cioè che è sempre falsa, attraverso la seguente tavola di verità:

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
V	F	F
F	V	F

Le proprietà formali delle operazioni logiche

Proprietà di idempotenza: $p \wedge p = p \qquad p \vee p = p$

Proprietà commutativa: $p \wedge q = q \wedge p \qquad p \vee q = q \vee p \qquad p \dot{\vee} q = q \dot{\vee} p$

Proprietà associativa: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

$$(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r = p \dot{\vee} (q \dot{\vee} r)$$

Proprietà distributiva: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Proprietà della doppia negazione: $\neg(\neg p) = \overline{\overline{p}} = p$

Proprietà della negazione: $p \wedge \overline{p} = F \qquad p \vee \overline{p} = V$

Leggi di assorbimento: $p \wedge (p \vee q) = p \qquad p \vee (p \wedge q) = p$

Prima legge di De Morgan: $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$ ed anche $\overline{(p \wedge q)} = \overline{p} \vee \overline{q}$

La negazione della congiunzione di due proposizioni è equivalente alla disgiunzione inclusiva delle negazioni delle due proposizioni.

Seconda legge di De Morgan: $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ ed anche $\overline{(p \vee q)} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

La negazione della disgiunzione inclusiva di due proposizioni è equivalente alla congiunzione delle negazioni delle due proposizioni.

I ragionamenti logici

Per **ragionamento logico** o **inferenza deduttiva** intendiamo un procedimento attraverso il quale, a partire da una o più proposizioni vere, le **premesse**, otteniamo una o più proposizioni altrettanto vere, le **conclusioni**. Un esempio di ragionamento logico usato di solito in matematica è la dimostrazione di un teorema.

Un ragionamento è **valido** se ci assicura che da premesse vere giungiamo ad una conclusione vera. In questo caso esso prende il nome di **deduzione logica**.

Esistono diverso forme di deduzione logica; noi ne analizziamo due: il **modus ponens** ed il **modus tollens**.

Modus ponens

Lo schema di un ragionamento che utilizza il **modus ponens** è il seguente: $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

Se sono vere le proposizioni $p \to q$ e p allora è vera anche la proposizione q.

“Se studio apprendo ($p \to q$) e studio (p), dunque apprendo (q).

Regola fondamentale di inferenza: ogni qualvolta un'implicazione $p \to q$ è vera ed anche p è accettata come vera, dobbiamo accettare come vera la proposizione q, cioè la conclusione.

Modus tollens

Lo schema di un ragionamento che utilizza il **modus tollens** è il seguente: $(p \to q) \wedge \overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

Se è vera la proposizione $p \to q$ ed è vera la negazione di p, cioè $\overline{p}$, allora deve essere vera anche la negazione della proposizione q, cioè deve essere vera $\overline{q}$.

"Se ho sete bevo ($p \rightarrow q$) ma non bevo ($\overline{p}$) quindi n on ho sete ($\overline{q}$).

L'implicazione materiale e la deduzione logica

Il simbolo $\Rightarrow$ che abbiamo utilizzato per la deduzione logica non deve essere confuso col simbolo $\rightarrow$ dell'implicazione materiale, in quanto la deduzione logica indica un ragionamento mentre l'implicazione materiale è un connettivo.

L'**implicazione materiale** "se p allora q" è un connettivo logico che ci consente di costruire una nuova proposizione a partire da due proposizioni p e q. La verità della nuova proposizione dipende soltanto dai valori di verità delle proposizioni che la compongono. L'**implicazione logica** indica che bisogna effettuare una serie di ragionamenti che partendo dalla verità della premessa si deduce la verità della conclusione.

Metodi di dimostrazione di un teorema

Per dimostrare un teorema si utilizzano due tipi di ragionamento: il **metodo diretto** o il **metodo indiretto**, detto anche **ragionamento per assurdo**.

Metodo diretto: La **dimostrazione col metodo diretto** si realizza attraverso una successione di ragionamenti che partendo dalle verità dell'ipotesi (I), si perviene alla verità della tesi (T).

Metodo indiretto o per assurdo: Il **metodo indiretto** o **ragionamento per assurdo** consiste nel supporre falsa la tesi ($\overline{T}$) e nel dimostrare, attraverso una successioni di ragionamenti corretti, che anche l'ipotesi è falsa ($\overline{I}$). Ma l'ipotesi di un teorema è sempre vera e non può essere negata e quindi la tesi non può essere falsa. Se la tesi non può essere negata è vera ed il teorema è dimostrato.

Definizione: Si definisce **predicato** o **enunciato aperto** un'affermazione contenente una o più variabili che diviene una proposizione dopo avere sostituito dei valori (scelti in un insieme universo U) alle variabili.

Considero la proposizione " -6 **è un numero negativo**". A tale proposizione possiamo attribuire soltanto il valore "**vero**". Consideriamo l'affermazione "**x è un numero negativo**". La lettera x rappresenta una variabile alla quale possiamo attribuire un determinato valore scelto in un insieme universo, che può essere l'insieme $\mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{R}$ o un qualsiasi altro insieme. A differenza della proposizione precedente non possiamo dire se è vero o è falso. Per questo motivo tale affermazione prende il nome di **predicato** o **enunciato aperto**. Le scrittura del tipo $A(x)$. $B(x,y)$, $C(x,y,z)$ stanno ad indicare predicati ad una, due, tre variabili.

Definizione: Un predicato in una o più variabili è **soddisfatto da certi valori delle variabili** se tali valori lo trasformano in una proposizione vera. E' evidente che ad ogni predicato $A(x)$, definito in un insieme universo U, è associato un sottoinsieme di U i cui elementi soddisfano $A(x)$.

Definizione: Per **insieme verità** di un predicato si intende un sottoinsieme dell'insieme universo U contenente tutti i possibili valori che soddisfano il predicato. Quindi si chiama **insieme verità** di un enunciato aperto ad una variabile l'insieme di tutti i valori scelti in un insieme universo U che, sostituiti nella variabile, trasformano il predicato in una proposizione vera.

Esempio: Consideriamo il predicato $P(x)$:"x è divisore di 256", con $x \in \mathbb{N}$

L'insieme dei divisori di 256 è: $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$

P è l'insieme verità del predicato $P(x)$, cioè la totalità dei valori della x che soddisfano $P(x)$. Tale insieme, scritto in forma compatta, diventa: $P = \{x \in \mathbb{N} : P(x)\}$.

Condizione necessaria e sufficiente

- La verità dell'implicazione $p(x) \Rightarrow q(x)$ si può esprimere dicendo che la verità di $q(x)$ è **condizione necessaria** perché $p(x)$ sia vera.

- La verità dell'implicazione $p(x) \Rightarrow q(x)$ si può esprimere dicendo che la verità di $p(x)$ è **condizione sufficiente** perché $q(x)$ sia vera.

- La verità della doppia implicazione $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ si esprime dicendo che **condizione necessaria** e **sufficiente** perché $p(x)$ e che sia vera $q(x)$, oppure che **condizione necessaria** e **sufficiente** perché $q(x)$ e che sia vera $p(x)$.

Osservazione: Occorre non confondere i simboli $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ con i simboli $\Rightarrow$ ed $\Leftrightarrow$. I primi indicano l'implicazione e la coimplicazione materiale. Sono quindi dei connettivi logici che consentono di costruire un nuovo predicato, partendo da due predicati. I secondi simboli si riferiscono alla implicazione logica ed alla equivalenza logica. Non sono dei connettivi ma dei simboli di relazioni tra predicati. Le scritture $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ non indicano dei nuovi predicati, bensì affermano che tra i predicati $p(x)$ e $q(x)$ valgono determinare relazioni.

Unità Didattica N°02

I concetti fondamentali dell’aritmetica

Il concetto di potenza

La potenza di un numero è il prodotto di più fattori uguali a quel numero.

Il fattore che si ripete si chiama **base della potenza** ed il numero di fattori uguali prende il nome di **esponente della potenza**. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ volte}}$

L'operazione mediante la quale si calcola la potenza di un numero prende il nome di **elevazione a potenza**.

- La potenza con esponente zero di un numero qualsiasi diverso da zero è sempre uguale ad 1 :

$$a^0 = 1 \quad \forall\, a \neq 0$$

- La prima potenza (o potenza con esponente 1) di un qualsiasi numero è uguale al numero stesso

$$a^1 = a$$

Proprietà delle potenze

- **Il prodotto di due o più potenze aventi la stessa base è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti** $a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{n+p+q}$

- **Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti** $a^m : a^n = a^{m-n}$

- **La potenza di una potenza è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti** $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

- **La potenza di un prodotto di fattori è uguale al prodotto delle potenze con uguale esponente dei singoli fattori** $\left(a \cdot b \cdot c \cdot d\right)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$

- **La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze con uguale esponente del dividendo e del divisore** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

La nozione di radice aritmetica

- Si dice **radice quadrata** di un numero a il numero x che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato a. In simboli abbiamo: $\sqrt{a} = x \iff x^2 = a$ $\sqrt{9} = 3$ in quanto $3^2 = 9$
- Si dice **radice cubica** di un numero a il numero x che elevato al cubo dà come risultato il numero dato **a**. In simboli abbiamo: $\sqrt[3]{a} = x \iff x^3 = a$ $\sqrt[3]{125} = 5$ in quanto $5^3 = 125$
- Si dice **radice quarta** di un numero a il numero x che elevato alla quarta potenza dà come risultato il numero dato a. . In simboli abbiamo : $\sqrt[4]{a} = x \iff x^4 = a$
- Si dice **radice ennesima** di un numero a il numero x che elevato alla potenza ennesima dà come risultato il numero dato a. In simboli abbiamo: $\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$

Multipli e divisori di un numero

Si dice che il numero a è **divisore** del numero b (diverso da zero) se il resto della divisione del numero a per il numero b è uguale a zero. Il numero a si dice che è **multiplo** del numero b che a sua volta si dice **sottomultiplo** o **divisore** del numero a .

Definizione: dato il numero naturale a, tutti i numeri naturali b per i quali risulta che il quoziente $\frac{a}{b}=k \in N$ è un numero naturale, si chiamano **divisori del numero** a.

$\frac{a}{b}=k \in N \Rightarrow a=k \cdot b$. a è **multiplo** del numero b secondo il numero k , b è **sottomultiplo** del numero a secondo il numero k o **divisore del** numero a.

a = **dividendo** , b = **divisore** , k = **quoziente**

Criteri di divisibilità per i numeri naturali

01) Criterio di divisibilità per 2: Un numero è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è pari, cioè quando il numero termina con una delle seguenti cifre : 0 , 2 , 4 , 6 , 8 .

02) Criterio di divisibilità per 3: Un numero è divisibile per **3** se la somma delle sue cifre è divisibile per **3**

03) Criterio di divisibilità per 5: Un numero è divisibile per **5** se termina con **0** o con **5** .

04) Criterio di divisibilità per 9: Un numero è divisibile per **9** se la somma delle sue cifre è divisibile per **9**

05) Criterio di divisibilità per 11: Un numero è divisibile per **11** se è divisibile per **11** la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari.

06) Criterio di divisibilità per 7:

a) Un numero è divisibile per 7 , se è divisibile per 7 la somma delle sue decine e del quintuplo della sua cifra delle unità.

$\boxed{n = 693}$; 69 = numero delle decine del numero 693 [1]

$69 + 5\cdot 3 = 69 + 15 = 84$; $8 + 5\cdot 4 = 8 + 20 = 28$; $\dfrac{28}{7} = 4$

$\boxed{n = 15939}$; $1593 + 5\cdot 9 = 1593 + 45 = 1638$; $163 + 5\cdot 8 = 163 + 40 = 203$;

$20 + 5\cdot 3 = 20 + 15 = 35$; $\dfrac{35}{7} = 5$ $\boxed{n = 15939}$ $1593 + 5\cdot 9 = 1593 + 45 = 1638$

$163 + 5\cdot 8 = 163 + 40 = 203$ $20 + 5\cdot 3 = 20 + 15 = 35$ $35 : 7 = 5$

b) Un numero è divisibile per 7 , se è divisibile per 7 la differenza fra il numero sue decine (numero scritto senza la cifra delle unità) **ed il doppio della sua cifra delle unità .**

$\boxed{n = 693}$; $69 - 2\cdot 3 = 63$; $\dfrac{63}{7} = 9$; $\boxed{n = 15939}$ $1593 - 2\cdot 9 = 1593 - 18 = 157$;

$157 - 2\cdot 5 = 157 - 10 = 147$; $14 - 2\cdot 7 = 14 - 14 = 0$; $\dfrac{0}{7} = 0$

$\boxed{n = 15939}$ $1593 - 2\cdot 9 = 1593 - 18 = 1575$ $157 - 2\cdot 5 = 157 - 10 = 147$ $14 - 14 = 0$

07) Criterio di divisibilità per 13:

Un numero è divisibile per 13 **se è divisibile per** 13 **la somma del numero che esprime le sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del quadruplo della sua cifra dell'unità** .

$n = 27027$ $2702 + 4\cdot 7 = 2730$ $273 + 4\cdot 0 = 273$ $27 + 4\cdot 3 = 27 + 12 = 30$ $39 : 13 = 3$

08) Criterio di divisibilità per 17:

a) Un numero è divisibile per 17 **se è divisibile per** 17 **la somma del doppio delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del settuplo della sua cifra dell'unità.**

$n = 9945$ $2\cdot 994 + 7\cdot 5 = 1988 + 35 = 2023$: $2\cdot 202 + 7\cdot 3 = 404 + 21 = 425$

[1] Per scrivere le decine di un numero basta scrivere lo stesso numero privato della cifra che rappresenta le unità

$2 \cdot 42 + 7 \cdot 5 = 84 + 35 = 119$ $\qquad 2 \cdot 11 + 63 = 22 + 63 = 85$ $\qquad 85 : 17 = 5$

b) Un numero è divisibile per 17 **se è divisibile per** 17 **la differenza tra il numero che esprime le sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **ed il quintuplo della cifra dell'unità .** $n = 9945$ $\quad 994 - 5 \cdot 5 = 994 - 25 = 969$; $96 - 5 \cdot 9 = 96 - 45 = 51$; $51 : 17 = 3$

09) Criterio di divisibilità per 19:

a) Un numero è divisibile per 19 **se è divisibile per** 19 **la somma del numero delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del doppio della sua cifra delle unità.** $n = 4864$ $\quad 486 + 2 \cdot 4 = 486 + 8 = 494$ $\quad 49 + 8 = 57$ $\quad 57 : 19 = 3$

10) Criterio di divisibilità per 23:

a) Un numero è divisibile per 23 **se è divisibile per** 23 **la somma del numero delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del settuplo della sua cifra delle unità.** $n = 5888$ $\quad 588 + 7 \cdot 8 = 644$ $\quad 64 + 7 \cdot 4 = 64 + 28 = 92$ $\quad 92 : 23 = 4$

Numeri primi e numeri composti

- Un numero maggiore di 1 si dice **primo** se è divisibile soltanto per se stesso e per l'unità.
- un numero non primo, cioè un numero che ammette altri divisori oltre se stesso e l'unità, si dice **numero composto**.

Scomposizione di un numero composto in fattori primi

Scomporre il numero composto a in fattori primi significa trovare tutti i numeri primi il cui prodotto è uguale al numero a.

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Principio fondamentale dell'aritmetica

Un **numero naturale composto** si può decomporre in fattori primi in una sola maniera.

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

- Il **massimo comune divisore** (**M.C.D.)** di due o più numeri è il maggiore dei loro divisori comuni.
- Per calcolare il **M.C.D.** di due o più numeri, col **metodo della scomposizione in fattori primi**, si decompongono i numeri dati in fattori primi e poi si moltiplicano fra loro i fattori primi comuni, presi una sola volta , con l'esponente più piccolo.

$540=2^2\cdot 3^3\cdot 5 \quad , \quad 840=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \quad , \quad 1188=2^2\cdot 3^3\cdot 11 \qquad M.C.D.(540,840,1188)=2^2\cdot 3=12$

- Due numeri si dicono **primi fra loro** quando hanno come **M.C.D.** l'unità .
- Il **minimo comune multiplo** **(m.c.m.)** di due o più numeri è il più piccolo dei multipli comuni diversi da zero.
- Per calcolare il **m.c.m.** tra due o più numeri , col metodo della scomposizione in fattori primi , si decompongono in fattori primi i numeri dati e poi si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni , presi una sola volta, ciascuno col massimo esponente .

$220=2^2\cdot 5\cdot 11 \quad , \quad 224=2^5\cdot 7 \quad , \quad 360=2^3\cdot 3^2\cdot 5 \quad , \quad m.c.m.(220,224,360)=2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11=110\cdot 880$

Le frazioni

- **Unità frazionaria** è una qualsiasi delle parti uguali in cui è stata divisa una grandezza considerata come **unità**.
- **Frazione** è l'insieme di più unità frazionarie.
- Il simbolo che rappresenta una frazione è costituito da due numeri interi separati da un tratto orizzontale detto **linea di frazione**. Il numero posto al di sotto della linea di frazione si chiama **denominatore** ed indica in quante parti uguali è stata divisa l'unità . Il numero posto al di sopra della linea di frazione si chiama **numeratore** ed indica quante di queste parti uguali sono state considerate.

Il numeratore ed il denominatore si dicono **termini della frazione**.

- *Una frazione rappresenta il quoziente tra due numeri interi.*
- Una **frazione** di dice **propria** se il numeratore è minore del denominatore. Una frazione propria è minore dell'unità.
- Una frazione si dice **apparente** se il numeratore è multiplo del denominatore . una frazione apparente rappresenta una o più unità intere.

- Una frazione di dice **impropria** se il numeratore è maggiore (ma non multiplo) del denominatore. Una frazione impropria rappresenta un numero maggiore dell'unità.
- In aritmetica per **numero misto** si intende la somma di un numero intero e di una frazione propria . Per passare da una frazione impropria ad un numero misto si procede come segue:

a) si divide il numeratore della frazione per il suo denominatore.

b) sia Q , R , D rispettivamente il quoziente , il resto , il denominatore della frazione considerata :

Risulta: $\frac{N}{D}=Q+\frac{R}{D}$ $\begin{array}{c|c} N & D \\ \hline R & Q \end{array}$ $\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$ $Q=2$ $R=3$ $D=3$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ \cline{2-2} \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{2} & \end{array}$$

Proprietà invariantiva per le frazioni

Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente a quella data.

- **Semplificare una frazione** significa trasformarla in un'altra equivalente avente numeratore e denominatore più piccoli. La semplificazione si effettua dividendo numeratore e denominatore della data frazione per un loro divisore comune
- Una frazione si dice **irriducibile** o **ridotta ai minimi termini** quando il suo numeratore ed il suo denominatore sono primi fra loro. Per **ridurre ai minimi termini** una frazione basta dividere il suo numeratore ed il suo denominatore per il loro **M.C.D.**

I numeri decimali e le loro frazioni generatrici

La divisione tra due numeri interi può dare luogo ad un **numero decimale limitato** o ad un **numero decimale periodico.**

In un **numero decimale**, il numero formato dalle cifre alla sinistra della virgola si chiama **parte intera** del numero decimale, quello formato dalle cifre a destra della virgola si chiama **parte decimale**. Quindi dicesi **numero decimale** un qualsiasi numero formato da una parte intera e da una parte decimale.

Si chiamano **frazioni decimali** quelle frazioni che hanno come denominatore una potenza del 10 . Per contrapposto , si chiamano **frazioni ordinarie** tutte le frazioni non decimali .

Sono frazioni decimali : $\frac{13}{10}$, $\frac{721}{100}$, $\frac{53427}{1000}$

I simboli $23{,}5647$, $0{,}2305$, $6784{,}235$ rappresentano **numeri decimali** . Le cifre che precedono (seguono) la virgola rappresentano la **parte intera** (**decimale**) del numero decimale .

Regola

Per scrivere un numero decimale sotto forma di frazione decimale, si scrive la frazione che ha per numeratore il numero naturale che si ottiene sopprimendo la virgola del numero decimale dato e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero.

$$23{,}45=\frac{2345}{100} \quad , \quad 0{,}047=\frac{47}{1000} \quad , \quad 567{,}2346=\frac{5672346}{10000}$$

Regola

Una frazione decimale può essere trasformata in un numero decimale trascrivendo il numeratore della frazione e separando con una virgola . a partire da destra, tante cifre quanti sono gli zeri del denominatore, aggiungendo, alla sinistra del numeratore, uno o più zeri quando il numero delle cifre del numeratore è inferiore al numero degli zeri del denominatore.

$$\frac{735}{10}=73{,}5 \quad , \quad \frac{32}{1000}=0{,}032 \quad , \quad \frac{5}{10000}=0{,}0005$$

N.B. Il numero delle cifre decimali deve coincidere col numero degli zeri presenti nel denominatore della frazione decimale.

La notazione scientifica di un numero decimale

Ogni numero può essere scritto come il prodotto di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e di una opportuna potenza del 1 .

Si dice pure che il numero è scritto in **forma esponenziale** o con **notazione scientifica.**

Di solito le calcolatrici tascabili utilizzano la **notazione scientifica**.

Esempi

a) $300=3\cdot 10^2=3E02$ nella calcolatrice con notazione scientifica il simbolo 10^2 diventa $E02$

b) $1250 = 1{,}25 \cdot 10^3 = 1{,}25E\,03$ (10^3 diventa $E\,03$)

c) $27561 = 2{,}7561 \cdot 10^4 = 2{,}7561E\,04$ (10^4 diventa $E\,04$)

d) $0{,}002346 = 2{,}346 \cdot 10^{-3} = 2{,}346E-03$ (10^{-3} diventa $E-03$)

- Per numeri non troppo grandi questa forma di scrittura non è conveniente in quanto si userebbero più simboli di quelli presenti nel numero ; diventa vantaggiosa quando si hanno numeri con molte cifre.

Numeri decimali periodici

Dicesi numero decimale periodico ogni numero formato da una parte intera (che può anche essere 0) seguita da infinite cifre decimali che , da un certo punto in poi, si ripetono a gruppi sempre nello stesso ordine. La cifra o il gruppo di cifre che si ripete dicesi periodo. Il periodo può cominciare, oppure no, subito dopo la virgola; nel primo caso il numero dicesi periodico semplice, nel secondo caso dicesi periodico misto.

In un numero periodico misto il gruppo delle cifre decimali che precede il periodo si chiama antiperiodo.

I numeri decimali periodici si rappresentano scrivendo una sola volta il periodo e sopralineandolo, oppure mettendolo entro due parentesi rotonde.

$8{,}2727272727\cdots = 8{,}\overline{27} = 8{,}(27)$ $\qquad 23{,}856\overline{32} = 23{,}856(32)$

Una frazione si dice riducibile quando il suo quoziente è un numero decimale limitato. Una frazione si dice irriducibile quando il suo quoziente è un numero decimale illimitato.

Teorema N° 1 **Una frazione irriducibile il cui denominatore non contiene come fattori primi né 2 né 5, è trasformabile in un numero decimale periodico semplice.**

Teorema N° 2 **Una frazione irriducibile il cui denominatore contiene come fattori primi il 2 o il 5 anche qualche altro fattore primo , è trasformabile in un numero decimale periodico misto.**

Teorema N° 3 **Non esiste alcuna frazione dalla quale derivi un numero decimale illimitato periodico con periodo 9.**

Esempio $1{,}\overline{9} = \dfrac{19-1}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$ $\qquad 1{,}2\overline{9} = \dfrac{129-12}{90} = \dfrac{129-12}{90} = \dfrac{117}{90} = \dfrac{13}{10} = 1{,}3$

Questo significa che i simboli $1{,}3$ **e** $1{,}2\overline{9}$ **rappresentano lo stesso numero, cioè :** $1{,}3 = 1{,}2\overline{9}$

Definizione Chiamasi **frazione generatrice** di un numero decimale periodico, quella frazione tale che il quoziente del suo numeratore per il suo denominatore è il numero periodico dato.

Teorema N° 4 La frazione generatrice di un **numero periodico semplice** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra il numero stesso privato della virgola (e con il periodo scritto una sola volta) ed il numero formato dalle cifre della parte intera, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

$$5,\overline{21} = \frac{521-5}{99} = \frac{516}{99} = \frac{172}{33} \qquad 0,\overline{37} = \frac{37}{99}$$

Teorema N° 5 La **frazione generatrice** di un **numero decimale periodico misto** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra il numero stesso privato della virgola (e con il periodo scritto una sola volta) ed il numero formato dalle cifre della parte intera seguita da quelle dell'antiperiodo, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

$$2{,}3\overline{41} = 2{,}3(41) = \frac{2341-23}{990} = \frac{1159}{495} \qquad 0{,}18(3) = 0{,}18\overline{3} = \frac{183-18}{900} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}$$

$$0{,}253\overline{6} = 0{,}253(6) = \frac{2536-253}{9000} = \frac{2283}{9000} = \frac{761}{3000}$$

OSSERVAZIONE << **Come si fa a stabilire se una fraziona dà luogo ad un numero decimale finito , ad un numero decimale periodico semplice, ad un numero decimale periodico misto ? >>**

01) Una frazione, ridotta ai minimi termini , è trasformabile in un **numero decimale finito** se il suo denominatore ha come fattori potenze del 2 o potenze del 5 o potenze di entrambi i fattori.

$$\frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad \frac{13}{4} = 3{,}25 \qquad \frac{13}{20} = 0{,}65$$

02) Una frazione ridotta ai minimi termini si trasforma in un **numero decimale periodico semplice** se il denominatore non contiene i fattori 2 e 5 .

$$\frac{41}{11} = 3{,}7272727272\cdots = 3{,}\overline{72} = 3{,}(72)$$

03) **Una frazione ridotta ai minimi termini si trasforma in un numero decimale periodico misto se il suo denominatore , assieme ad eventuali altri fattori, contiene come fattori potenze del 2 e del 5 , oppure di uno solo di essi.**

$$\frac{41}{44} = \frac{41}{2^2 \cdot 11} = 0{,}93181818\cdots = 0{,}93\overline{18} = 0{,}93(18)$$

Operazioni con numeri decimali periodici

Per eseguire le operazioni con numeri decimali periodici, basta sostituire ad essi le corrispondenti frazioni generatrici ed eseguire i calcoli secondo le regole note .

Semplificazione di una frazione

Una frazione si dice **riducibile** (cioè semplificabile) quando il M.C.D. fra il numeratore ed il denominatore della frazione è diverso da 1.

Una frazione si dice **irriducibile** (cioè non semplificabile) o **ridotta ai minimi termini** quando il M.C.D. fra il numeratore ed il denominatore della frazione è uguale ad 1. Il numeratore ed il denominatore di una frazione irriducibile sono sempre numeri primi fra loro.

Per semplificare una frazione e renderla irriducibile basta dividere il numeratore ed il denominatore della frazione per il loro M.C.D.

$$\frac{84}{210} = \frac{84:42}{210:42} = \frac{2}{5}$$

in quanto risulta: **M.C.D.(84,210) = 42**

Otteniamo lo stesso risultato scomponendo il numeratore ed il denominatore della frazione data in fattori primi, e sopprimendo i fattori comuni ai due termini della frazione.

$$\frac{504}{1260} = \frac{2^{\cancel{3}} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{7}}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{3^2} \cdot 5 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{5}$$

Trasformazione di due o più frazioni ad uno stesso denominatore

Per ridurre due o più frazioni al minimo comune denominatore (indicato col simbolo **m.c.d.**) si procede come segue:

- si semplificano le frazioni (operazione eventuale)

- si calcola il **m.c.m.** dei denominatori delle frazioni considerate
- si trasforma ciascuna frazione, ridotta ai minimi termini, nella frazione equivalente avente per denominatore il **m.c.m.** trovato.

Vogliamo trasformare le seguenti frazioni: $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{15}$ in altre equivalenti aventi lo stesso denominatore. $m.c.m.(6,12,15)=60$, $60:6=10$, $60:12=5$, $60:15=4$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 10}{6\cdot 10}=\frac{50}{60} \qquad \frac{11}{12}=\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{55}{60} \qquad \frac{7}{15}=\frac{7\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{28}{60}$$

Operazioni con le frazioni

L'addizione delle frazioni

La **somma** di due o più frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione che ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma di tutti i numeratori.

$$\frac{8}{25}+\frac{3}{25}+\frac{4}{25}=\frac{8+3+4}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

Per sommare due o più frazioni aventi denominatori diversi, si riducono le frazioni considerate al minimo comune denominatore e poi si applica la regola utilizzata per la somma delle frazioni aventi lo stesso denominatore.

$$\frac{10}{12}+\frac{2}{5}+\frac{6}{20}=\frac{5}{6}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{25+12+9}{30}=\frac{46}{30}=\frac{23}{15}$$

Abbiamo eseguito le seguenti operazioni:

- semplificazione delle frazioni da sommare
- calcolo del minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni semplificate

$$m.c.m.(6,5,10)=30$$

- applicazione della regola per il calcolo della somma di frazioni aventi lo stesso denominatore
- semplificazione della somma ottenuta

La sottrazione fra due frazioni

La **differenza** di due frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione che ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la differenza dei numeratori.

$$\frac{8}{25}-\frac{3}{25}=\frac{8-3}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

Per **sottrarre** due frazioni aventi denominatori diversi, si riducono le frazioni considerate al minimo comune denominatore e poi si applica la regola utilizzata per la differenza fra due frazioni aventi lo stesso denominatore.

$$\frac{10}{12}-\frac{2}{5}=\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{25-12}{30}=\frac{13}{30}$$

Espressioni con addizioni e sottrazioni di frazioni

$$\frac{6}{5}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{5}-\frac{3-2}{6}-\frac{9-8}{12}=\frac{6}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{72-10-5}{60}=\frac{57}{60}=\frac{19}{20}$$

La moltiplicazione di due o più frazioni

- Il **prodotto** di due o più frazioni è la frazione avente come numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{49}{12}=\frac{2205}{840}=\frac{21}{8} \quad \text{oppure} \quad \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{15}\,3}{\cancel{14}\,2}\cdot\frac{\cancel{49}\,7}{\cancel{12}\,4}=\frac{21}{8}$$

Inversa o reciproca di una frazione

Due numeri si dicono reciproci o inversi quando il loro prodotto è uguale ad 1. Pertanto la frazione reciproca o inversa di una frazione si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore della frazione data.

Le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ sono frazioni reciproche in quanto risulta: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$

Potenza di una frazione

Per **elevare a potenza** una frazione basta elevare a quella potenza sia il numeratore che il denominatore della frazione. $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$

La divisione di due frazioni

Per effettuare la **divisone** di due frazione basta **moltiplicare** la prima frazione per l'inversa della seconda. $\frac{3}{11}:\frac{7}{4}=\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{77}$

Frazioni a termini frazionari

Una frazione si dice a **termini frazionari** se il suo numeratore o il suo denominatore o entrambi sono delle frazioni.

Una **frazione a termini frazionari** è uguale al prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore oppure è uguale ad una frazione che ha come numeratore il prodotto dei termini estremi e come denominatore il prodotto dei termini medi.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{20} \quad \text{oppure} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$$

Esempi

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{2}:\frac{9}{8}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{90+280+105-84}{210}=\frac{391}{210}$$

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\right):\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{4}=\frac{6+5}{10}:\frac{2}{3}+\frac{9-8}{12}:\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{11}{10}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}=\frac{33}{20}+\frac{1}{9}=\frac{297+20}{180}=\frac{317}{180}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{9}{8}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{8}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{10}{9}=\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{10}+\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}-\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{9}=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}-\frac{2}{5}=\frac{8+9-12}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

Rapporti e proporzioni fra numeri

Si dice **rapporto** fra i numeri **a** e **b**, con **b** diverso da zero, il **quoziente** che si ottiene dividendo il numero **a** per il numero **b**.

Il rapporto fra i numeri **a** e **b** viene indicato con una delle due seguenti scritture:

$$a:b \qquad \frac{a}{b} \qquad b\neq 0$$

Definizione: 4 numeri **a, b, c, d** **formano una proporzione**, se il rapporto tra il primo ed il secondo numero è uguale al rapporto fra il terzo ed il quarto numero. In simboli abbiamo:

$$a:b=c:d \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Lessico

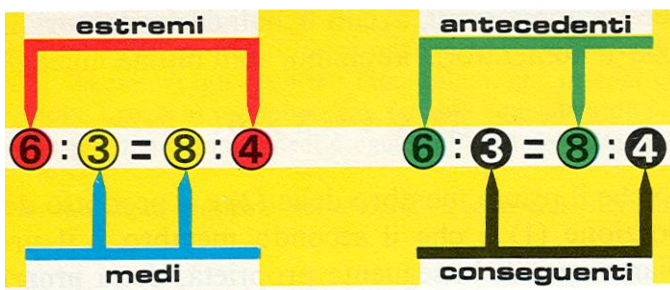
1) I numeri **a, b, c, d** sono i **termini della proporzione**

2) **a** e **b** sono gli <<**estremi**>> della proporzione, **b** e **c** sono i <<**medi** >> della proporzione , **a** e **c** sono gli <<**antecedenti**>> della proporzione, **b** e **d** sono i <<**conseguenti**>> della proporzione.

3) Se tra i numeri **a, b, c** sussiste la seguente proporzione $a:b=b:c$ allora il numero **b** prende il nome di **medio proporzionale** fra i numeri **a** e **c** , mentre il numero **c** prende il nome di **terzo proporzionale** dopo i numeri **a** e **b**. Una **proporzione** si dice **continua** quando i suoi medi sono uguali.

I numeri **6, 3, 8, 4** formano una proporzione in quanto risulta: $6:3=8:4$

Il numero **6** è medio proporzionale tra i numeri **12** e **3** in quanto risulta: $12:6=6:3$



Teorema fondamentale delle proporzioni fra numeri

In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$6:3=8:4 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot 4=8\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 24=24$$

Altre proprietà delle proporzioni fra numeri

La proporzione $a:b=c:d$ fra i numeri **a, b, c, d** gode delle seguenti proprietà formali :

1) In ogni proporzione fra numeri è lecito scambiare ogni antecedente col proprio conseguente (**proprietà dell'invertendo**)

$$a:b=c:d \quad \Leftrightarrow \quad b:a=d:c$$

2) Se 4 numeri a, b, c, d sono in proporzione , allora si possono scambiare i medi tra loro o gli estremi tra loro (**proprietà del permutando**)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad a:c=b:d \quad \wedge \quad d:b=c:a$$

3) In ogni proporzione fra numeri, la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) termine, come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

(**proprietà del componendo**)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad (a+b):a=(c+d):C \quad \wedge \quad (a+b):b=(c+d):d$$

4) Se in una proporzione il primo termine è maggiore del secondo (e quindi il terzo è maggiore del quarto), la differenza fra il primo ed il secondo termine sta al primo (o al secondo) termine come la differenza tra il terzo ed il quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

(**proprietà dello scomponendo o del dividendo**)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad (a-b):a=(c-d):c \quad \wedge \quad (a-b):b=(c-d):d$$

5) In ogni serie di rapporti uguali tra numeri, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente.

$$a:b=c:d=e:f \quad \Rightarrow \quad (a+c+e):(b+d+f)=c:d$$

$a:b=c:d$	$a \times d = b \times c$	proprietà fondamentale
$a:b=c:d$	$b:a=d:c$	invertire
$a:b=c:d$	$a:c=b:d$	permutare dei medi
$a:b=c:d$	$d:b=c:a$	permutare degli estremi

$$a:b=c:d \qquad \left.\begin{array}{l}(a+b):a=(c+d):c\\(a+b):b=(c+d):d\end{array}\right\}\text{ comporre}$$

$$\begin{array}{l}a:b=c:d\\ \text{essendo } a>b\\ \text{e quindi } c>d\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}(a-b):a=(c-d):c\\(a-b):b=(c-d):d\end{array}\right\}\text{ scomporre}$$

$$a:b=c:d \qquad \left.\begin{array}{l}(a+c):(b+d)=a:b\\(a+c):(b+d)=c:d\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{comporre degli antecedent}\\ \text{e dei conseguenti}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}a:b=c:d\\ \text{essendo } a>c\\ \text{e quindi } b>d\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}(a-c):(b-d)=a:b\\(a-c):(b-d)=c:d\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{scomporre degli antecedent}\\ \text{e dei conseguenti}\end{array}$$

Calcolo del termine incognito di una proporzione

Regola: *In ogni proporzione un estremo incognito è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo*.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $12:8=3:x$ $\quad x=\frac{8\cdot 3}{12}=2$

Regola: *In ogni proporzione un medio incognito è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio*.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $15:5 = x:3$ $\quad x = \dfrac{15 \cdot 3}{5} = 9$

Regola: *In ogni proporzione continua il medio incognito è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi*.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $12:x = x:3$ $\quad x = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

Problemi del tre semplice

Si chiamano problemi del **tre semplice** quei problemi nei quali intervengono due grandezze direttamente o inversamente proporzionali. Conosciamo una coppia di valori corrispondenti delle due grandezze (ad esempio **X** ed **Y**) ed un altro valore di una di esse (ad esempio di **X**); vogliamo calcolare il valore della grandezza **Y** che corrisponde alla grandezza **X**.

Osservazione: Si chiamano **problemi del tre semplice** in quanto noti tre valori vogliamo calcolarne un quarto. La denominazione **semplice** deriva dal fatto che in questi problemi intervengono soltanto **due grandezze**. I problemi nei quali sono presenti più di due grandezze prendono il nome di **problemi del tre composto**.

Problema del tre semplice quando le grandezze sono direttamente proporzionali.

Un rubinetto versa in 4 ore 160 litri di acqua. Quanti litri di acqua verserà in 7 ore?

Per la risoluzione del problema possiamo utilizzare il seguente schema convenzionale, nel quale le frecce aventi lo stesso orientamento ci dicono che le grandezze presenti nel problema sono direttamente proporzionali.

Tempo (ore)	*Litri versati*
4 ↓	160 ↓
7	x

$$4 : 7 = 160 : x \qquad x = \frac{160 \times 7}{4} = 280 .$$

Il rubinetto verserà in 7 ore, 280 litri di acqua.

Problema del tre semplice quando le grandezze sono inversamente proporzionali.

Per compiere un determinato lavoro 10 operai impiegano 18 giorni; quanti giorni impiegheranno 15 operai aventi la stessa capacità lavorativa per compiere lo stesso lavoro?

Per la risoluzione del problema possiamo utilizzare il seguente schema convenzionale, nel quale le frecce aventi orientamento opposto ci dicono che le grandezze presenti nel problema sono inversamente proporzionali.

$$\begin{array}{cc} \textit{Operai} & \textit{Tempo} \text{ (giorni)} \\ 10 & 18 \\ 15 \downarrow & x \uparrow \end{array}$$

$$10 : 15 = x : 18$$

$$x = \frac{10 \times 18}{15} = 12 .$$

Concludiamo così che 15 operai impiegheranno 12 giorni per compiere il lavoro.

U.D. N° 03
I numeri relativi

01) I numeri relativi

02) Addizione di due numeri relativi

03) Sottrazione di due numeri relativi

04) Moltiplicazione di numeri relativi

05) Divisione di due numeri relativi

06) Espressione algebrica

I numeri relativi

I **numeri relativi** sono quelli preceduti dal segno << + >> o dal segno << - >>. I **numeri positivi** sono quelli preceduti dal segno + (zero escluso). I **numeri negativi** sono quelli preceduti dal segno - (zero escluso). I numeri positivi , quelli negativi e lo zero formano l'insieme dei **numeri relativi**. Definiamo **valore assoluto** o **modulo** di un numero relativo il numero stesso senza segno.

$$|-7| = 7 \quad , \quad |+7| = 7 \quad , \quad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

Due numeri relativi si dicono **concordi** (**discordi**) se hanno (non hanno) lo stesso segno. I numeri relativi -5 e $-\frac{3}{4}$ sono **concordi**; i numeri $+\frac{3}{4}$ e $-\frac{2}{7}$ sono **discordi**. Due numeri relativi discordi aventi lo stesso modulo si dicono **opposti**. I numeri relativi $-\frac{3}{8}$ e $+\frac{3}{8}$ sono **opposti**.

Due numeri relativi sono **uguali** se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto.

Per confrontare due numeri relativi, cioè per stabilire se uno di essi è maggiore, uguale o minore dell'altro, si tiene presente quanto segue:

1) di due numeri positivi è **maggiore** quello che ha valore assoluto maggiore

2) di due numeri negativi è **maggiore** quello che ha valore assoluto minore

3) ogni numero positivo è **maggiore** di un qualsiasi numero negativo

4) lo zero è **maggiore** di ogni numero negativo e **minore** di ogni numero positivo

Addizione di due numeri relativi

$$(+8) + (+3) = +11$$
$$(-8) + (-3) = -11$$
$$(+8) + (-3) = +5$$
$$(-8) + (+3) = -5$$

La somma di **due numeri positivi** (negativi) è un **numero positivo** (negativo) avente come valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due addendi .

La somma di due numeri relativi **discordi** è un numero relativo avente come segno il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore e come valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e quello minore. Due numeri si dicono **opposti** quando la loro somma è **zero**.

Sottrazione di due numeri relativi

La differenza tra due numeri relativi è uguale al primo numero più l'opposto del secondo. Quindi per effettuare la **differenza** tra due numeri relativa basta aggiungere al primo l'opposto del secondo.

$$(+8)-(-2)=(+8)+(+2)=+10 \quad , \quad (+8)-(+2)=(+8)+(-2)=+6$$
$$(-8)-(-2)=(-8)+(+2)=-6$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{7}{10}\right)-\left(+\frac{3}{15}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)=\frac{-18+21-6}{30}=-\frac{3}{30}=-\frac{1}{10}$$

Moltiplicazione di numeri relativi

Il **prodotto** di due numeri relativi è uguale al numero relativo che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei numeri e come segno quello positivo se i numeri sono concordi , quello negativo se i numeri sono discordi.

REGOLA DEI SEGNI

$+$ *per* $+$ $=$ $+$	$(-2)\cdot(-5)=+10$
$-$ *per* $-$ $=$ $+$	$(-2)\cdot(+5)=-10$
$+$ *per* $-$ $=$ $-$	$(+2)\cdot(-5)=-10$
$-$ *per* $+$ $=$ $-$	$(-2)\cdot(-5)=+10$

OSSERVAZIONE

Due numeri si dicono **reciproci** o **inversi** quando il loro prodotto è **1**. I numeri $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{4}{3}$ sono **reciproci** perché : $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=1$. Il **reciproco** del numero $\frac{3}{7}$ è il numero $\frac{7}{3}$ in quanto :

$$\left(\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)=1$$

Il **reciproco** di un numero è il numero che si ottiene scambiando il numeratore col denominatore.

Due numeri si dicono **antireciproci** quando il loro prodotto è -1.

Divisione di due numeri relativi

Il **quoziente** di due numeri relativi è uguale al prodotto del primo numero per il reciproco del secondo . $\left(-\frac{3}{5}\right):\left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) = +\frac{21}{10}$

REGOLA DEI SEGNI

$$\begin{array}{cccc} + & \textit{diviso} & + & = & + \\ - & \textit{diviso} & - & = & + \\ + & \textit{diviso} & - & = & - \\ - & \textit{diviso} & + & = & - \end{array}$$

OSSERVAZIONE

Per calcolare la potenza di un numero relativo basta ricordare che una potenza è un prodotto di fattori uguali: $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{16}{81}$

La potenza di un numero positivo è un numero positivo. La potenza di un numero negativo è un numero positivo se l'esponente è **pari**, un numero negativo se l'esponente è **dispari**.

In conclusione possiamo affermare che la potenza di un numero relativo è un numero negativo solo quando la base è negativa e l'esponente è dispari. In tutti gli altri casi è un numero positivo.

Espressione algebrica

Dicesi **espressione algebrica** (razionale) un insieme di numeri e di lettere legati fra di loro da almeno una delle quattro operazioni razionali: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.

Esempi di espressioni algebriche: $3x^2y \quad , \quad -\frac{3}{4}\frac{ab}{x^5y} \quad , \quad 3x + 2y^2 - \frac{3ab^4}{xy^5}$

U.D. N°04

I polinomi

01) Monomi

02) Somma algebrica di monomi simili

03) Prodotto di due i più monomi

04) Quoziente di due monomi

05) Potenza di un monomio

06) Massimo comune divisore di due o più monomi

07) Minimo comune multiplo di due o più monomi

08) I polinomi

09) Somma algebrica di polinomi

10) Prodotto di un polinomio per un monomio

11) prodotto di due o più polinomi

12) I prodotti notevoli

13) Potenza di un binomio : triangolo di Tartaglia

14) Divisione di un polinomio per un monomio

15) Divisione fra due polinomi

16) Divisione per un binomio di primo grado

17) Regola di Ruffini

Monomi

Dicesi **monomio** una espressione algebrica non contenente le operazioni di addizione e sottrazione, cioè una espressione algebrica dove figura o l'operazione di moltiplicazione o l'operazione di divisione o entrambe. Sono **monomi**: $-3x^2y$, $\dfrac{2ab^2x^3}{y^4z}$

Ogni monomio è costituito da una parte numerica detta **coefficiente** e da una **parte letterale**. $3ab$ $\rightarrow$ **monomio**, 3 $\rightarrow$ **coefficiente**, ab $\rightarrow$ **parte letterale**

Un monomio è **ridotto a forma canonica** (o **normale** o **tipica**) quando i suoi fattori letterali sono tutti fra loro diversi. $3ax^2y^5$ è un **monomio ridotto a forma normale**

$-3axy^3 5a^2xb$ non è un **monomio ridotto a forma normale**. Ridotto a forma normale diventa: $-15a^3bx^2y^3$

Dicesi **grado** di un monomio rispetto ad una lettera l'esponente con cui la lettera si presenta nel monomio. Il monomio $5ax^5y^2z^{12}$ ha grado **1** rispetto alla lettera **a**, grado **5** rispetto alla lettera **x**, grado **2** rispetto alla lettera **y**, grado **12** rispetto alla lettera **z**.

Dicesi **grado assoluto** o semplicemente **grado** di un monomio ridotto a forma canonica la somma degli esponenti delle sue lettere.

Il monomio $5a\ x^5\ y^2$ ha **grado assoluto** $1 + 5 + 2 + 12 = 20$. Il monomio $\dfrac{3ax^2}{b^3} = 3ab^{-3}x^2$ ha grado -3 rispetto alla lettera **b**, mentre il **grado assoluto** è **zero**.

Due monomi si dicono **simili** se hanno la stessa parte letterale. I monomi $-3ab$, $2ab$, $\dfrac{1}{2}ab$ sono **monomi simili**. Due monomi simili aventi lo stesso coefficiente si dicono **uguali**.

$3ab^2$ e $3ab^2$ sono **monomi uguali** , $\dfrac{1}{2}xy^8$ e $-\dfrac{1}{2}xy^8$ sono **monomi opposti**

Somma algebrica (addizione e sottrazione) di monomi simili

La **somma algebrica** di due o più monomi simili è un monomio che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e come parte letterale la stessa parte letterale.

$$-\frac{7}{3}ax^2y + \frac{2}{5}ax^2y - 3ax^2y = \left(-\frac{7}{6} + \frac{2}{5} - 3\right)ax^2y = \frac{-35 + 6 - 45}{15}ax^2y = -\frac{74}{15}ax^2y$$

Prodotto di due o più monomi

Il prodotto di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

$$\left(\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}b^2x\right) = \left(+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)a^3b^2x^3 = \frac{1}{4}a^3b^2x^3$$

Quoziente di due monomi

Il quoziente di due monomi è un monomio avente come coefficiente il quoziente dei coefficienti e come parte letterale il quoziente delle parti letterali.

$$\left(-\frac{3}{5}a^5y^4z^2b\right):\left(\frac{7}{15}a^2y^3z\right) = \left(-\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{7}\right)a^{5-2}y^{4-3}z^{2-1}b = -\frac{9}{7}a^3yzb$$

$$\left(-\frac{6}{7}a^2b^5x^8y\right):\left(-\frac{33}{14}a^5b^2x^3d^5\right) = \left(\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{33}\right)a^{2-5}b^{5-2}x^{8-5}yd^{-5} = \frac{4}{11}a^{-3}b^3x^5yd^{-5} = \frac{4}{11}\frac{b^3x^5y}{a^3d^5}$$

Potenza di un monomio

La potenza di un monomio è un monomio che ha come coefficiente la potenza del coefficiente e come parte letterale la potenza della parte letterale . $\left(-\frac{1}{2}ax^2y^4\right)^3 = -\frac{1}{8}a^3x^6y^{12}$

Massimo comune divisore di due o più monomi

Il massimo comune divisore ($M.C.D.$) di due o più monomi interi a coefficienti interi è un monomio avente per coefficiente il $M.C.D.$ dei coefficienti e per parte letterale quella formata dalle sole lettere comuni prese una sola volta con l'esponente minore.

$$12a^5b^4x^3y^7 \quad , \quad 6a^3b^5x \quad , \quad 21a^4b^2z \qquad\qquad M.C.D. = 3a^3b^2$$

Minimo comune multiplo di due o più monomi

Il **minimo comune multiplo** ($m.c.m.$) di due o più monomi interi è un monomio avente per coefficiente il $m.c.m.$ dei coefficienti e per parte letterale quella formata dalle lettere comuni e non comuni, prese una sola volta, con l'esponente maggiore.

$$12a^5b^4x^3y^7\,,\quad 6a^3b^5x\,,\quad 21a^4b^2z \qquad\qquad m.c.m. = 84a^5b^5x^3y^7z$$

Osservazione Quando i coefficienti dei monomi non sono tutti numeri interi, allora si assume come coefficiente del $M.C.D.$ e del $m.c.m.$ il numero $+1$. Questo per semplicità e per opportunità di calcolo.

Polinomi

Definizione Dicesi **polinomio** la somma algebrica di due o più monomi . I monomi si dicono i **termini** del polinomio . Un polinomio formato da due termini dicesi **binomio**, da tre termini **trinomio**, etc...

Esempi di polinomi

$-5a^2b^3x + \frac{2}{3}ab^2x^3 - \frac{5}{4}ay^4$ Polinomio intero , $-3a^2b + 5\frac{ab^3}{x} - \frac{7}{4}\frac{ay^5x^7}{}$ Polinomio Frazionario

Definizione Dicesi **grado** di un polinomio rispetto ad una lettera il maggiore esponente con cui quella lettera figura nel polinomio. Il polinomio $5a^2b - \frac{7}{2}ab^3x^2 + \frac{1}{3}a^4bx$ è di **quarto** grado rispetto ad a, di **terzo** grado rispetto a b, di **secondo** grado rispetto ad x .

Definizione Dicesi **grado assoluto**, o semplicemente grado di un polinomio, il maggiore dei gradi (assoluti) dei suoi termini. Il polinomio $\begin{array}{ccccc} 8a^2b^3y^5 & - & \frac{5}{2}ab^5 & - & 3ax^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 10 & & 6 & & 3 \end{array}$ è di **decimo** grado.

Definizione Un polinomio si dice **omogeneo** quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado (assoluto) Il polinomio $5a^2b^3c - \frac{7}{2}ab^5 + 6ax^2y^3$ è **omogeneo di sesto grado**.

Definizione Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze crescenti o decrescenti di una data lettera** se i suoi termini si succedono in modo che gli esponenti di quella lettera vadano crescendo o decrescendo. Il polinomio $6x^4 + 5x^3 - 2x + 5 = 0$ è un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della x.

Definizione Un polinomio ordinato si dice **completo rispetto alla lettera ordinatrice** se contiene tutte le potenze di quella lettera, dal grado massimo al grado zero.

$8x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5x - 2$ è un polinomio completo di sesto grado ordinato secondo le potenze decrescenti della x.

Somma algebrica di polinomi

Per sommare algebricamente due o più polinomi basta sommare algebricamente i monomi simili.

$$\left(x^4-\frac{3}{5}x^3+2x^2-x-5\right)+\left(x^3-3x^2+\frac{2}{3}x-1\right)-\left(3x^4-\frac{2}{7}x+5\right)=$$

$$=x^4-\frac{3}{5}x^3+2x^2-x-5+x^3-3x^2+\frac{2}{3}x-1-3x^4+\frac{2}{7}x-5=$$

$$=(1-3)x^4+\left(-\frac{3}{5}+1\right)x^3+(2-3)x^2+\left(-1+\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\right)x-11=$$

$$=-2x^4+\frac{2}{5}x^3-x^2-\frac{1}{21}x-11$$

Prodotto di un polinomio per un monomio

Per moltiplicare un polinomio per un monomio basta moltiplicare ogni termine del polinomio per il monomio e sommare algebricamente i prodotti ottenuti.

$$\left(a^2+ab+a^3b^2\right)\cdot 3a^2bx=3a^4bx+3a^3b^2x+3a^5b^3x$$

Prodotto di due o più polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine di uno di essi per tutti i termini dell'altro. Al risultato ottenuto bisogna applicare la somma algebrica dei monomi simili.

$$\left(-3x^2-2xy+5\right)\cdot\left(xy^2-5x^2y\right)=-3x^3y^2-2x^2y^3+5xy^2+15x^4y+10x^2y^2-25x^2y=$$

$$=7x^3y^2-2x^2y^3+5xy^2+15x^4y-25x^2y$$

Se i polinomi sono più di due, il loro prodotto si ottiene moltiplicando i primi due e, poi, moltiplicando il polinomio ottenuto per il terzo polinomio e cos' di seguito fino ad esaurire i polinomi dati.

Prodotti notevoli

Si chiamano **prodotti notevoli** alcuni prodotti fra polinomi che si effettuano in base a determinate regole che ci consentono di semplificare certi calcoli.

1) Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Regola: **Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza dei loro quadrati.**

$$\left(\frac{2}{3}a^2by^3+5x^2t\right)\left(\frac{2}{3}a^2by^3-5x^2t\right)=\frac{4}{9}a^4b^2y^6-25x^4t^2$$

2) Quadrato di un binomio: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Regola: Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine più il doppio prodotto del primo termine per il secondo , più il quadrato del secondo termine .

$(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2ac$, $\left(-\frac{3}{5}xy^2+\frac{1}{3}x^2y\right)^2=\frac{9}{25}x^2y^4-\frac{2}{5}x^3y^3+\frac{1}{9}x^4y^2$

$$\left(-2xy-\frac{1}{4}ax\right)^2=4x^2y^2+ax^2y+\frac{1}{16}a^2x^2$$

3) Quadrato di un polinomio

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

Regola: Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei suoi termini più la somma algebrica dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.

$$\left(-\frac{3}{4}a+2b^2-\frac{1}{3}c+2\right)^2=\frac{9}{16}a^2+4b^4+\frac{1}{9}c^2+4-3ab^2+\frac{1}{2}ac-3a-\frac{4}{3}b^2c+8b^2-\frac{4}{3}c$$

4) Cubo di un binomio $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Regola: Il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica del cubo del primo termine , del triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, del triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, del cubo del secondo termine.

$$(a+2b)^3=a^3+3\cdot(a)^2\cdot(2b)+3\cdot a\cdot(2b)^2+8b^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$$

$$\left(3x^2-\frac{1}{3}y\right)^3=27x^6+3\cdot(3x^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}y\right)+3\cdot(3x^2)\cdot\left(-\frac{1}{3}y\right)^2-\frac{1}{27}y^3=27x^6-9x^4y+x^2y^2-\frac{1}{27}y^3$$

$$\left(-\frac{3}{4}a^3-2a\right)^3=\left(-\frac{3}{4}a^3\right)^3+3\left(-\frac{3}{4}a^3\right)^2(-2a)+3\left(-\frac{3}{4}a^3\right)(-2a)^2+(-2a)^3=-\frac{27}{64}a^9-\frac{27}{8}a^7-9a^5-8a^3$$

5) Cubo di un trinomio

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$$

Regola: Il cubo di un trinomio è uguale alla somma algebrica dei cubi dei suoi termini, dei tripli prodotti del quadrato di ciascun termine per ciascuno dei rimanenti e del sestuplo prodotto dei suoi tre termini. $(x+2y+3z)^3=x^3+8y^3+27z^3+6x^2y+9x^2z+12xy^2+36y^2z+27xz^2+54yz^2+36xyz$

6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ $\quad$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$$(2a+1)(4a^2-2a+1)=8a^3+1 \quad , \quad \left(\frac{2}{5}ax-b^2\right)\left(\frac{4}{25}a^2x^2+\frac{2}{5}ab^2x+b^4\right)=\frac{8}{125}a^3x^3-b^6$$

Potenza di un binomio , triangolo di Tartaglia

Potenza di un binomio è una potenza del tipo: $(a+b)^n$

Vogliamo sviluppare questa potenza senza moltiplicare tra loro gli n fattori uguali $(a+b)$.
Per $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$ lo sappiamo già fare . Vediamo come si fa a sviluppare $(a+b)^n$ per un **n** numero intero qualsiasi . Lo sviluppo di $(a+b)^n$ è un polinomio avente $n+1$ termini , di grado **n** , omogeneo , completo ed ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b . I coefficienti del suddetto polinomio si deducono dal **triangolo di Tartaglia** tenendo presente che i coefficienti estremi sono sempre uguali ad 1 , e che ogni altro coefficiente si trova addizionando al coefficiente che gli sta sopra con quello che sta alla sinistra di questo .

n	coefficienti								
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Il triangolo di **Tartaglia** può essere scritto anche a forma di triangolo isoscele

n																	
0									1								
1								1		1							
2							1		2		1						
3						1		3		3		1					
4					1		4		6		4		1				
4				1		5		10		10		5		1			
6			1		6		15		20		15		6		1		
7		1		7		21		35		35		21		7		1	
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1

REGOLA PRATICA PER IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI

1) I termini estremi hanno coefficiente uguale ad 1

2) scritto un coefficiente, si ottiene il successivo moltiplicando il coefficiente scritto per l'esponente di **a** nel termine già scritto e dividendo il prodotto ottenuto per il numero che indica il posto occupato dal monomio di cui abbiamo già scritto il coefficiente (oppure dividendo per l'esponente di **b** aumentato di 1)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (a+b)^2 & = & a^6 & + & 6a^5b & + & 15a^4b^2 & + & 20a^3b^3 & + & 15a^2b^4 & + & 6ab^5 & + & b^6 \\ & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & \end{array}$$

$$6=\frac{1\cdot 6}{1} \quad , \quad 15=\frac{6\cdot 5}{2} \quad , \quad 20=\frac{15\cdot 4}{3} \quad , \quad 15=\frac{20\cdot 3}{4} \quad , \quad 6=\frac{15\cdot 2}{5}$$

Divisione di un polinomio per un monomio

Per dividere un polinomio per un monomio basta dividere ciascun termine del polinomio per il monomio. $\left(-18a^5b^3x^2+9a^3b^4x-21a^2b^2x^3\right):\left(-3a^2b\right)=6a^3b^2x^2-3ab^3x+7bx^3$

$$\left(-3a^2b+4a^3c^4-8ab^4c^2+2\right):\left(-6a^3b^2c\right)=\frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}c^{-1}-\frac{2}{3}c^3b^{-2}+4b^2a^{-2}-\frac{1}{3}a^{-3}b^{-2}c^{-1}=$$

$$=\frac{1}{2abc}-\frac{3c^3}{3b^2}+\frac{4b^2c}{a^2}-\frac{1}{3a^3b^2c}$$

Divisione fra due polinomi

Spesso per indicare un generico polinomio in una certa variabile (ad esempio x) si usa uno dei seguenti simboli: $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ (si legge: << a di x >> , << b di x >> , << c di x >>), cioè una lettera maiuscola per indicare un polinomio ed una lettera minuscola racchiusa tra due parentesi rotonde per indicare la variabile del polinomio. Siano dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, il primo di grado **n** ed il secondo di grado **m** $(\leq n)$.

Dividere il polinomio $A(x)$ (detto **dividendo**) per il polinomio $B(x)$ (detto **divisore**) significa trovare due polinomi $Q(x)$ (detto **quoziente**) di grado $n-m$ ed $R(x)$ (detto **resto**) di grado minore di **m** per i quali sussiste la seguente relazione:

$$\begin{array}{ccccccc} A(x) & = & Q(x) & \cdot & B(x) & + & R(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{dividendo} & & \text{quoziente} & & \text{divisore} & & \text{resto} \end{array}$$

Se $R(x) = 0$ la divisione è **esatta** ed il polinomio $A(x)$ è **divisibile** per il polinomio $B(x)$.

In questo caso scriviamo: $A(x):B(x) = Q(x)$ oppure: $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x)$

Se $R(x)$ non vale **zero** la divisione non è esatta e si scrive: $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

Regola Per eseguire la divisione fra due polinomi secondo le potenze decrescenti di una stessa lettera si opera come segue:

1) si divide il primo termine del **dividendo** per il primo termine del **divisore**: il monomio ottenuto è il primo termine del **quoziente**

2) si moltiplica il monomio ottenuto per il divisore ed il prodotto che si ricava , cambiato di segno , si scrive sotto il dividendo

3) si divide il primo termine del primo resto per il primo termine del divisore ottenendo il secondo termine del quoziente

4) l'operazione cessa quando si trova come resto parziale un polinomio di grado minore rispetto al grado del polinomio divisore $\left(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x - 3\right):\left(3x^2 - 2x + 1\right)$

$2x^4$	$-3x^3$	$+x^2$	$-5x$	-3	$3x^2$	$-2x$	$+1$
$-2x^4$	$+\frac{4}{3}x^3$	$-\frac{2}{3}x^2$			$\frac{2}{3}x^2$	$-\frac{5}{9}x$	$-\frac{7}{27}$
#	$-\frac{5}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}x^2$	$-5x$	-3			
	$+\frac{5}{3}x^3$	$-\frac{10}{9}x^2$	$+\frac{5}{9}x$				
	#	$-\frac{7}{9}x^2$	$-\frac{40}{9}x$	-3			
		$+\frac{7}{9}x^2$	$-\frac{14}{27}x$	$+\frac{7}{27}$			
		#	$-\frac{134}{27}x$	$-\frac{74}{27}$			

$Q(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{9}x - \frac{7}{27}$ $R(x) = -\frac{134}{3}x - \frac{74}{27}$

Osservazione Se il dividendo è un polinomio incompleto, l'operazione di divisione si dispone come per i polinomi completi, spostando però i termini del dividendo in modo da lasciare liberi i posti dei termini mancanti

Osservazione Se i polinomi non sono ordinati, prima di eseguire la divisione, bisogna ordinarli secondo le potenze decrescenti della lettera rispetto alla quale si vuole eseguire la divisione

Osservazione Se $A(x)$ e $B(x)$ contengono più lettere bisogna stabilire rispetto a quale lettera si vuole eseguire la divisione

Osservazione Per eseguire la prova della divisione dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$ basta tenere presente la relazione: $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$ cioè moltiplicando il quoziente per il divisore ed aggiungendo il resto si dovrà ottenere il dividendo

Divisione di un polinomio per un binomio di primo grado

Supponiamo che il divisore $B(x)$ sia un binomio di primo grado: $B(x) = x + k$

TEOREMA DEL RESTO

Il resto **R** della divisione di un polinomio intero $A(x)$ per un binomio del tipo $x + k$ è uguale al valore numerico che il polinomio dividendo assume quando al posto della **x** si sostituisce il secondo termine del divisore cambiato di segno (cioè $-k$).

DIMOSTRAZIONE

$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$ Ma: $B(x) = x + k$, $A(x) = (x + k) \cdot B(x) + R(x)$

$x = -k \Rightarrow A(-k) = (-k + k) \cdot B(-k) + R(-k)$, $A(-k) = R(-k)$

$(5x^2 - 7x + 11):(x - 2)$, $R = 5(2)^2 - 7(2) + 11 = 20 - 14 + 11 = 17$

$(x^3 - 6x^2 - 4x + 3):(x + 2)$, $R = (-2)^3 - 6(-2)^2 - 4(-2) + 3 = -8 - 24 + 8 + 3 = -21$

TEOREMA DEL RESTO

Il resto **R** della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $ax + b$ è uguale al valore numerico che il polinomio dividendo $A(x)$ assume quando al posto della **x** sostituiamo il numero $-\frac{b}{a}$

DIMOSTRAZIONE

$$A(x) = Q(x)\cdot B(x) + R(x) \ , \ A(x) = (ax+b)\cdot B(x) + R(x) \ , \ x = -\frac{b}{a} \ \Rightarrow$$

$$A\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(-a\frac{b}{a} + b\right)\cdot B\left(-\frac{b}{a}\right) + R\left(-\frac{b}{a}\right) \quad , \quad A\left(-\frac{b}{a}\right) = R\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\left(3x^3 - 2x^2 - 5\right):(2x-5) \quad , \quad R = 3\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 = \frac{5}{8}$$

Regola di Ruffini

Serve a trovare rapidamente il quoziente ed il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x + k$ oppure del tipo $ax + b$

- $B(x) = x + k$ $\qquad \left(2x^4 - 9x^2 - 16\right):(x+3)$

termine noto del divisore cambiato di segno

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 0 & -9 & 0 & -16 \\ -3 & & -6 & 18 & -27 & 81 \\ \hline & 2 & -6 & 9 & -27 & 65 \end{array}$$

Termine noto del dividendo

Resto

coefficienti del quoziente Q(x) che è un polinomio inferiore di un grado rispetto al dividendo

$$Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27 \quad , \quad \boxed{R = 65}$$

- $B(x) = ax + b$ $\qquad$ Si procede come segue:

1) Si divide ogni termine del dividendo $A(x)$ ed ogni termine del divisore per **a**

2) si esegue la divisione come nel caso precedente

3) i coefficienti dei termini del quoziente non vengono alterati

4) il resto trovato, moltiplicato per **a**, è il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il polinomio $B(x)$

$$\left(7x^3 - 2x^2 - 3x + 1\right):(3x-1) \quad , \quad a = 3 \ , \ b = -1$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & & \frac{7}{9} & \frac{1}{27} & -\frac{26}{81} \\ \hline & \frac{7}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{26}{27} & \frac{1}{81} \end{array} \qquad Q(x) = \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{26}{27} \ , \ R = \frac{1}{81}\cdot 3 = \frac{1}{27}$$

U.D. N° 05

La fattorizzazione dei polinomi

Decomposizione in fattori di un polinomio

Decomporre un polinomio in fattori significa trovare un monomio o dei polinomi il cui **prodotto** è uguale al polinomio dato. Più semplicemente possiamo dire che **decomporre un polinomio in fattori** significa sostituirlo con un prodotto di fattori. La decomposizione di un polinomio in fattori è detta anche **fattorizzazione** del polinomio. Analizziamo adesso i casi più comuni di decomposizione in fattori di un polinomio.

MESSA IN EVIDENZA TOTALE

Si applica questo metodo quando tutti i termini del polinomio ammettono un $M.C.D.$ diverso da 1. In questo caso si raccoglie a fattore comune il $M.C.D.$ di tutti i termini.

$x^3 + x^2 + 6x = x\left(x^2 + x + 6\right)$ $\qquad$ $12a^3b^3 + 6a^2b + 2ab^2 = 2ab\left(6a^2b^2 + 3a + b\right)$

$$x(a + b) + 2y(a + b) + 4xy(a + b) = (a + b)(x + 2y + 4xy)$$

$$(2x + 3y)(5x - 4y) - 2(2x + 3y)(2x + y) = (2x + 3y)[5x - 4y - 2(2x + y)]$$

$$(x-3y)^2-2(x-3y)(4x-y)+y(x-3y)=(x-3y)\left[(x-3y)-2(4x-y)+y\right]=$$
$$=(x-3y)(x-3y-8x+2y+y)=-7x(x-3y)=7x(3y-x)$$

MESSA IN EVIDENZA PARZIALE

Si applica questo procedimento quando è possibile la messa in evidenza a gruppi in modo che , mediante una successiva messa in evidenza totale , il polinomio dato viene decomposto nel prodotto di due polinomi . $ax + ay + bx + xy = a(b + y) + x(b + y) = (b + y)(a + x)$

$$20a^2x^2-25x^2y-16a^2y+20y^2=5x^2\left(4a^2-5y\right)-4y\left(4a^2-5y\right)=\left(4a^2-5y\right)\left(5x^2-4y\right)$$

Il polinomio da decomporre è un binomio differenza di due quadrati

La decomposizione si effettua tenendo presente la seguente identità: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$25x^4y^2 - \frac{1}{4}a^2 = \left(5x^2y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(5x^2y - \frac{1}{2}a\right)\left(5x^2y + \frac{1}{2}a\right)$$

Il polinomio da decomporre è un binomio somma o differenza di due cubi

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$27y^6 + 8a^3 = \left(3y^2\right)^3 + (2a)^3 = \left(3y^2 + 2a\right)\left(9y^4 - 6ay^2 + 4a^2\right)$$

$$\frac{1}{8}a^9b^3 - 125 = \left(\frac{1}{2}a^3b\right)^3 - (5)^3 = \left(\frac{1}{2}a^3b - 5\right)\left(\frac{1}{4}a^6b^2 + \frac{5}{2}a^3b + 25\right)$$

Il polinomio da decomporre è un trinomio che è lo sviluppo del quadrato di un binomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$4a^4b^2 + 9c^2 - 12a^2bc = \left(2a^2b - 3c\right)^2 \qquad 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

Il polinomio da decomporre è un quadrinomio che è lo sviluppo del cubo di un binomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \qquad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = (2x - y)^3$$

$$8a^3x^3 - 60a^2x^2y + 150axy^2 - 125y^3 = (2ax - 5y)^3$$

Il polinomio da decomporre è lo sviluppo del quadrato di un polinomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente una elle seguenti identità:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = (a + b + c + d)^2$$

$$4x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{9}{16} - \frac{4}{3}xy - 3x + \frac{1}{2}y = \left(2x - \frac{1}{3}y - \frac{3}{4}\right)^2$$

Il polinomio da decomporre è un trinomio del tipo $x^2 + sx + p$

Se è possibile trovare due numeri **a** e **b** per i quali risulta $a + b = s$ $a \cdot b = p$ allora il polinomio si decompone tenendo presente la seguente identità: $x^2 + sx + p = (x + a)(x + b)$

$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$ $a = -2$, $b = +7$

$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$ $a = -3$, $b = -5$

Il polinomio da decomporre è un trinomio avente la seguente forma: $ax^2 + bx + c$

Se è possibile trovare due numeri **m** ed **n** tali che $m + n = b$, $m \cdot n = a \cdot c$ allora la decomposizione avviene sostituendo il numero **b** con la somma $m + n$. Si ottiene:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + (m + n)x + c = ax^2 + mx + nx + c$$

Si effettua prima un raccoglimento parziale e poi un raccoglimento totale.

$6x^2 + 23x + 7 = 6x^2 + 2x + 21x + 7 = 2x(3x+1) + 7(3x+1) = (3x+1)(2x+7)$

$b = 23, m = 2, n = 21$, $m + n = 2 + 21 = 23 = b$, $m \cdot n = 2 \cdot 21 = 42 = a \cdot c = 6 \cdot 7 = 42$

Se il polinomio da decomporre si annulla per un certo valore $x = k$ della sua variabile, esso può essere decomposto applicando una o più volte la **regola di Ruffini**.

Un fattore è $x - k$, l'altro fattore è un polinomio (inferiore di un grado rispetto al polinomio da decomporre) i cui coefficienti si ricavano applicando la regola di Ruffini.

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = (x-1)(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) =$$

$$= (x-1)(x-2)(x^2 - x - 12) = (x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$$

	1	-4	-7	+34	-24
1		1	-3	-10	+24
	1	-3	-10	+24	#
2		2	-2	-24	
	1	-1	-12	#	
-3		-3	12		
	1	-4	#		

I numeri **k**, se sono numeri interi relativi, vanno ricercati tra i sottomultipli (positivi o negativi) del termine noto del polinomio .

Zeri di un polinomio

Sia $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ un polinomio di grado n a coefficienti interi. Il numero α dicesi **zero** del polinomio $P(x)$ se annulla il polinomio cioè se, dopo avere messo il numero α al posto della variabile x ed avere eseguito tutti i calcoli, troviamo come risultato finale il numero zero. In simboli abbiamo: $P(\alpha) = a_o \alpha^n + a_1 \cdot \alpha^{n-1} + a_2 \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot \alpha + a_n = 0$

a_o è il **coefficiente del termine di grado massimo** del polinomio $P(x)$,

a_n è il **termine noto** del polinomio $P(x)$.

Il numero $x=-2$ è uno **zero** del polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3$ in quanto risulta

$$P(-2)=2(-2)^5+3(-2)^4-6(-2)^3+6(-2)^2-8(-2)+3=0$$

come si verifica facilmente eseguendo tutti i calcoli.

Zeri interi relativi di un polinomio

Condizione necessaria ma non sufficiente perché il numero intero relativo $m \in Z$ sia uno **zero** del polinomio $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ è che esso sia un divisore (positivo o negativo) del termine noto a_n. Questo significa che se il numero intero relativo $m \in Z$ annulla il polinomio esso è sicuramente un sottomultiplo del termine noto a_n. Viceversa, **m** può essere un sottomultiplo del termine noto a_n **senza essere uno zero** del polinomio $P(x)$.

Zeri razionali di un polinomio

Un numero razionale è un numero che si può scrivere sotto forma di frazione, cioè un numero del tipo $\frac{m}{n}$ (con $m \in N$ ed $n \in N^*$ primi tra di loro).

Condizione necessaria ma non sufficiente perché il numero razionale $\frac{m}{n}$ (con $m \in N$ ed $n \in N^*$ primi tra di loro) sia uno **zero** del polinomio $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ è che:

1) **m** sia divisore (positivo o negativo) del termine noto a_n

2) **n** sia divisore (positivo o negativo) del coefficiente a_o del termine di grado più elevato $a_o x^n$

Questo significa che se il numero razionale $\frac{m}{n}$ è uno **zero** del polinomio $P(x)$, allora **m** va ricercato tra i sottomultipli (positivi o negativi) del termine noto a_n ed **n** va ricercato tra i sottomultipli (positivi o negativi) del coefficiente a_o del termine di grado più elevato $a_o x^n$.

Tuttavia il numero razionale $\frac{m}{n}$ può verificare i requisiti **1)** e **2)** senza essere uno zero del polinomio $P(x)$, perché noi sappiamo che si tratta di una condizione necessaria ma non sufficiente.

N.B. Una **condizione necessaria** rappresenta una tesi, una **condizione sufficiente** rappresenta una ipotesi.

Consideriamo il polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3$ I suoi eventuali **zeri interi relativi** vanno ricercati tra i sottomultipli (positivi o negativi) del **termine noto** 3, cioè tra i numeri: $\pm 1,\ \pm 3$, mentre i suoi eventuali **zeri razionali** vanno ricercati tra i numeri $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$

Concludendo possiamo affermare che gli eventuali zeri razionali del polinomio $P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3$ vanno ricercati tra i seguenti numeri: ± 1, ± 3, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$

	2	3	-6	6	-8	3	$x_1 = 1$
1		2	5	-1	5	-3	$x_2 = -3$
	2	5	-1	5	-3	//	
-3		-6	3	-6	3		
	2	-1	2	-1	//		
$\frac{1}{2}$		1	0	1			$x_3 = \frac{1}{2}$
	2	//	2	//			

Il polinomio proposto decomposto in fattori assume la forma:

$$P(x)=2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3=(x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=2(x-1)(x+3)(2x-1)(x^2+1)$$

Non è superfluo osservare che il numero $x=\frac{3}{2}$ pur avendo come numeratore un divisore del termine noto e come denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo non è uno zero del nostro polinomio.

ALTRI ESEMPI DI DECOMPOSIZIONE IN FATTORI

$x^5 - xy^4 - x^4y + y^5 = x(x^4 - y^4) - y(x^4 - y^4) = (x^4 - y^4)(x - y) =$

$= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x - y) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x - y) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)^2$

$x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 + (x + y)(x^2 - xy + y^2)^2 =$

$= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 - xy) + (x + y)(x^2 - xy + y^2)^2 =$

$= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy + x + y)$

$a^3 + b^3 + a^2 - b^2 + a^2b + ab^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a - b)(a + b) + ab(a + b) =$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2 + a - b + ab) = (a + b)(a^2 + b^2 + a - b)$

$x^3 - y^3 - x^2 + y^2 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x - y)(x + y) =$

$= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - x - y)$

$a^4 + a^2 - b^4 - b^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 1) =$

$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2 + 1)$

$x^2 - 4y^2 - x^3 - 8y^3 = (x - 2y)(x + 2y) - (x^3 + 8y^3) =$

$= (x - 2y)(x + 2y) - (x + 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) =$

$= (x + 2y)(x - 2y - x^2 + 2xy - 4y^2)$

$a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 = a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)(a + b) =$

$= (a + b)(a + b)(a - b) = (a + b)^2(a - b)$

$M.C.D.$ e $m.c.m.$ di polinomi

Prima bisogna decomporre in **fattori primi** (cioè non ulteriormente decomponibili) i polinomi di cui vogliamo calcolare il $M.C.D.$ o il $m.c.m.$. Il $M.C.D.$ di due o più polinomi è uguale al prodotto dei fattori comuni presi una sola volta con l'esponente minore. Il $m.c.m.$ di due o più polinomi è uguale al prodotto dei fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente maggiore.

Calcolare il $M.C.D.$ ed il $m.c.m.$ dei seguenti polinomi:

$a^2 - 4ab + b^2$ $\qquad$ $a^2 - 4b^2$ $\qquad$ $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

$a^2 - 4ab + b^2 = (a-2b)^2$, $a^2 - 4b^2 = (a-2b)(a+2b)$, $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3 = (a-2b)^3$

$M.C.D. = a - 2b$ $\qquad$ $m.c.m. = (a + 2b)(a - 2b)^3$

U.D. N° 06

Le frazioni algebriche

01) **La semplificazione di una frazione algebrica**

02) **Riduzione di due o più frazioni algebriche al minimo comune denominatore**

03) **Somma algebrica di due o più frazioni algebriche**

04) **Moltiplicazione di due o più frazioni algebriche**

05) **Divisione di due frazioni algebriche**

06) **Potenza di una frazione algebrica**

Frazioni algebriche

Dicesi **frazione algebrica** il quoziente indicato di due espressioni algebriche intere (monomi o polinomi). I termini delle frazioni algebriche si chiamano **numeratore** (o **dividendo**) e **denominatore** (o **divisore**). Se il denominatore di una frazione algebrica è **zero**, la frazione non ha significato.

Semplificazione di una frazione algebrica

PROPRIETA' INVARIANTIVA

Moltiplicando o **dividendo** il numeratore ed il denominatore di una stessa frazione algebrica per una stessa espressione algebrica non nulla si ottiene una frazione equivalente.

Questa proprietà ci consente di eseguire la semplificazione delle frazioni algebriche che consiste nella soppressione di eventuali fattori comuni ai due termini di una frazione. Una frazione algebrica si dice **ridotta ai minimi termini** o **irriducibile** quando il numeratore ed il denominatore non hanno alcun fattore in comune.

Per semplificare una frazione algebrica si procede come segue:

1) Si decompongono in fattori primi sia il numeratore che il denominatore

2) Si sopprimono i fattori comuni del numeratore e del denominatore

$$\frac{m^3 + 3m^2}{m^2 - 9} = \frac{m^2(m+3)}{(m+3)(m-3)} = \frac{m^2}{m-3} \quad , \quad \frac{a^2-4}{a^2+2a} = \frac{(a+2)(a-2)}{a(a+2)} = \frac{a-2}{a}$$

$$\frac{a^2-4}{3a+6} = \frac{(a+2)(a-2)}{3(a+2)} = \frac{a-2}{3}$$

$$\frac{4x^2-4x+1-y^2}{4x^2-4xy+y^2-1} = \frac{(2x-1)^2-y^2}{(2x-y)^2-1} = \frac{(2x-1+y)(2x-1-y)}{(2x-y+1)(2x-y-1)} = \frac{2x-1+y}{2x-y+1}$$

Riduzione di due o più frazioni algebriche al minimo comune denominatore

Per ridurre due o più frazioni algebriche al loro **minimo comune denominatore** si procede come segue:

1) Si riducono le frazioni algebriche ai minimi termini

2) Si calcola il $m.c.m.$ fra i denominatori di tutte le frazioni e lo si pone come **minimo comune denominatore**

3) Si divide il $m.c.m.$ fra i denominatori di tutte le frazioni e lo si pone come **minimo comune denominatore**

$$\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{2a}{x-1} \quad , \quad \frac{-5b}{x+1} \quad , \quad \frac{4a^2-3b}{x^2-1} \qquad m.c.m. = x(x+1)(x-1)$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \quad , \quad \frac{2ax(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \quad , \quad \frac{-5bx(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \quad , \quad \frac{x(4a^2-3b)}{x(x+1)(x-1)}$$

Somma algebrica di due o più frazioni algebriche

Per sommare due o più frazioni algebriche si procede come segue:

1) Si riducono tutte le frazioni algebriche al **minimo comune denominatore**

2) Si scrive una frazione algebrica che ha come denominatore il **minimo comune denominatore** precedentemente trovato e come numeratore la somma algebrica dei numeratori delle frazioni algebriche ridotte al **minimo comune denominatore**

3) Si eseguono tutte le operazioni indicate nel numeratore, si riducono i termini simili e si decompone in fattori primi il polinomio trovato. Se possibile, si semplifica la frazione ottenuta.

$$\frac{5}{x^2-2x} - \frac{4x(x+2)}{x^2-4} + \frac{3x+5}{2x} = \frac{5}{x(x-2)} - \frac{4x(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{3x+5}{2x} =$$

$$= \frac{10-8x^2+(3x+5)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{10-8x^2+3x^2-6x+5x-10}{2x(x-2)} = \frac{-5x^2-x}{2x(x-2)} =$$

$$= \frac{-x(5x+1)}{2x(x-2)} = \frac{-(5x+1)}{2(x-2)} = \frac{5x+1}{2(2-x)}$$

Moltiplicazione di due o più frazioni algebriche

Il **prodotto** di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori .

OSSERVAZIONE

Conviene , per prima cosa , decomporre in fattori primi il numeratore ed il denominatore di ciascuna frazione , poi si semplifica ed infine si esegue la moltiplicazione .

$$\frac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\frac{x(a^2-b^2)}{a+x}\cdot\frac{-2}{a-x}=\frac{\cancel{(a+x)}\,\cancel{(a-x)}}{\cancel{a+b}}\cdot\frac{x\,\cancel{(a+b)}\,(a-b)}{\cancel{a+x}}\cdot\frac{-2}{\cancel{a-x}}=-2x(a-b)=2x(b-a)$$

$$\boxed{\frac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\frac{x(a^2-b^2)}{a+x}\cdot\frac{-2}{a-x}}=\frac{(a+x)(a-x)}{a+b}\cdot\frac{x(a+b)(a-b)}{a+x}\cdot\frac{-2}{a-x}=-2x(a-b)=$$

$$=2x(b-a)$$

Divisione di due frazioni algebriche

Il **quoziente** di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione algebrica per l'inversa della seconda.

$$\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{(x-a)^4}{x+a}=\frac{(x-a)^3}{(x+a)}\cdot\frac{(x+a)}{(x-a)^4}=\frac{1}{x-a}$$

Potenza di una frazione algebrica

Per elevare a **potenza** una frazione algebrica basta elevare alla data potenza sia il numeratore che il denominatore.

$$\left[\frac{(x+y)^2}{a(x-y)^3}\right]^4=\frac{(x+y)^8}{a^4(x-y)^{12}}$$

OSSERVAZIONE

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)^n}=\frac{1}{\frac{A^n}{B^n}}=\frac{B^n}{A^n}=\left(\frac{B}{A}\right)^n$$

U.D. N° 07

Le equazioni di primo grado ad una incognita

Identità ed equazioni

Dicesi **identità** l'uguaglianza tra due espressioni algebriche verificata da tutti i possibili valori numerici assegnati a tutte le lettere che vi figurano. Con parole diverse possiamo dire che l'**identità** è una **uguaglianza** **incondizionata**. L'uguaglianza $(2x - y)^2 = y^2 + 4x^2 - 4xy$ è una **identità** in quanto qualunque siano i valori numerici attribuiti alla **x** ed alla **y** il primo membro è sempre numericamente uguale al secondo membro. Siano $A(x)$ e $B(x)$ due generici polinomi in x. L'uguaglianza $A(x) = B(x)$ posta allo scopo di stabilire se esistono valori numerici della **x** che rendono il primo membro numericamente uguale al secondo membro dicesi **equazione ad una incognita**. Con altre parole possiamo dire che l' **equazione è una uguaglianza condizionata**, cioè una uguaglianza verificata un numero finito di volte. L'uguaglianza $x + 1 = 2x$ è una **equazione** in quanto l'uguaglianza tra i polinomi $x+1$ e $2x$ si verifica una sola volta, precisamente quando attribuiamo alla **x** il valore **1**.

Osservazione: Una **identità** esprime un **teorema**, una **equazione** esprime un **problema**

La variabile che figura nell'equazione dicesi **incognita** dell'equazione. I valori dell'incognita che verificano l'equazione sono le **soluzioni** o le **radici** dell'equazione. L'espressione algebrica scritta alla sinistra del segno di uguaglianza << = >> dicesi **primo membro** dell'equazione l'altra, posta alla destra del segno =, dicesi **secondo membro**. **Risolvere** una equazione significa trovare le soluzioni dell'equazione. Una equazione i cui termini hanno soltanto coefficienti numerici dicesi **equazione numerica**, mentre dicesi **equazione letterale** se almeno un termine di essa ha coefficiente letterale. Una **equazione** si dice **intera** se l'incognita non figura in nessun denominatore, altrimenti dicesi **fratta** o **frazionaria**. Due equazioni si dicono **equivalenti** se ogni soluzione della prima è soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima.

La risoluzione delle equazioni si basa su alcuni principi fondamentali:

Primo principio di equivalenza Aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una equazione una stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente alla data. In simboli abbiamo:

$$A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) \pm M(x) = B(x) \pm M(x)$$

Dal principio di equivalenza si deducono i seguenti corollari

COROLLARIO N°1 In una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro, purché lo si cambi di segno

COROLLARIO N°2 Se nei due membri di un'equazione figurano due termini uguali e con lo stesso segno, essi si possono eliminare

Secondo principio di equivalenza Moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per un numero diverso da zero o per una espressione algebrica diversa da zero e non contenente l'incognita si ottiene una equazione equivalente alla data.

COROLLARIO Cambiando il segno a tutti i termini del primo e del secondo membro di un'equazione (il significa **moltiplicare ambo i membri per** -1) si ottiene una equazione equivalente alla data.

Terzo principio Una equazione che sia il prodotto uguagliato a zero di polinomi contenenti l'incognita è equivalente alle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i singoli polinomi

$A(x)\cdot B(x)\cdot C(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0$ oppure $B(x) = 0$ oppure $C(x) = 0$

OSSERVAZIONE Ogni equazione $A(x) = B(x)$ può essere ricondotta alla seguente forma:

$P(x) = 0$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado **n** che dicesi anche **grado dell'equazione**.

Infatti basta eseguire tutte le operazioni indicate nei due membri dell'equazione, portare tutti i termini ottenuti al primo termine e sommare i termini simili.

Equazione di primo grado ad una incognita

E' una equazione riconducibile alla seguente forma: $ax = b$ **[*]**

La soluzione dell'equazione [*] è una frazione che ha per numeratore il termine noto del secondo membro e per denominatore il coefficiente dell'incognita, cioè: $x = \dfrac{b}{a}$

$$\frac{14x-9}{11} - \frac{1}{3}\left[\frac{17}{2}x - (5-4x)\right] = \frac{1}{2} - \frac{8x+1}{3}$$

$$\frac{14x-9}{11} - \frac{1}{3}\left(\frac{17x-10+8x}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{8x+1}{3} \quad , \quad \frac{14x-9}{11} - \frac{25x-10}{6} = \frac{1}{2} - \frac{8x+1}{3}$$

$$6(14x-9) - 11(25x-10) = 33 - 22(8x+1) \ , \ 84x - 54 - 275x + 110 = 33 - 176x - 2$$

$$84x - 275x + 176x = 33 - 22 + 54 - 110 \quad , \quad -15x = -45 \quad , \quad 15x = 45 \quad , \quad x = \frac{45}{15} = 3$$

$x = 3$ è la **soluzione** dell'equazione data.

La **verifica** dell'equazione si effettua nella seguente maniera:

1) nell'equazione data al posto della x si sostituisce la soluzione trovata

2) si eseguono tutti i calcoli nel primo membro e nel secondo membro dell'equazione

3) il membro deve essere numericamente uguale al secondo membro

$$\frac{14\cdot 3 - 9}{11} - \frac{1}{3}\left[\frac{17\cdot 3}{2} - (5 - 4\cdot 3)\right] = \frac{1}{2} - \frac{8\cdot 3 + 1}{3} \quad , \quad \frac{42 - 9}{11} - \frac{1}{3}\left(\frac{51}{2} + 7\right) = \frac{1}{2} - \frac{25}{3}$$

$$3 - \frac{65}{6} = \frac{3 - 50}{6} \quad , \quad -\frac{47}{6} = -\frac{47}{6}$$

$$\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{3}{x + 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} \qquad x \neq \pm 1 \qquad \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \quad , \quad m.c.m. = (x+1)(x-1)$$

$$(x + 1)^2 - 3(x - 1) = x^2 \quad , \quad x^2 + 2x + 1 - 3x + 3 = x^2 \quad , \quad x = 4$$

$$\frac{6x}{16x^2 - 9} - \frac{5x - 3}{6x - 8x^2} + \frac{2x + 9}{8x^2 + 6x} = \frac{5}{4x - 3}$$

$$\frac{6x}{(4x + 3)(4x - 3)} - \frac{5x - 3}{2x(3 - 4x)} + \frac{2x + 9}{2x(4x + 3)} = \frac{5}{4x - 3}$$

$$\frac{6x}{(4x + 3)(4x - 3)} + \frac{5x - 3}{2x(4x - 3)} + \frac{2x + 9}{2x(4x + 3)} = \frac{5}{4x - 3} \qquad m.c.m. = 2x(4x + 3)(4x - 3)$$

$$x \neq 0 \quad , \quad x \neq \pm\frac{3}{4} \qquad 12x^2 + (5x - 3)(4x + 3) + (2x + 9)(4x - 3) = 10x(4x + 3)$$

$$12x^2 + 20x^2 + 15x - 12x - 9 + 8x^2 - 6x + 36x - 27 = 40x^2 + 30x$$

$$15x - 12x - 6x + 36x - 30x = 9 + 27 \quad , \quad 3x = 36 \quad , \quad x = \frac{36}{3} = 12$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{2x + 4}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{4(x - 2)} - \frac{1}{4(x + 2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} \quad , \quad m.c.m. = 4x(x+2)(x-2) \quad , \quad x \neq 0, x \neq \pm 1$$

$$6(x^2 - 4) - x(x + 2) - x(x - 2) = 4(x^2 - 4) - 4x \, , \; 6x^2 - 24 - x^2 - 2x - x^2 + 2x = 4x^2 - 16 - 4x$$

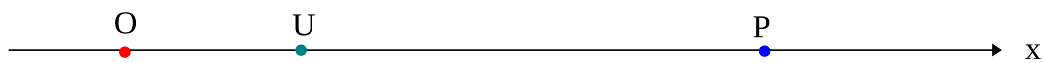
$$-2x + 2x + 4x = -16 + 24 \quad , \quad 4x = 8 \quad , \quad x = 2 \quad \textbf{(R.N.A.)}$$

U.D. N° 08

I sistemi di primo grado a due incognite

Coordinate cartesiane

Su di una retta **r** consideriamo un punto **O**, detto **origine**, un **verso positivo** indicato con una freccia ed un **segmento unitario** OU. In questo caso la retta **r** dicesi **asse delle ascisse** e viene indicata col simbolo x e di solito è disegnata in posizione orizzontale.



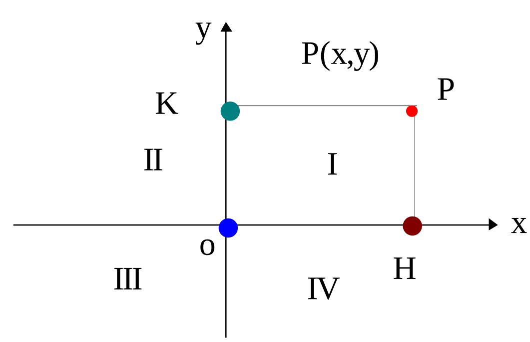
Ogni punto $P \in r$ individua il segmento OP. Noi sappiamo che $\frac{OP}{OU}$ è un numero reale che esprime la misura del segmento OP rispetto al segmento OU assunto come segmento unitario.

Adesso poniamo: $\frac{OP}{OU} = x$ e conveniamo di considerare x **positivo** (**negativo**) se P si trova alla **destra** (**sinistra**) di **O**. Il numero x dicesi **ascissa del punto P**.

Da quanto abbiamo detto è evidente che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra i numeri reali relativi $\mathbb{R}$ ed i punti **P** di una retta **r** sulla quale abbiamo fissato un **punto origine** **O**, un **verso positivo**, una **unità di misura** per i segmenti.

Adesso consideriamo due rette orientate **x** ed **y** fra loro perpendicolari. La retta **x** è orientata da sinistra verso destra, la retta **y** è orientata dal basso verso l'alto. Sia **O** il punto comune alle rette x ed y. Sia **P** un punto qualsiasi del piano. Sia **H** la proiezione ortogonale di P sulla retta x e K la proiezione ortogonale di P sulla retta y.

Sia $x = \frac{OH}{OU}$ l'ascissa del punto H rispetto alla retta orientata x, sia $y = \frac{OK}{OU}$ l'ascissa del punto K rispetto alla retta orientata y. I numeri reali relativi x ed y si dicono le **coordinate cartesiane** del punto **P**.



Si scrive $P(x,y)$ e si legge <<**P di coordinate x ed y**>>. x è detta **ascissa** del punto P, y è detta **ordinata** del punto P. La retta orientata **x** è detta **asse delle ascisse** o **asse delle x**, la retta orientata y è detta **asse delle ordinate** o **asse delle y**.

Le due rette x ed y costituiscono un **sistema di assi cartesiani ortogonali**. Il punto **O** è detto **origine degli assi**. Da quanto si è detto si deduce che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani. Le rette **x** ed **y** dividono il piano in 4 parti ciascuna delle quali prende il nome di **quadrante**. Le rette **x** ed **y** e le loro due bisettrici dividono il piano in **8** parti, ciascuna delle quali prende il nome di **ottante**.

Sistema di primo grado a due incognite

Sistema di primo grado a due incognite è l'insieme di due equazioni di primo grado a due incognite di cui vogliamo trovare, quando esiste, la **soluzione comune**. Ridotto a forma **normale** o **canonica** o **tipica**, assume la seguente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

dove x ed y sono le **incognite**, **a** ed a_1 sono i coefficienti dell'incognita x, **b** e b_1 sono i **coefficienti dell'incognita y,** c **e** c_1 sono **i termini noti**.

Un sistema di primo grado a due incognite può essere risolto con 4 metodi diversi:

1) metodo del confronto **2) metodo di sostituzione** **3) metodo di addizione e sottrazione** detto anche **metodo di riduzione** **4) metodo di Cramer**.

METODO DI SOSTITUZIONE

Si procede come segue:

1) Si risolve una delle due equazioni rispetto alla x (rispetto alla y)

2) L espressione così ricavata si sostituisce nell'altra equazione al posto della x (della y). Si ottiene una equazione di primo grado in y (x) la cui soluzione dà il valore della y (x)

3) Il valore trovato per la y (per la x) viene sostituito nell'espressione precedentemente trovata, pervenendo così al valore della x (della y).

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -5x+y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4 - 3y \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4-3y}{2} \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad -5\left(\frac{4-3y}{2}\right) + y = 7 \quad \frac{-20+15y}{2} + y = 7$$

$$-20 + 15y + 2y = 14 \quad , \quad 17y = 20+14 \quad , \quad 17y = 34 \quad , \quad y = \frac{34}{17} = 2$$

$$x = \frac{4-3y}{2} = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad \boxed{x = -1 \; , \; y = 2}$$

METODO DEL CONFRONTO

Si procede come segue:

1) Si risolvono le due equazioni del sistema rispetto alla medesima incognita ,ad esempio rispetto ad x

2) Si uguagliano le due espressioni algebriche ottenute e si perviene ad una equazione di primo grado in y

3) Si risolve questa equazione ottenendo il valore della y , cioè si ottiene $y = y_o$

4) Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso x) si ottiene sostituendo quello trovato y_o in una qualsiasi delle due espressioni precedentemente trovate .

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{7y + 27}{3} \\ x = \dfrac{-2y + 4}{5} \end{cases} \qquad \frac{7y + 27}{3} = \frac{-2y + 4}{5} \quad , \quad 35y + 135 = -6y + 12$$

$$35y + 6y = -135 + 12 \quad , \quad 41y = -123 \quad , \quad y = -\frac{123}{41} = -3$$

$$x = \frac{7(-3) + 27}{3} = \frac{-21 + 27}{3} = \frac{6}{3} = 2 \qquad , \qquad x = 2 \ , \ y = -3$$

METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE (o di **riduzione** o della **combinazione lineare**)

Si procede come segue:

1) Se vogliamo ricavare la x allora bisogna eliminare la y

2) Si calcola il **m.c.m.** tra i coefficienti della y, cioè tra **b** e b_1. Sia $k = m.c.m.(b, b_1)$. Si moltiplicano ambo i membri della prima equazione per $\frac{k}{b}$ ed ambo i membri della seconda equazione per $\frac{k}{b_1}$. Otteniamo due equazioni nelle quali i termini contenenti la y hanno coefficienti uguali od opposti.

3) Sommiamo o sottraiamo ambo i membri delle due equazioni così ottenute pervenendo ad una equazione di primo grado nella x, risolta la quale otteniamo il valore della x ,ad esempio $x = x_o$.

4) Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso la y) può essere determinato con un procedimento analogo, oppure sostituendo il valore trovato x_o in una delle due equazioni del sistema e risolvendo l'equazione ad una incognita (nel nostro caso in x) che ne risulta

$$\begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \qquad m.c.m.(7,2) = 14 \quad , \quad \frac{14}{2} = 2 \quad , \quad \frac{14}{2} = 7$$

$$\begin{cases} 6x - 14y = 54 \\ 35x + 14y = 28 \\ \hline 41x \quad \neq \quad = 82 \end{cases} \qquad \text{sommiamo membro a membro} \quad , \quad x = \frac{82}{41} = 2$$

$$\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \qquad m.c.m.(3,5) = 15 \quad , \quad \frac{15}{3} = 5 \quad , \quad \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{cases} 15x - 35y = 135 \\ 15x + 6y = 12 \\ \hline \neq \quad -41y = 123 \end{cases} \qquad \text{Si sottrae membro a membro} \qquad y = -\frac{123}{41} = -3$$

METODO DI CRAMER

Dati quattro numeri a, b, a_1, b_1 il numero $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b$ dicesi **determinante del secondo ordine** e si ottiene sottraendo dal prodotto dei termini della diagonale discendente il prodotto dei termini della diagonale ascendente.

Se il sistema che vogliamo risolvere è ridotto a forma canonica, cioè è del tipo: $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$

allora abbiamo:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = **determinante del sistema** = determinante formato dai coefficienti delle incognite

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = **determinante dell'incognita x** = determinante che si ottiene dal determinante del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$ = **determinante dell'incognita y** = determinante che si ottiene dal determinante del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti

Le soluzioni del sistema dato ci vengono fornite dalle due seguenti frazioni:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{54 + 28}{6 + 35} = \frac{82}{41} = 2 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 135}{6 + 35} = -\frac{123}{41} = -3$$

Unità Didattica N°09

I RADICALI

Numeri reali

Dicesi **numero razionale** un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma i frazione. Sono pertanto **numeri razionali**: **1)** tutti i **numeri interi** **2)** tutti i **numeri decimali limitati** **3)** tutti i **numeri decimali periodici**. Dicesi **numero irrazionale** ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. Un numero **razionale** o **irrazionale** dicesi **reale**.

$$\text{numeri reali}\begin{cases}\text{RAZIONALI (numeri frazionari)}\begin{cases}\text{1) Numeri interi}\\ \text{2) Numeri decimali limitati}\\ \text{3) Numeri decimali periodici}\end{cases}\\[2em] \text{IRRAZIONALI} = \text{numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione} = \\ \qquad = \text{numeri decimali illimitati e non periodici}\end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Ogni numero irrazionale può essere espresso con esattezza solo mediante il simbolo che lo rappresenta e mai con un numero razionale. Ad esempio, sono irrazionali i seguenti numeri:

$$\sqrt{2} \quad , \quad \pi \quad , \quad \sqrt[3]{11}$$

Quando un numero irrazionale è dato mediante un numero intero o mediante un numero decimale, il valore che l'esprime è un valore **approssimato**.

Radicali Aritmetici

Se **n** è un numero naturale non nullo ed **a** un numero reale non negativo, definiamo **radice ennesima aritmetica** del numero positivo **a**, e la indichiamo con la scrittura $\sqrt[n]{a}$, il numero reale non negativo **x** la cui potenza ennesima è uguale ad **a**. Sussiste sempre la seguente equivalenza: $\sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a \qquad \forall\, a , x \in R^+ \quad , \quad \forall\, n \in N_o$

La scrittura $\sqrt[n]{a}$ dicesi **radicale aritmetico**, **a** dicesi **radicando**, **n** **indice del radicale**, il simbolo $\sqrt{\ }$ dicesi **segno di radice**.

Quando risulta $n = 2$ scriviamo $\sqrt{a}$ e leggiamo **radice quadrata di a**.

$n = 3$: $\sqrt[3]{a}$ (**radice cubica** di a o radice terza di a), $n = 4$: $\sqrt[4]{a}$ (radice quarta di a)

$n = 1 \Rightarrow \sqrt[1]{a} = a$ cioè la **radice prima di un numero è uguale al numero stesso**

<<L'operazione mediante la quale si passa dal numero reale **a** alla sua radice aritmetica **x** si chiama **estrazione di radice**>>.

OSSERVAZIONE N° 1

Se il radicale assume la forma $\sqrt[n]{a^m}$ diciamo che **m** è l'**esponente del radicando**, se assume la forma $\sqrt[n]{a^m \cdot b^k}$ diciamo che **m** e **k** sono gli **esponenti dei fattori del radicando**.

OSSERVAZIONE N° 2

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ cioè la **potenza ennesima della radice ennesima aritmetica del numero a è uguale al numero stesso**. Infatti: $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a \Rightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

PROPRIETA' INVARIANTIVA

Il valore di un radicale aritmetico non muta se moltiplichiamo o dividiamo l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero positivo (non nullo). In simboli abbiamo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}}$$

SEMPLIFICAZIONE DI UN RADICALE

Per semplificare un radicale si procede come segue:

1) Si decompone il radicando in fattori primi

2) Si calcola i l M.C.D. fra l'indice del radicale e gli esponenti dei fattori del radicando

3) Si divide per il M.C.D. trovato l'indice e gli esponenti dei fattori del radicando

ESEMPI

$$\sqrt[6]{a^2(x+y)^{14}} = \sqrt[3]{a(x+y)^7} \qquad M.C.D.(6,2,14) = 2$$

$$\sqrt[8]{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt[8]{\left(a^2 + b^2\right)^2} = \sqrt[4]{a^2 + b^2}$$

Un radicale si dice **irriducibile** o **ridotto ai minimi termini** quando risulta uguale ad **1** il M.C.D. fra l'indice del radicale e gli esponenti dei fattori del radicando.

Riduzione di due o più radicali allo stesso indice

Per ridurre due o più radicali allo stesso indice si procede come segue:

1) Si decompongono in fattori primi tutti i radicandi

2) Si rendono **irriducibili** tutti i radicali

3) Si calcola il **m.c.m.** fra gli indici di tutti i radicali e lo si assume come minimo comune indice per tutti i radicali

4) Si divide il m.c.m. per l'indice di ciascun radicale e si moltiplica il quoziente ottenuto per l'esponente di ogni fattore di ciascun radicando

$\sqrt[10]{a^4b^6}\ ,\ \sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}\ ,\ \sqrt[3]{(b-5)^2}$	$\sqrt[10]{a^4b^6}\ ,\ \sqrt[4]{(a+b)^2}\ ,\ \sqrt[3]{(b-5)^2}$
$\sqrt[5]{a^2b^3}\ ,\sqrt{a+b}\ ,\sqrt[3]{(b-5)^2}\ ,\ m.c.m.(5,2,3)=30$	$\sqrt[30]{a^{12}b^{18}}\ ,\ \sqrt[30]{(a+b)^{15}}\ ,\ \sqrt[30]{(b-5)^{20}}$

Moltiplicazione di radicali

Teorema: Il prodotto di due o più radicali aritmetici aventi lo stesso indice è un radicale aritmetico che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi. In simboli abbiamo: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

Esempio: $\sqrt[5]{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}}=\sqrt[5]{\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{(x-y)^2}{x+y}}=\sqrt[5]{x-y}$

Osservazione: Per moltiplicare due o più radicali aventi indici diversi occorre ridurli prima allo stesso indice e poi moltiplicarli.

ESEMPIO

$$\sqrt[3]{\frac{xy-y^2}{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{2x-2y}}=\sqrt[3]{\frac{y(x-y)}{x}}\cdot\sqrt{\frac{x}{2(x-y)}}=\sqrt[6]{\frac{y^2(x-y)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^3}{8(x-y)^3}}=\sqrt[6]{\frac{y^2(x-y)^2}{x^2}\cdot\frac{x^3}{8(x-y)^3}}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{xy^2}{8(x-y)}}$$

Divisione di due radicali

Teorema: Il quoziente di due radicali aritmetici di uguale indice è un radicale aritmetico che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi. In simboli abbiamo:

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ oppure $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{n}}$

ESEMPIO

$$\sqrt[6]{\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^3}}:\sqrt[6]{\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}} = \sqrt[6]{\frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}\cdot\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}} = \sqrt[6]{\frac{(x-y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)^2(x^2+xy+y^2)}}$$

OSSERVAZIONE

Per dividere due radicali aventi indici diversi occorre ridurli preventivamente allo stesso indice.

$$\sqrt[4]{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}:\sqrt{\frac{2x}{x-y}} = \sqrt[4]{\frac{2x^2}{(x-y)(x+y)}}:\sqrt[4]{\frac{4x^2}{(x-y)^2}} = \sqrt[4]{\frac{2x^2(x-y)^2}{(x-y)(x+y)4x^2}} = \sqrt[4]{\frac{x-y}{2(x+y)}}$$

Trasporto di un fattore positivo sotto il segno di radice

Quando un radicale è moltiplicato per un fattore positivo, tale fattore può essere trasportato sotto il segno di radice, come fattore del radicando, purché venga elevato ad una potenza uguale all'indice del radicale. In simboli abbiamo: $a^m\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m\cdot n}\cdot b}$

Esempi: $(a+b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-b^2}} = \sqrt{(a+b)^2\cdot\dfrac{1}{(a+b)(a-b)}} = \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$, $2\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3\cdot 5} = \sqrt[3]{8\cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

Trasporto di un fattore positivo fuori dal segno di radice

Se **m** ed **n** sono due numeri interi, se $m \geq n$, se **q** è il quoziente della divisione di **m** per **n** ed **r** è il resto, allora possiamo scrivere:

$\sqrt[n]{a^m} = a^q\cdot\sqrt[n]{a^r}$ $\qquad m = n\cdot q + r$

m	n
r	q

REGOLA

Regola: Un fattore positivo del radicando avente esponente non minore dell'indice del radicale può essere portato fuori dal segno di radice come fattore che risulta essere una potenza avente come esponente il quoziente **q**; all'interno del radicale rimane come fattore una potenza avente come esponente il resto **r**.

Se risulta $r = 0$ allora il fattore del radicando, essendo uguale ad 1, non si scrive

$$\sqrt[5]{x^4(a-b)^{15}(a+b)^{18}} = (a-b)^3(a+b)^3 \cdot \sqrt[5]{x^4(a+b)^3}$$

Osservazione: Per trasportare un fattore fuori dal segno di radice bisogna prima decomporre in fattori il radicando ed, eventualmente, semplificare il radicale.

$$\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^5}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}} = \sqrt{\frac{(a-b)^5(a+b)^5}{(x+y)^3}} = \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{x+y}\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{x+y}} = \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{x+y}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{x+y}}$$

Potenza di un radicale aritmetico

Per elevare a potenza un radicale basta elevare a quella potenza il radicando.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[5]{(x+y)^2(x-y)^2}\right)^4 = \sqrt[5]{(x+y)^8(x-y)^{12}} = (x+y)(x-y)^2 \cdot \sqrt[5]{(x+y)^3(x-y)^2}$$

Osservazione: Se l'indice del radicale e l'esponente della potenza ammettono un **M.C.D.** allora, prima di elevare il radicale alla data potenza, bisogna semplificare.

$$\left(\sqrt[\cancel{6}\,3]{(x-y)^3(x+y)^5}\right)^{\cancel{14}\;7} = \sqrt[3]{(x-y)^{21}(x+y)^{35}} = (x-y)^7(x+y)^{11}\sqrt[3]{(x+y)^2}$$

Radice aritmetica di un radicale aritmetico

La radice aritmetica di indice **m** di un radicale aritmetico di indice **n** e radicando **a** è un radicale aritmetico di indice $m \cdot n$ e radicando **a**. In simboli abbiamo: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$$\sqrt[5]{\sqrt{a^{35}}} = \sqrt[10]{a^{35}} = \sqrt{a^7} = a^3 \cdot \sqrt{a} \quad , \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{18}}} = \sqrt[30]{18}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y}{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{y}{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[12]{\frac{x^{16}}{y^{16}}} \cdot \sqrt[12]{\frac{y^3}{x^3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[12]{\frac{x^{16}}{y^{16}} \cdot \frac{y^3}{x^3}}} = \sqrt[36]{\frac{x^{13}}{y^{13}}}$$

Somma algebrica di radicali aritmetici

Definizione: Un radicale aritmetico si dice **ridotto** quando sul radicando si sono eseguite tutte le semplificazioni possibili e si sono portati fuori dal segno di radice tutti quei fattori aventi esponenti maggiore o uguale dell'indice del radicale. Il fattore che si trova davanti ad un radicale ridotto si chiama **coefficiente del radicale**.

Definizione: Due o più radicali aritmetici si dicono **simili** quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e differiscono, eventualmente, solo per il coefficiente. Sono **simili** i seguenti radicali: $2\sqrt[5]{ab^2}$, $ab^2\sqrt[5]{ab^2}$, $-\frac{1}{4}x\sqrt[5]{ab^2}$

Regola: La **somma algebrica** di due o più radicali simili è un radicale simile ai dati ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

$$3\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-\sqrt{8}+\frac{1}{5}\sqrt{108}-\frac{1}{2}\sqrt{18}=3\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\frac{6}{5}\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{2}=$$

$$=\left(3-2-\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}\right)\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{9}{20}\sqrt{3}$$

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trovare una frazione equivalente alla data avente il denominatore privo di radicali. Si possono presentare diversi casi:

primo caso Il denominatore presenta come fattore il termine $\sqrt{b}$

La **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{4} \quad , \quad \frac{x}{\sqrt{x+y}}=\frac{x}{\sqrt{x+y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}}=\frac{x\sqrt{x+y}}{x+y}$$

secondo caso Il denominatore presenta come fattore il termine $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$.

La **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per: $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

$$\frac{n}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m+m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

$$\frac{2}{7\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2}{7\sqrt[5]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{4}}{7\cdot\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{4}}{14}$$

terzo caso Il denominatore presenta come fattore la somma algebrica di due radicali quadratici, oppure la somma algebrica di un radicale quadratico e di una espressione non contenente radicali. Se il fattore è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ la **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, se il fattore è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ si moltiplica per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, se il fattore è $a+\sqrt{b}$ si moltiplica per $a-\sqrt{b}$, se il fattore è $a-\sqrt{b}$ si moltiplica per $a+\sqrt{b}$.

$$\frac{4}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{4}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{4\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{18-6}=\frac{4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{12}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

quarto caso Il denominatore presenta come fattore la **somma** (differenza) di due **radicali cubici** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ($\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$). La **razionalizzazione** avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ ($\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$)

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$$

$$\frac{m}{c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}-cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}\right)\left(c^2\sqrt[3]{a}-cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}-cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{c^3a+d^3b}$$

$$\frac{m}{c\sqrt[3]{a}-d\sqrt[3]{b}}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}+cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(c\sqrt[3]{a}-d\sqrt[3]{b}\right)\left(c^2\sqrt[3]{a}+cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(c^2\sqrt[3]{a}+cd\sqrt[3]{ab}+d^2\sqrt[3]{b^2}\right)}{c^3a-d^3b}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}\right)}{\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}\right)}=\frac{2\left(\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}\right)}{6+4}=\frac{\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{2}}{5}$$

Radicali doppi

Si chiama **radicale doppio** ogni espressione avente la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Le suddette formule sono utili se a^2-b è un **quadrato perfetto**. In questo caso il radicale doppio si trasforma nella somma algebrica di due radicali semplici.

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

Radicali algebrici

Finora abbiamo supposto che il radicando sia un numero reale positivo e che il risultato dell'estrazione della radice sia unico ed espresso da un numero reale positivo, cioè la radice aritmetica di un numero positivo esiste sempre ed è un numero positivo.

Adesso abbandoniamo tale ipotesi restrittiva e supponiamo che $a \in R$. Definiamo **radice ennesima algebrica** del numero reale relativo a, il numero reale relativo x (se esiste) che ha come potenza ennesima il numero a. $\sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a \qquad \forall\, a, x \in R \quad , \quad \forall\, n \in N_o$

Abbiamo visto che la **radice ennesima aritmetica** di un numero positivo esiste sempre e rappresenta un solo valore positivo. Per i **radicali algebrici** le cose vanno diversamente:

1) radicando positivo $(a > 0)$, n **pari**

In questo caso $\sqrt[n]{a}$ rappresenta due valori espressi da due numeri opposti.

$$\sqrt{4} = \pm 2 \qquad \text{Infatti : } (\pm 2)^2 = 4$$

2) radicando positivo $(a > 0)$, n **dispari**

La radice ennesima algebrica di un numero reale positivo ad indice dispari ha un unico valore positivo, cioè il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta un numero positivo $\qquad \sqrt[3]{8} = 2$

3) radicando negativo $(a < 0)$, n **dispari**

La radice ennesima algebrica di un numero reale negativo ad indice dispari ha un unico valore negativo, cioè il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta un numero negativo $\qquad \sqrt[3]{-8} = -2$

4) radicando negativo $(a < 0)$, n **pari**

La radice ennesima algebrica di un numero reale negativo ad indice pari non esiste nel campo dei numeri reali, cioè se $a \in R^-$, il simbolo $\sqrt[n]{a}$ non ha significato in quando non esiste nessun numero reale la cui potenza ad indice pari è un numero negativo. $\sqrt{-4}$ non esiste nel campo dei numeri reali in quanto non è possibile trovare un numero reale relativo il cui quadrato è -4 .

CONCLUSIONI

1) per n **pari**, ogni numero reale positivo ammette due radici ennesime algebriche fra loro opposte; ogni numero reale negativo non ne ammette

2) per n **dispari**, ogni numero reale ammette una radice ennesima algebrica ed una sola, la quale è positiva o negativa se tale è il numero considerato.

OSSERVAZIONE N° 1

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ è utilizzato tanto per indicare un **radicale aritmetico** quanto per indicare un radicale algebrico. Si dovrebbero usare simboli diversi come avviene in altre nazioni:

$\overline{\sqrt[n]{a}}$ = **radice aritmetica** del numero reale a , $\sqrt[n]{a}$ = **radice algebrica** del numero reale a $\overset{*}{\sqrt[n]{a}}$ = **radice complessa** del numero reale a , o radice del numero reale a nel campo dei numeri complessi .

La consuetudine italiana attribuisce al simbolo $\sqrt[n]{a}$ il significato di **radice aritmetica**; nel caso in cui il simbolo $\sqrt[n]{a}$ va considerato come **radicale algebrico** bisogna dichiararlo esplicitamente .

OSSERVAZIONE N ° 2

In R il simbolo $\sqrt[n]{a}$ può avere due significati:

1) quello di **radicale aritmetico** se $a \in R^+$ ed allora il simbolo rappresenta un solo numero positivo

2) quello di **radicale algebrico** se $a \in R$ ed allora il simbolo rappresenta due numeri relativi , un solo numero relativo , nessun numero reale relativo .

Potenze ad esponente frazionario

Possiamo estendere il concetto di potenza al caso in cui l'esponente è una frazione. Questo è possibile solo se la base è un numero reale positivo. $\forall \in R^+$, $\forall m,n \in N$ poniamo:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

cioè, la potenza ad esponente frazionario (positivo) di un numero reale positivo è uguale al radicale aritmetico che ha per indice il denominatore della frazione e per esponente del radicando il numeratore della frazione stessa. Una potenza di un numero reale positivo avente come esponente un numero frazionario negativo viene definita dalla seguente relazione: $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Per le potenze ad esponente frazionario valgono le seguenti proprietà formali:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ $\quad$ $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ $\quad$ $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{ap}{nq}}$ $\quad$ $(a \cdot b \cdot c)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \cdot c^{\frac{m}{n}}$ $\quad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

$$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad , \quad 3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$$

OSSERVAZIONE

Una potenza che sia fattore del numeratore (o del denominatore) di una frazione può essere portata al denominatore (numeratore) mutando il segno dell'esponente .

$$\frac{a^{\frac{5}{2}} \cdot b^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{(a+b)^{\frac{3}{4}} \cdot (a-b)^{-\frac{5}{3}}} = \frac{b^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{5}{2}} \cdot (a+b)^{\frac{3}{4}} \cdot (a-b)^{-\frac{5}{3}}} = \frac{b^2 \cdot (a-b)^{\frac{5}{3}}}{a^{-\frac{5}{2}} \cdot (a+b) \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

Unità Didattica N°10

I NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi

Noi sappiamo che la radice quadrata di un numero negativo non esiste nel campo dei numeri reali. Infatti $\sqrt{-4}$ non esiste in **R** in quanto non è possibile trovare un numero reale il cui quadrato è -4

Per rendere possibile l'estrazione di radice ad indice pari di un numero reale negativo si introducono i **numeri immaginari**. Si pone per definizione: $\sqrt{-1} = i$ cioè: $i^2 = -1$

Il simbolo **i**, che rappresenta la radice quadrata del numero -1, è detto **unità immaginaria**.

Si definisce poi **numero immaginario** il simbolo bi, che esprime il prodotto del numero reale **b** per l'unità immaginaria **i**. Infine, dicesi **numero complesso** la somma di un numero reale **a** e di un numero immaginario bi. Un **numero complesso** assume la seguente forma: $a + bi$

Due **numeri complessi** si dicono **coniugati** quando hanno la stessa parte reale ed opposti i coefficienti dell'unità immaginaria. I due seguenti numeri $a + bi$ e $a - bi$ sono **complessi e coniugati**.

Il prodotto di due numeri complessi e coniugati è un numero reale. Infatti abbiamo:

$(a + bi)(a - bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - bi^2 = a^2 + b^2$ che è un numero reale in quanto somma di due numeri reali.

Le operazioni di **addizione**, **sottrazione**, **moltiplicazione** si eseguono alla stessa maniera dei numeri reali con l'unica avvertenza di ricordare che risulta: $i^2 = -1$.

La divisione tra due numeri complessi si effettua ricordando che il prodotto di due numeri complessi e coniugati è un numero reale:

- $$\frac{2-3i}{5+6i} = \frac{2-3i}{5+6i} \cdot \frac{5-6i}{5-6i} = \frac{(2-3i(5-6i))}{25+36} = \frac{10-12i-15i+15}{61} = \frac{25-27i}{61} = \frac{25}{61} - \frac{27}{61}i$$
- $$\frac{4-3i}{-2+5i} = \frac{4-3i}{-2+5i} \cdot \frac{-2-5i}{-2-5i} = \frac{-8+6i-20i+15i^2}{4-25i^2} = \frac{-23-14i}{29} = -\frac{23}{29} - \frac{14}{29}i$$
- $$\frac{1}{3-4i} = \frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

Ulteriori precisazioni su come operare con i numeri complessi

Dalla relazione $i^2 = -1$ deduciamo:

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ $\quad i^4 = 1$ $\quad i^5 = i^4 \cdot i = i$ e così di seguito

Da tutto ciò deduciamo che le potenze dell'unità immaginaria i si ripetono con un periodo uguale a quattro. $i^{4n} = 1$ $i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=1\cdot i=i$, $i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1$, $i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=-i$, $i^{4n+4}=i^{4n}\cdot i^4=1$ con $n = 0,1,2,3,4,.....$ Queste relazioni ci consentono di calcolare il valore di qualsiasi potenza di i con esponente naturale. In **forma compatta** abbiamo:

$$i^k=i^{m+4n}=i^m=\begin{cases} i^0=1; & m=0 \\ i=i; & m=1 \\ i^2=-1; & m=2 \\ i^3=-i; & m=3 \end{cases}$$ con $m=0,1,2,3$ ed $n\in N$ N.B. $i^4=i^0=1$

n rappresenta la **parte intera** del quoziente tra i numeri k e 4, **m** è il **resto** della divisione tra i numeri **k** e **4**. $\frac{k}{4}=n+\frac{m}{4}$ $k=4n+m$

- Il calcolo con i numeri complessi dati in forma algebrica $a+ib$ è identico al calcolo coi numeri reali che conosciamo già, con la sola avvertenza che l'unità immaginaria i è sottoposta alla regola speciale $i^2=-1$ $i^3=-i$ $i^4=1$ $i^5=i$ e così di seguito.

Esempi: $i^{373}=i^{4\cdot 93+1}=i^{372+1}=i$ $\frac{373}{4}=93+\frac{1}{4}$ $n=93$ $m=1$

$i^{1282}=i^{4\cdot 320+2}=i^{1280+2}=i^2=-1$ $\frac{1282}{4}=320+\frac{2}{4}$ $n=320$ $m=2$

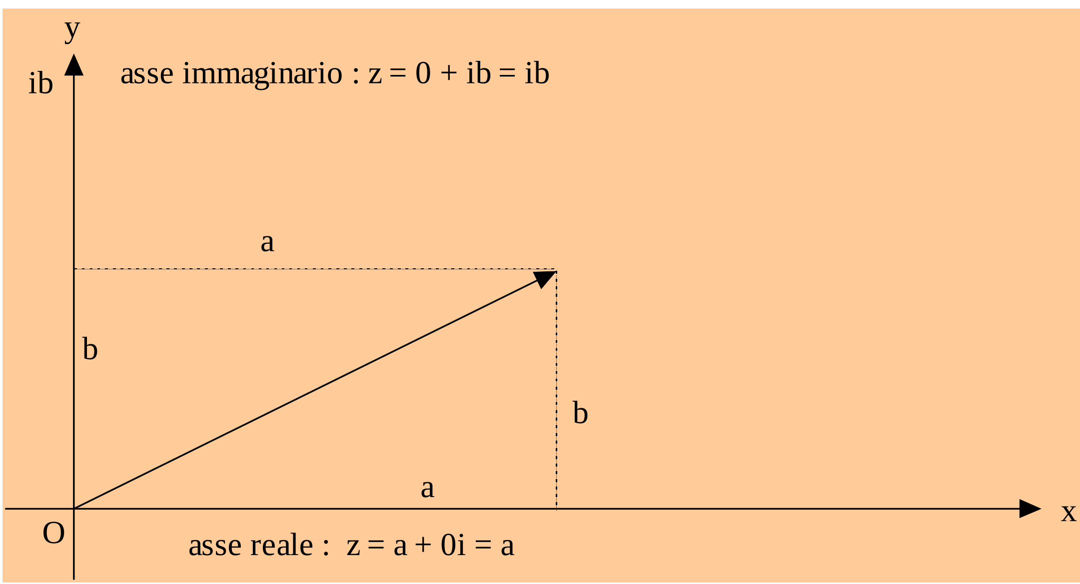
$i^{87}=i^{4\cdot 21+3}=i^{84+3}=i^3=-i$ $\frac{87}{4}=21+\frac{3}{4}$ $n=21$ $m=3$

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Piano complesso di Gauss

Nello studio dei numeri reali abbiamo visto che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e i punti di una **retta orientata** sulla quale abbiamo fissato una origine ed una unità di misura. Adesso vogliamo fare vedere che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi ed i punti di un piano .Riferiamo il piano ad un **sistema ortonormale** di assi cartesiani di origine O. Consideriamo un qualsiasi numero complesso $a + ib$ e ad esso facciamo corrispondere il punto $P(a,b)$ del piano cartesiano che ha come ascissa la parte reale a e come ordinata il coefficiente b della parte immaginaria.

E' evidente che ad ogni numero complesso $z = a + ib$ corrisponde uno ed un sol punto del piano . Viceversa , fissato un punto $P(a,b)$ del piano si faccia corrispondere ad esso il numero complesso $z = a + ib$ che ha come parte reale l'ascissa a e come coefficiente dell'unità immaginaria l'ordinata b . E' evidente che ad ogni punto $P(a,b)$ corrisponde uno ed un solo numero complesso . Resta pertanto stabilita una corrispondenza biunivoca fra i punti P del piano ed i numeri complessi . Il punto $P(a,b)$ chiamasi **immagine** del numero complesso , mentre $a + ib$ si dice **affissa** di P . Il piano considerato ricoperto dalle immagini dei numeri complessi è detto **piano complesso** o **piano di Argand** o **piano di Gauss**. Si noti che, in particolare, le immagini dei numeri complessi reali, essendo punti di ordinata nulla, sono situate sull'asse delle ascisse il quale dicesi **asse reale** del piano complesso .



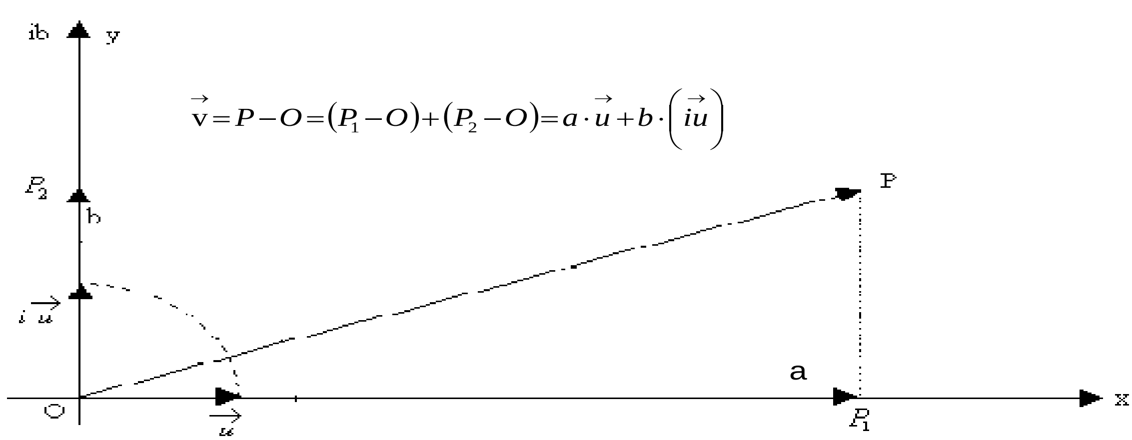
Le **immagini** dei **numeri complessi immaginari** $(z = 0 + ib = ib)$ essendo punti di ascissa nulla, sono situate sull'asse delle y che dicesi **asse immaginario** del piano complesso. Spesso l'immagine di un numero complesso si rappresenta col numero stesso e nel linguaggio corrente si parla, talvolta, di ascissa e ordinata di un numero complesso rispettivamente in luogo di ascissa ed ordinata della corrispondente immagine. Da quanto detto si deduce che i **numeri reali** occupano tutti e soltanto i punti di una retta (l'asse reale o asse delle ascisse), mentre i **numeri complessi** occupano tutti e soltanto i punti di un piano.

Rappresentazione dei numeri complessi mediante vettori

Un'altra rappresentazione o interpretazione geometrica dei numeri complessi nel piano cartesiano (equivalente, in fondo, alla precedente) è la seguente: sia $P(a,b)$ l'immagine del numero complesso $z = a + ib$ e si consideri il vettore $\overrightarrow{OP} = P - O$ le cui componenti lungo gli assi cartesiani sono **a** e **b** dovendosi avere : $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = P - O = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \overrightarrow{iu}$

Pertanto il numero complesso $z = a + ib$ determina univocamente il vettore $\vec{v} = P - O$ e, viceversa, questo vettore determina univocamente (mediante le sue componenti lungo gli assi cartesiani) il numero complesso $z = a + ib$: cioè tra i vettori del piano applicati nel punto O ed i numeri complessi sussiste una **corrispondenza biunivoca**.

Pertanto, come immagine del numero complesso $z = a + ib$, invece del punto $P(a,b)$ si può prendere il **vettore** di componenti cartesiane a, b applicato nell'origine O. Questo ci consente di affermare che <<l'insieme dei numeri complessi, anziché dall'insieme dei **punti** di un piano, può essere rappresentato dall'insieme dei **vettori** del piano applicati nell'origine O>>.



Unità Didattica N° 11

Le equazioni di secondo grado ad una incognita

01) **La definizione di equazione di secondo grado ad una incognita**

02) **La risoluzione delle equazioni di secondo grado incomplete**

03) **La risoluzione dell'equazione di secondo grado completa**

04) **Equazioni frazionarie riconducibili ad equazioni di secondo grado**

05) **Relazioni fra le radici ed i coefficienti di una equazione di secondo grado**

06) **Scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado**

07) **La regola dei segni di Cartesio**

08) **Equazioni di secondo grado parametriche**

Equazioni di secondo grado ad una incognita

Dicesi *equazione di secondo grado ad una incognita* ogni equazione riconducibile alla seguente forma: $ax^2 + bx + c = 0$ [*]

La [*] è detta anche **forma tipica**, o **normale** o **canonica** dell'equazione di secondo grado.

ax^2 = **termine quadratico**, bx = **termine lineare**, c = termine noto o terzo coefficiente

a = **primo coefficiente** o **coefficiente del termine quadratico**

b = **secondo coefficiente** o **coefficiente del termine lineare**

Risulta sempre: $a \neq 0$. Infatti se fosse $a = 0$, l'equazione **[*]** sarebbe di primo grado.

Se risulta: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ l'equazione **[*]** dicesi **equazione completa**. In caso contrario dicesi **incompleta**.

OSSERVAZIONE N° 1

Dicesi **soluzione** o **radice** di una equazione ad una incognita, ogni numero che, sostituito al posto dell'incognita, rende il primo membro numericamente uguale al secondo membro.

OSSERVAZIONE N° 2

Una equazione di secondo grado ad una incognita ammette due soluzioni che vengono indicate coi simboli x_1 ed x_2. Nel caso di **soluzioni reali** si pone per convenzione: $x_1 < x_2$, cioè x_1 rappresenta la radice minore, mentre x_2 rappresenta la radice maggiore.

Risoluzione delle equazioni di secondo grado incomplete

$b = 0$ L'equazione **[*]** diventa: $ax^2 + c = 0$ [2] e si dice **equazione di secondo grado pura**. Essa si risolve nella seguente maniera:

$$ax^2 = -c \quad , \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad , \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad , \quad x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ESEMPI

$$9x^2 - 4 = 0 \quad , \quad 9x^2 = 4 \quad , \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad , \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3} \quad , \quad x_1 = -\frac{2}{3} \; , \; x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x^2 + 81 = 0 \; , \; x^2 = -81 \; , \; x = \pm\sqrt{-81} = \pm 9i \quad , \quad x_1 = -9i \quad , \quad x_2 = 9i$$

$16x^2 - 27 = 0$, $16x^2 = 27$, $x^2 = \frac{27}{16}$, $x = \pm\sqrt{\frac{27}{16}} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}$, $x_1 = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$, $x_1 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

$c = 0$ L'equazione **[*]** diventa: $ax^2 + bx = 0$ [3]

Essa prende il nome di **equazione di secondo grado spuria**. Si risolve nella seguente maniera: $x(ax + b) = 0$

Applicando la legge di annullamento di un prodotto di fattori scriviamo:

$$x = 0 \quad , \quad ax + b = 0 \quad , \quad ax = -b \quad , \quad x = -\frac{b}{a}$$

Le radici dell'equazione [3] sono: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$

ESEMPI

$x^2 - 21x = 0$, $x(x - 21) = 0$, $x = 0$, $x - 21 = 0$, $x = 21$, $x_1 = 0$, $x_2 = 21$

$3x^2 + 5x = 0$, $x(3x + 5) = 0$, $x = 0$, $3x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{3}$, $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 0$

Osservazione: La **legge di annullamento di un prodotto di fattori** dice che <<*se un prodotto di fattori è nullo , allora almeno uno dei fattori è nullo*>>.

ALTRI ESEMPI

$$4(x+2)(x-4)-(6-x)(x-4)=7(x-6)(x+2)$$

$$4\left(x^2-4x+2x-8\right)-\left(6x-24-x^2+4x\right)=7\left(x^2+2x-6x-12\right)$$

$$4x^2-8x-32-20x+48+2x^2=7x^2-28x-84 \ , \ -x^2 = -100 \ , \ x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \ , \ x_1 = -10 \ , \ x_2 = 10$$

$$(x+3)^2-(x+1)^2=(x+2)^2$$

$$x^2+6x+9-x^2-2x-1=x^2+4x+4 \ , \ -x^2 = -4 \ , \ x^2 = 4 \ , \ x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = -2 \quad , \quad x_1 = -2$$

$$(x+3)(2x+5)-(x-2)(x-3)=13-(x+2)^2$$

$$2x^2 + 5x + 6x + 15 - x^2 + 3x + 2x - 6 = 13 - x^2 - 4x - 4 \ , \quad 2x^2 + 20x = 0$$

$$x = 0 \ , \ x + 10 = 0 \ , \ x = -10 \ , \ x_1 = -10 \ , \ x_2 = 0$$

$$\frac{x+3}{x-3} = \frac{7-x}{x+3} + \frac{30}{(x-3)(x+3)}$$

Si tratta di un'equazione frazionaria in quanto l'incognita x figura al denominatore.

$$m.c.m. = (x - 3)(x + 3) \qquad x \neq \pm 3$$

$$(x + 3)^2 = (7 - x)(x - 3) + 30 \quad , \quad x^2 + 6x + 9 = 7x - 21 - x^2 + 3x + 30$$

$$2x^2 - 4x = 0 \quad ; \quad 2x(x - 2) = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x - 2 = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$

Risoluzione dell'equazione di secondo grado completa

Vogliamo risolvere l'equazione di secondo grado completa $ax^2 + bx + c = 0$

Si trasporta il termine noto al secondo membro: $ax^2 + bx = -c$

Moltiplichiamo ambo i membri per $4a$: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Aggiungiamo ad ambo i membri il numero b^2: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad , \quad 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad , \quad 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{[1]}$$

La [1] prende il nome di **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado. Il numero $\Delta = b^2 - 4ac$ dicesi **delta** o **discriminante** dell'equazione di secondo grado.

In una equazione di secondo grado completa possiamo supporre $a > 0$. In questo caso la radice più piccola è: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ mentre la radice più grande è: $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Il discriminante Δ dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ può essere $\gtreqless 0$.

Discutiamo separatamente i tre casi:

1) $\Delta > 0$: se il delta è maggiore di zero l'equazione ammette due **radici reali e distinte**, $x_1 \neq x_2$

2) $\Delta = 0$: se il delta è uguale a zero l'equazione ammette due **radici reali e coincidenti**,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3) $\Delta > 0$: se il delta è minore di zero l'equazione ammette due **radici complesse e coniugate**

ESEMPI

$12x^2-67x+35=0$ $\quad a=12 \quad b=-67 \quad c=35 \qquad \Delta=b^2-4ac=4489-1680=2809=53^2$

$$x=\frac{67\pm\sqrt{2809}}{24}=\frac{67\pm 53}{24}=\begin{cases}\dfrac{67-53}{24}=\dfrac{7}{12}=x_1\\[2mm]\dfrac{67+53}{24}=5=x_2\end{cases}$$

$2x^2-6x+1=0$ $\qquad a=2\,,b=-6\,,c=1$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-8}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{28}}{4}=\frac{6\pm 2\sqrt{7}}{4}=\begin{cases}\dfrac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{4}=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}=x_1\\[2mm]\dfrac{2\left(3+\sqrt{7}\right)}{4}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}=x_2\end{cases}$$

$3x^2-5x+4=0$ $\qquad a=3\,,b=-5\,,c=4$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-48}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{-23}}{6}=\frac{5\pm i\sqrt{23}}{6}=\begin{cases}\dfrac{5-i\sqrt{23}}{6}=x_1\\[2mm]\dfrac{5+i\sqrt{23}}{6}=x_2\end{cases}$$

Formula risolutiva ridotta e ridottissima

La formula risolutiva di una equazione di secondo grado è: $\quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad$ [1]

Essa può scriversi nella seguente maniera:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{4\cdot\left(\dfrac{b^2}{4}\right)-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm 2\cdot\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac}}{2a}$$

Dividendo numeratore e denominatore per 2 otteniamo: $\quad x=\dfrac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}\quad$ [2]

La [2] è detta **formula ridotta** e si applica quando il coefficiente b è un **numero pari**, cioè quando è divisibile per 2. L'espressione $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac=\dfrac{b^2}{4}-ac=\dfrac{b^2-4ac}{4}=\dfrac{\Delta}{4}$ dicesi **discriminante ridotto**.

Se poi risulta anche $a=1$ la [2] diventa: $\quad x=-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-c}\quad$ [3]

RIEPILOGO

1) La **formula ridotta** si applica quando **b** è un **numero pari**

2) La **formula ridottissima** si applica quando **b** è un **numero pari** ed **a** risulta uguale ad **1**

$3x^2 - 8x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} = \begin{cases} \dfrac{4-2}{3} = \dfrac{2}{3} = x_1 \\ \dfrac{4+2}{3} = 2 = x_2 \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3} \quad , \quad x_1 = 2 - \sqrt{3} \quad , \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Relazioni fra le radici ed i coefficienti di una equazione di secondo grado

Tra le radici x_1 ed x_2 dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ed i coefficienti **a, b, c** intercorrono le seguenti relazioni: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad$ $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Dimostrazione

Noi sappiamo che : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} =$$

$$\frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$3x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3}$$

Applicazioni

Calcolare una radice di una equazione di secondo grado quando conosciamo l'altra radice

Basta utilizzare una delle due seguenti relazioni: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Se, ad esempio, conosciamo x_1, per calcolare x_2 si procede come segue:

$$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 \qquad \text{oppure} \qquad x_2 = \frac{c}{a x_1}$$

$3x^2 + 7x - 6 = 0$ $\quad x_1 = -3$, $x_1 + x_2 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{3} - x_1 = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}$

oppure $\quad x_1 x_2 = -\frac{6}{3} = -2$, $x_2 = \frac{-2}{x_1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Scrivere l'equazione di secondo grado che abbia come radici due numeri assegnati

$ax^2 + bx + c = 0$ Divido ambo i membri per **a** , $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Pongo :

$x_1 + x_2 = S$, $x_1 x_2 = P$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -S$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = P$ $\qquad \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

REGOLA

L'equazione di secondo grado avente come radici due numeri dati ha il primo coefficiente uguale all'unità, il secondo coefficiente è la somma dei due numeri cambiata di segno, il terzo coefficiente coincide col prodotto dei due numeri.

Scrivere l'equazione di secondo grado avente come radici i numeri:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \quad , \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad , \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$$

$$x^2 - 6\sqrt{3} \cdot x + \frac{4}{3} = 0 \quad , \quad 3x^2 - 18\sqrt{3} \cdot x + 4 = 0$$

Determinare due numeri conoscendo la somma S ed il loro prodotto P

I due numeri richiesti coincidono con le radici dell'equazione: $x^2 - Sx + P = 0$

$$S = 6 \quad , \quad P = 4 \quad , \quad x^2 - 6x + 4 = 0 \quad , \quad x = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 3 - \sqrt{5} \quad , \quad x_2 = 3 + \sqrt{5}$$

Scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado

Se risulta $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ allora è possibile dimostrare che il trinomio di secondo grado $T(x) = ax^2 + bx + c$ può essere decomposto nel prodotto di due fattori di primo grado secondo la seguente formula: $T(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

dove i numeri x_1 **ed** x_2 **sono gli zeri del trinomio, ossia** *le radici dell'equazione associata* $ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] =$$

$$= a\left[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se il trinomio ha due zeri reali e coincidenti , cioè se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ allora la precedente formula assume la seguente forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Decomporre in fattori il seguente trinomio di secondo grado $15x^2 + 2x - 8$.

Gli zeri di questo trinomio coincidono con le radici dell'equazione associata

$$15x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1 + 120 = 121 \qquad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{15} = \frac{-1 \pm 11}{15}$$

$$x_1 = \frac{-1-11}{15} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5} \qquad x_2 = \frac{-1+11}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$15x^2 + 2x - 8 = 15\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{4}{5}\right) = (3x-2)(5x+4)$$

Equazioni parametriche

$4x^2 + -2(k-1)x - k = 0$ è una equazione parametrica in quanto almeno uno dei tre coefficienti dipende da un parametro. **Parametro** di una equazione nell'incognita x è una lettera qualsiasi che rappresenta un numero il cui valore non dipende dall'incognita.

Questo significa che i valori numerici che possiamo attribuire al parametro non dipendono dai valori numeri assunti dall'incognita x . Invece i valori numerici assunti dalle radici x_1 , x_2 dell'equazione data dipendono dai valori numerici che attribuiamo al parametro k.

I problemi sulle equazioni di secondo grado parametriche si risolvono tenendo presente che:

1) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

2) radice di un'equazione è un numero che, sostituito nell'incognita dell'equazione , rende il primo membro numericamente uguale al secondo membro

3) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono uguali se:

$$\Delta = 0 \quad \text{cioè se :} \quad b^2 - 4ac = 0$$

4) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono opposte se:

$x_1 = -x_2$ cioè se : $x_1 + x_2 = 0$ $-\dfrac{b}{a} = 0$ cioè se: $b = 0$

5) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono reciproche se:

$x_1 \cdot x_2 = 1$ cioè se: $\dfrac{c}{a} = 1$ cioè se: $c = a$

6) le radici x_1 , x_2 di una equazione di secondo grado sono antireciproche se: $x_1 \cdot x_2 = -1$ cioè se: $\dfrac{c}{a} = -1$ cioè se: $c = -a$

Esempi

<<**Per quale valore del parametro k una radice dell'equazione** $4x^2 - 2(k-1)x - k = 0$ **é uguale a zero?**>>

$x_1 = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow -k = 0 \qquad k = 0$

<<**Per quale valore del parametro k le radici dell'equazione** $x^2 + (k-1)x + k - 3 = 0$ **sono opposte ?**>>

$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$

<<**Per quale valore del parametro a le radici dell'equazione** $(a+3)x^2-5ax+4a+1=0$ **sono uguali**?>>

$x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 25a^2 - 4(a+3)(4a+1) = 0 \Rightarrow$

$9a^2 - 52a - 12 = 0 \quad a_1 = -\frac{2}{9} \quad a_2 = 6$

<< **Per quale valore del parametro k una radice dell'equazione** $2x^2 - (k-1)x + k + 1 = 0$ **vale** 2 **?** >>

$x_1 = 2 \Rightarrow 2\cdot(2)^2 - (k-1)\cdot 1 + k + 1 = 0 \quad 8 - 2k + 2 + k + 1 = 0 \quad -k = -11$

$$k = 11$$

data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ calcolare :

01) $x_2 - x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

02) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

03) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

04) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2-2ac}{c^2}$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2-2ac}{c^2}$$

05) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc-b^3}{a^3}$$

06)

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{3abc-b^3}{c^3}$$

07) $$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

Se l'equazione data ha la forma $x^2 + px + q = 0$ abbiamo:

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 - 4p^2 + 2q^2$$

08) $$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^2} = \frac{\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}}{\frac{c^4}{a^4}} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$$

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$$

Quesiti relativi alle equazioni parametriche: TABELLA RIASSUNTIVA	
Richiesta	**Matematizzazione**
Somma delle radici	$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
Somma dei **quadrati** delle radici	$x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$
Somma dei **cubi** delle radici	$x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{-b^3 + 3abc}{a^3}$
Somma delle **quarte potenze** delle radici	$x_1^4 + x_2^4 = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
Somma delle **quinte potenze** delle radici	$x_1^5 + x_2^5 = \dfrac{-b^5 + 5ab^3c - 5a^2bc^2}{a^5}$
Somma dei **reciproci** delle radici con $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{b}{c}$
Somma dei **reciproci** dei **quadrati** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{b^2 - 2ac}{c^2}$
Somma dei **reciproci** dei **cubi** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{-b^3 + 3abc}{c^3}$
Somma dei **reciproci** delle **quarte potenze** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^4} + \dfrac{1}{x_2^4} = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$
Somma dei **reciproci** delle **quinte potenze** delle radici $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$	$\dfrac{1}{x_1^5} + \dfrac{1}{x_2^5} = \dfrac{-b^5 + 5ab^3c - 5a^2bc^2}{c^5}$
Differenza delle radici	$x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$
Differenza dei **quadrati** delle radici	$x_1^2 - x_2^2 = \dfrac{-b \cdot \sqrt{\Delta}}{a^2}$
Differenza dei **cubi** delle radici	$x_1^3 - x_2^3 = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,(b^2 - ac)}{a^3}$
Differenza delle **quarte potenze** delle radici	$x_1^4 - x_2^4 = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,(b^3 + 2abc)}{a^4}$
Differenza delle **quinte potenze** delle radici	$x_1^5 - x_2^5 = \dfrac{\sqrt{\Delta}\,(b^4 - 3ab^2c + a^2c^2)}{a^5}$

La regola dei segni di Cartesio

Consideriamo una equazione di secondo grado a radici reali:

[§] $ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

Possiamo supporre che a sia positivo. Infatti, nel caso contrario, cambiando il segno dei coefficienti **a, b, c** otteniamo una equazione equivalente alla data.

Definizione: Diremo che i tre coefficienti **a, b, c** dell'equazione [§] (considerati nell'ordine scritto) presentano una **permanenza** ogni volta che due coefficienti consecutivi hanno lo stesso segno, presentano una **variazione** ogni volta che due coefficienti consecutivi hanno segni contrari.

Si possono presentare i seguenti casi :

a	b	c
+	+	+
+	−	+
+	−	−
+	+	−

Teorema di Cartesio

In ogni equazione di secondo grado ridotta a forma canonica, completa ed a discriminante positivo o nullo , ad ogni variazione corrisponde **una radice positiva**, ad ogni permanenza **una radice negativa** . Se l'equazione presenta una radice negativa (x_1) ed una positiva (x_2) allora il valore assoluto della radice negativa è maggiore del valore assoluto della radice positiva ($|x_1| > |x_2|$) se la **permanenza precede la variazione**, il valore assoluto della radice positiva è maggiore del valore assoluto della radice positiva ($|x_2| > |x_1|$) se la **variazione precede la permanenza**.

a	b	c	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	x_1	x_2	
+	+	+	−	+	−	−	
+	−	+	+	+	+	+	
+	−	−	+	−	−	+	$\lvert x_2\rvert > \lvert x_1\rvert$
+	+	−	−	−	−	+	$\lvert x_2\rvert < \lvert x_1\rvert$

Dimostriamo che due permanenze danno luogo a due radici negative .

a	b	c	$x_1 + x_2 < 0$	$x_1 \cdot x_2 > 0$	x_1	x_2
+	+	+	$x_1 > 0 \quad x_2 < 0$	$x_1 > 0 \quad x_2 > 0$	−	−
			$x_1 < 0 \quad x_2 > 0$	$x_1 < 0 \quad x_2 < 0$		
			$x_1 < 0 \quad x_2 < 0$			

Unità Didattica N° 12

Le equazioni ad una incognita

Equazioni risolubili mediante la decomposizione in fattori

L'algebra finora studiata ci consente di risolvere tutte le equazioni di primo grado e quelle di secondo grado. Esistono anche delle formule che ci consentono di risolvere tutte le equazioni di 3° e 4° grado. Noi non le possiamo applicare in quanto non conosciamo la teoria generale dei numeri complessi. Se $P(x)$ è un polinomio di grado **n**, l'uguaglianza $\boxed{P(x) = 0}$ posta allo scopo di vedere se esistono valori della x che annullano il polinomio $P(x)$, dicesi **equazione algebrica di grado n ad una incognita**.

Per $n = 1$ ($n = 2$) otteniamo l'equazione di 1° grado (2° grado) che sappiamo risolvere.

Per $n > 2$ otteniamo una equazione che possiamo risolvere se siamo in grado di decomporre il polinomio $P(x)$ in fattori di primo grado e di secondo grado.

Infatti se risulta: $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$ allora $P(x) = 0 \Rightarrow A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0 \Rightarrow$

$\boxed{A(x) = 0}$ oppure $\boxed{B(x) = 0}$ oppure $\boxed{C(x) = 0}$

Dicesi **zero** di un polinomio $P(x)$ ogni valore x_o della variabile x che annulla il polinomio . Questo significa che se $P(x_o) = 0$ allora il numero x_o è uno **zero** del polinomio $P(x)$ Inoltre l'equazione $P(x) = 0$ dicesi **equazione associata** al polinomio $P(x)$. Lo zero di un polinomio coincide con una delle radici dell'equazione associata.

Teorema delle radici razionali

Sia $P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ **[1]** un'equazione algebrica di grado **n**

C.N.S. perché il numero razionale $\dfrac{m}{n}$ (con $m \in N$ ed $n \in N^*$ primi tra di loro) sia una **radice** o **soluzione** dell'equazione [1] è che:

1) **m** sia divisore (positivo o negativo) del termine noto a_n

2) **n** sia divisore (positivo o negativo) del coefficiente a_o del termine di grado più elevato

Teorema delle radici intere

Condizione necessaria ma non sufficiente perché il numero intero **k** sia soluzione dell'equazione [1] è che esso sia divisore (positivo o negativo) del termine noto a_n . Se x_o è uno zero del polinomio $P(x)$ allora possiamo scrivere:

$$P(x) = (x - x_o) \cdot Q(x) = 0$$

dove $Q(x)$ è un opportuno polinomio di grado $n - 1$.

I coefficienti del polinomio $Q(x)$ si possono ottenere applicando la regola di Ruffini.

ESEMPI

$x^5+2x^3+8x^2+16=0$ $\quad x^3(x^2+2)+8(x^2+2)=0 \quad , \quad (x^2+2)\cdot(x^3+8)=0$

$$(x^2+2)(x+2)(x^2-2x+4)=0 \quad , \quad x^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm i\sqrt{2}$$

$$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad ; \quad x^2-2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm i\sqrt{3}$$

Le radici dell'equazione data sono:

$$x_1=-2 \quad , \quad x_2=-i\sqrt{2} \quad , \quad x_3=i\sqrt{2} \quad , \quad x_4=1-i\sqrt{3} \quad , \quad x_5=1+i\sqrt{3}$$

$$2x^5+3x^4-6x^3+6x^2-8x+3=0$$

Le eventuali radici razionali dell'equazione data vanno ricercate tra i seguenti numeri:

$$\pm 1 \quad , \quad \pm 3 \quad , \quad \pm\frac{1}{2} \quad , \quad \pm\frac{3}{2}$$

	2	3	-6	6	-8	3
1		2	5	-1	5	-3
	2	5	-1	5	-3	//
-3		-6	3	-6	3	
	2	-1	2	-1	//	
$\frac{1}{2}$		1	0	1		
	2	//	2	//		

$x_1=1$

$x_2=-3$

$x_4=-i$

$x_5=i$

$x_3=\frac{1}{2}$

$2x^2+2=0 \ , \ x^2+1=0 \ , \ x=\pm i$

$$x^4-x^2-12x-36=0$$

$$x^4-(x^2+12x+36)=0 \ , \ x^4-(x+6)^2=0 \ , \ (x^2-x-6)(x^2+x+6)=0$$

$$x^2-x-6=0 \qquad x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}-2=x_1\\ 3=x_2\end{cases}$$

$$x^2+x+6=0 \qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1-i\sqrt{23}}{2}=x_1\\[2mm] \dfrac{-1+i\sqrt{23}}{2}=x_2\end{cases}$$

Equazione biquadratica

Dicesi **equazione biquadratica** una equazione riconducibile alla seguente forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Si tratta di una equazione di 4° grado priva dei termini di grado dispari. Essa si risolve mediante la seguente sostituzione: $x^2 = y \quad (x^4 = y^2)$ Si ottiene: $ay^2 + by + c = 0$ che è una equazione di 2° grado in y, la quale ammette due radici reali y_1, y_2 se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

$$x = \pm\sqrt{y_1} \quad , \quad x = \pm\sqrt{y_2} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{y_1} \quad , \quad x_2 = \sqrt{y_1} \quad , \quad x_3 = -\sqrt{y_2} \quad , \quad x_4 = \sqrt{y_2}$$

Una **equazione biquadratica** avente il $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ammette:

1) 4 radici reali se $0 < y_1 < y_2$, cioè quando presenta due variazioni

2) 2 radici reali e **2 radici complesse e coniugate** se

$y_1 < 0 < y_2$, cioè quando presenta una variazione ed una permanenza

3) 4 radici a due a due complesse e coniugate se $y_1 < y_2 < 0$, cioè quando presenta due permanenze

$x^4+5x^2+6=0$ Pongo $x^2 = y \quad (x^4 = y^2)$ Ottengo: $y^2 + 5y + 6 = 0$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \quad , \quad y_1 = -3 \quad , \quad y_2 = -2$$

$$x^2 = -3 \quad , \quad x = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3} \quad , \quad x^2 = -2 \quad , \quad x = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$$

Equazioni irrazionali

Una equazione si dice **irrazionale** quando l'incognita compare sotto il segno di radice in almeno un termine del primo o del secondo membro o di entrambi.

Per risolvere una equazione irrazionale bisogna elevare ad una certa potenza, una o più volte, ambo i membri dell'equazione data, fino alla eliminazione di tutti i radicali presenti nell'equazione stessa. Indi si risolve l'equazione razionale così ottenuta. Si noti, però, che l'elevazione a potenza avente indice pari può introdurre **soluzioni estranee** all'equazione data. E' opportuno quindi eseguire la **verifica** delle soluzioni trovate, per giudicare quali radici sono accettabili e quali no. La verifica finale può essere evitata se, prima dell'elevamento ad una data potenza ad indice pari, imponiamo la **condizione di realtà e la condizione di positività**.

Risolviamo alcuni tipi di equazioni irrazionali.

1) L'equazione irrazionale contiene un solo radicale di indice due:

$$\sqrt{A(x)} = B(x)$$

L'equazione si risolve elevando ambo i membri al quadrato: $A(x) = [B(x)]^2$

La verifica può essere eliminata se, preliminarmente, imponiamo la condizione di realtà e la condizione di positività che, nel caso nostro si traduce nella risoluzione del seguente sistema di inequazioni: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x+5} = 7 - x$ $\quad \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (7-x)^2$

$x + 5 = 49 - 14x + x^2$, $x^2 - 15x + 44 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 11$ Verifica

$x_1 = 4$: $\sqrt{4+5} = 7 - 4$, $\sqrt{9} = 3$, $3 = 3$; $\quad x_1 = 4$ **(R.A.)**

$x_2 = 11$: $\sqrt{11+5} = 7 - 1$, $\sqrt{16} = -4$, $4 = -4$, $\quad x_2 = 11$ **(R.N.A.)**

OSSERVAZIONE

I simboli $A(x)$, $B(x)$ rappresentano due generici polinomi in x .

2) Equazione irrazionale del tipo: $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = C(x)$

Le condizioni di realtà e di positività si traducono nel seguente sistema :

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ C(x) \geq 0 \end{cases}$$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo un'equazione irrazionale contenente un solo radicale di indice due. Si isola questo radicale e si eleva nuovamente al quadrato.

$$\sqrt{2x+15} - \sqrt{x+4} = 2 \quad , \quad 2x + 15 - 2\sqrt{(2x+15)(x+4)} + x + 4 = 4$$

$$2\sqrt{(2x+15)(x+4)} = 3x + 15 \quad , \quad 4\left(2x^2 + 8x + 15x + 60\right) = 9x^2 + 90x + 225$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad , \quad x_1 = -3 \ \textbf{(R.A.)} \quad , \quad x_2 = 5 \ \textbf{(R.A.)}$$

$\begin{cases} 2x + 15 \geq 0 \quad per \quad x \geq -\dfrac{15}{2} \\ x + 4 \geq 0 \quad per \quad x \geq -4 \end{cases}$ Il sistema è verificato per $x \geq -4$

3) L'equazione irrazionale contiene almeno tre radicali di indice due

$\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}+\sqrt{C(x)}+D(x)=0$ oppure $\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}+\sqrt{C(x)}+\sqrt{D(x)}=0$

Si isolano due radicali e si eleva al quadrato ambo i membri. Si ottiene una equazione irrazionale contenente almeno un radicale in meno. Si procede nella razionalizzazione fino ad ottenere una equazione non contenente radicali. Se vogliamo evitare la verifica dobbiamo imporre, di volta in volta, la condizione di realtà e la condizione di positività.

$\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$ Condizione di realtà $\begin{cases} 2x+7\geq 0 \quad per \ x\geq -\dfrac{7}{2} \\ 3x-18\geq 0 \quad per \ x\geq 6 \qquad x\geq 6 \\ 7x+1\geq 0 \quad per \ x\geq -\dfrac{1}{7} \end{cases}$

$2x+7+3x-18+2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}=7x+1$, $2\sqrt{6x^2-15x-126}=2(x+6)$

$6x^2-15x-126=x^2+12x+36, 5x^2-27x-162=0, x_1=-\dfrac{18}{5}$ (R.N.A.), $x_2=9$ (R.A.)

4) L'equazione irrazionale contiene due radicali di indice tre

$\boxed{\sqrt[3]{A(x)}+\sqrt[3]{B(x)}=C(x)}$ Eleviamo ambo i membri al cubo

$A+B+3\cdot\sqrt[3]{A^2\cdot B}+3\cdot\sqrt[3]{A\cdot B^2}$, $3\cdot\sqrt[3]{A\cdot B}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C^3-A-B$

$3\cdot C\sqrt[3]{A\cdot B}=C^3-A-B$ Se eleviamo ambo i membri al cubo otteniamo :

$27C^3\cdot A\cdot B=\left(C^3-A-B\right)^3$ $\boxed{\sqrt[3]{36+7x}+\sqrt[3]{36-7x}=6}$

$$36+7x+36-7x+3\cdot\sqrt[3]{(36+7x)(36-7x)}\left(\sqrt[3]{36+7x}+\sqrt[3]{36-7x}\right)=216$$

$18\cdot\sqrt[3]{1296-49x^2}=144$, $\sqrt[3]{1296-49x^2}=8$, $1296-49x^2=512$, $48x^2=784$, $x^2=16$

$x_1=-4$ (**R.A.**) , $x_2=4$ (**R.A.**)

5) L'equazione contiene tre radicali di indice tre

$\boxed{\sqrt[3]{A(x)}+\sqrt[3]{B(x)}=\sqrt[3]{C(x)}}$ Si eleva ambo i membri al cubo: $A+B+3\sqrt[3]{A^2B}+3\sqrt[3]{AB^2}=C$

$3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C-A-B$, $3\sqrt[3]{ABC}=C-A-B$ Si eleva ambo i membri al cubo

$$27A\cdot B\cdot C = (C - A - B)^3$$

6) Risoluzione di altre equazioni irrazionali

$$\boxed{\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}} \qquad m.c.m. = \sqrt{2x+1} \quad , \quad 2x + 1 + 2\sqrt{x(2x+1)} = 21$$

$$\sqrt{2x^2 + x} = 10 - x \quad , \quad x^2 + 21x - 1000 = 0 \quad , \quad x_1 = -25 \ (\textbf{R.N.A.}) \quad , \quad x_2 = 4 \ (\textbf{R.A.})$$

Equazioni reciproche

DEFINIZIONE

1) Una equazione ad una incognita, ridotta a forma normale , si dice **reciproca di prima specie** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali

2) Una equazione ad una incognita , ridotta a forma normale , si dice **reciproca di seconda specie** quando i coefficienti dei termini estremi e di quelli dei termini equidistanti dagli estremi sono opposti

OSSERVAZIONE

L'equazione si dice **reciproca** perché, se ammette come radice il numero α , essa ammette come radice anche il numero $\frac{1}{\alpha}$.

Equazioni reciproche di terzo grado

1) EQUAZIONI DI PRIMA SPECIE

Esse assumono la seguente forma: $ax^3+bx^2+bx+a=0$ **[1]**

Una radice è $\boxed{x = -1}$. Le altre radici si ottengono risolvendo una equazione di secondo grado che si ricava dalla [1] applicando la **regola di Ruffini**. $15x^3-19x^2-19x+15=0$

	15	-19	-19	+15
-1		-15	+34	-15
	15	-34	15	//

$$x = -1 \qquad 15x^2 - 34 + 15 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 225}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{64}}{15} = \frac{17 \pm 8}{15}$$

$$x = \frac{3}{5} \qquad x = \frac{5}{3}$$

2) EQUAZIONI DI SECONDA SPECIE

Esse assumono la seguente forma: $ax^3+bx^2-bx-a=0$ **[2]**

Una radice è $\boxed{x=1}$. le altre due si ricavano risolvendo una equazione di secondo grado che si ottiene dalla [2] applicando la regola di Ruffini . $6x^3-19x^2+19x-6=0$

	6	-19	+19	-6
1		6	-13	+6
	6	-13	6	//

$\boxed{x=1}$ $6x^2-13x+6=0$, $x=\dfrac{2}{3}$, $x=\dfrac{3}{2}$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{13\pm5}{12}$$

Equazioni reciproche di quarto grado

1) Equazioni di prima specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ [3]

Dividiamo ambo i membri per x^2: $ax^2+bx+c+\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{x^2}=0$

$a\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+c=0$ Pongo : $x+\dfrac{1}{x}=y$ $\left[\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2\ \right]$ Ottengo :

$a\left(y^2-2\right)+by+c=0$ $ay^2+by+c-2a=0$

Si tratta di una equazione di secondo grado in **y** le cui radici y_1 ed y_2 si ricavano facilmente. Le quattro radici dell'equazione [3] si ottengono risolvendo le due seguenti equazioni di secondo grado in x: $x+\dfrac{1}{x}=y_1$ $(\ x_1\ ,x_2\ )$ $x+\dfrac{1}{x}=y_2$ $(\ x_3\ ,x_4\ )$

$8x^4-14x^3-69x^2-14x+8=0$ $8x^2-14x-69-\dfrac{14}{x}+\dfrac{8}{x^2}=0$

$8\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-14\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-69=0$ Pongo : $x+\dfrac{1}{x}=y$ $\left[\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2\ \right]$ Ottengo :

$8\left(y^2-2\right)-14y-69=0$, $8y^2-16-14y-69=0$, $8y^2-14y-85=0$

$y=\dfrac{7\pm\sqrt{49+680}}{8}=\dfrac{7\pm\sqrt{729}}{8}=\dfrac{7\pm27}{8}$, $y_1=-\dfrac{5}{2}$, $y_2=\dfrac{17}{4}$

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$ $\Rightarrow 2x^2+2=-5x \Rightarrow 2x^2+5x+2=0$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\dfrac{-5\pm3}{4}$, $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 4 = 17x \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{4} \quad , \quad x_2 = 4$$

2) Equazioni di seconda specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^4 + bx^3 - bx - a = 0}$ [4]

In una **equazione reciproca di quarto grado e di seconda specie** manca il termine di secondo grado . Questa equazione si può risolvere in due maniere .

PRIMO METODO

Due radici sono sempre: $\boxed{x = \pm 1}$ Le altre due radici x_3 ed x_4 si ottengono risolvendo una equazione di secondo grado che si ottiene applicando due volte all'equazione [4] la regola di Ruffini .

SECONDO METODO

Decomponendo in fattori il primo membro dell'equazione [4] .

$$a\left(x^4 - 1\right) + bx\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad , \quad a\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) + bx\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\left(x^2 - 1\right)\left(ax^2 + a + bx\right) = 0 \ , \ \left(x^2 - 1\right)\left(ax^2 + bx + a\right) = 0 \ , \ ax^2 + bx + a = 0 \ , \ x^2 - 1 = 0$$

$$\boxed{3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0}$$

PRIMO METODO

	3	-10	0	10	-3
1		3	-7	-7	+3
	3	-7	-7	3	#

$x = 1$

$$\boxed{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0}$$

	3	-7	-7	+3
-1		-3	10	-3
	3	-10	3	#

$x = -1$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \ , \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 3 \end{cases} , \ x_1 = -1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = \frac{1}{3} \ , \ x_4 = 3$$

SECONDO METODO

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0 \quad , \quad 3\left(x^4 - 1\right) - 10x\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$3\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) - 10x\left(x^2 - 1\right) = 0 \quad , \quad \left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 - 10x + 3\right) = 0 \quad , \quad x^2 - 1 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 1 = 0} \quad , \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad , \quad x_3 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_4 = 3$$

Equazioni reciproche di quinto grado

1) Equazioni di prima specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$ [5]

Una radice di questa equazione è << **- 1** >> . Le altre quattro radici si ricavano risolvendo una reciproca di quarto grado che si ottiene dall'equazione di partenza applicando la **regola di Ruffini** .

$$\boxed{8x^5 - 46x^4 + 47x^3 + 47x^2 - 46x + 8 = 0}$$

	8	-46	+47	+ 47	-46	+8
-1		-8	+54	-101	+54	-8
	8	-54	101	-54	8	#

$x_1 = -1$

$$\boxed{8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0}$$

Si tratta di una equazione reciproca di quarto grado e di prima specie . Le sue radici sono :

$$x_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_3 = 2 \quad , \quad x_4 = \frac{1}{4} \quad , \quad x_5 = 4$$

2) Equazioni di seconda specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma : $\boxed{ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0}$ [6]

Una radice di questa equazione è <<1>>. Le altre quattro radici si ricavano risolvendo una reciproca di quarto grado che si ottiene dall'equazione di partenza applicando la **regola di Ruffini**.

$$6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$$

	6	-1	-43	+43	+1	-6
1		+6	+5	-38	+5	+6
	6	+5	-38	+5	+6	#

$x_1 = 1$

$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -3$, $x_5 = -\dfrac{1}{3}$

Equazioni reciproche di sesto grado e di seconda specie

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $\boxed{ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a = 0}$ [7]

Manca sempre il termine di terzo grado. Ammettono le radici $\boxed{x = \pm 1}$ e le radici di una equazione reciproca di quarto grado che si ricava applicando all'equazione di partenza due volte di seguito la **regola di Ruffini**.

$$6x^6 - 35x^5 + 54x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$$

	6	-35	+56	0	-56	+35	-6
-1		-6	+41	-97	+97	-41	+6
	6	-41	+97	-97	+41	-6	#

$x_1 = -1$

$$6x^5 - 42x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$$

	6	-41	+97	-97	+41	-6
1		+6	-35	+62	-35	+6
	6	-35	+62	-35	+6	#

$x_1 = 1$

$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$, $x_3 = \dfrac{1}{3}$, $x_4 = 3$, $x_5 = \dfrac{1}{2}$, $x_6 = 2$

OSSERVAZIONE

1) Le **equazioni reciproche di prima specie** di grado pari superiori al quarto non si sanno risolvere

2) Le **equazioni reciproche di prima specie** e di **grado dispari** si sanno risolvere solo fino al quinto grado

3) Le **equazioni reciproche di seconda specie** e di **grado dispari** si sanno risolvere fino al quinto grado

4) Le **equazioni reciproche di seconda specie e di grado pari** si sanno risolvere fino al sesto grado

Ulteriori considerazioni sull'algebra elementare

Storicamente l'algebra si sviluppa passando attraverso le seguenti fasi:

1) Algebra retorica nella quale i problemi e la loro risoluzione sono espresse completamente a parole

2) Algebra sincopata nella quale per qualche operazione e per alcune quantità sono usate abbreviazioni simboliche

3) Algebra simbolica nella quale viene usato un completo sistema di notazioni e tutte le trasformazioni algebriche sono espresse mediante simboli (ha inizio nel XVI secolo)

Equazione algebrica

Si dice equazione algebrica di grado n in una incognita ogni equazione riconducibile alla seguente forma: $\boxed{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0}$ **[1]** con $a_i \in R$ oppure $a_i \in C$

L'equazione [1] si dice **completa** quando tutti i coefficienti a_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ sono diversi da zero, **monica** quando $a_o = 1$. Si chiama **radice** (o **soluzione**) dell'equazione [1] ogni numero reale o complesso α per il quale risulta:

$$a_o \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

Risolvere un'equazione significa trovare tutte le sue radici e questo si può fare in due modi diversi. Un modo consiste nella determinazione dei valori numerici approssimati delle radici quando sono dati quelli dei coefficienti e in tal caso si parla di **risoluzione numerica** dell'equazione.

L'altro modo consiste nell'esprimere le radici per mezzo di funzioni dei coefficienti in modo da potere agire anche quando i coefficienti non siano espressi numericamente e in tale caso si parla di **risoluzione analitica** del l 'equazione.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni equazione algebrica ha almeno una radice (reale o complessa).

COROLLARIO N° 1

Ogni polinomio $P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ può essere rappresentato in un solo modo (a meno dell'ordine dei fattori) come prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti (reali o) complessi.

COROLLARIO N° 2

Se il numero complesso $a + bi$ è **radice** dell'equazione [1] anche il numero complesso e coniugato $a - bi$ è **radice** dell'equazione [1], cioè ogni **equazione algebrica** o non ammette radici complesse o ne ammette un numero pari a due a due complesse e coniugate.

COROLLARIO N° 3

Ogni equazione algebrica di **grado dispari** ammette almeno una radice reale

COROLLARIO N° 4

Ogni polinomio di grado n a coefficienti reali può essere decomposto in una sola maniera in fattori di primo grado e di secondo grado (**irriducibili**, cioè non ulteriormente decomponibili in fattori di primo grado a coefficienti reali) a coefficienti reali.

COROLLARIO N° 5

Se risulta $a_o(x-\alpha_1)^{n_1}\cdot(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots\cdots(x-\alpha_i)^{n_i}=0$ con $n_1+n_2+\cdots+n_i=n$, diciamo che la **radice** α_1 $(\alpha_2,\cdots,\alpha_i)$ è **multipla di ordine** n_1 (oppure ha molteplicità n_1 $[n_2,\cdots,n_i]$.

Se, in particolare, risulta $n_1=1$ $(n_1=2)$ la radice α_1 si dice **semplice** (**doppia**).

COROLLARIO N° 6

Ogni equazione algebrica di grado n **ammette n radici reali** o complesse (non necessariamente distinte)

COROLLARIO N° 7

$n=2$	$a_ox^2+a_1x+a_2=0$	$\{x_1,x_2\}$	$-\dfrac{a_1}{a_o}=x_1+x_2$	$\dfrac{a_2}{a_0}=x_1\cdot x_2$
$n=3$	$a_ox^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$	$\{x_1,x_2,x_3\}$	$-\dfrac{a_1}{a_o}=x_1+x_2+x_3$	
		$\dfrac{a_2}{a_0}=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3$		$-\dfrac{a_3}{a_o}=x_1\cdot x_2\cdot x_3$

TEOREMA

In generale un'equazione algebrica di grado maggiore o uguale al quinto non è risolubile mediante radicali.

Unità Didattica N° 13

Le inequazioni ad una incognita

Proprietà delle disuguaglianze fra numeri reali relativi

Si dice che un numero reale relativo **a** è maggiore, uguale o minore di un altro numero reale relativo **b** quando la differenza tra il primo numero **a** ed il secondo numero **b** risulta rispettivamente positiva, nulla, negativa, cioè quando: $a \geq b \iff a - b \geq 0$ $\quad a < b \iff a - b < 0$

Dati i numeri reali relativi **a**, **b** si può verificare una sola delle tre seguenti relazioni:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

Si chiama **disuguaglianza** tra i numeri reali **a, b** ogni scrittura del tipo $a > b \quad a < b$

con la quale si vuole esprimere che un numero è maggiore o minore di un altro numero.

Dati tre numeri, se il primo è maggiore del secondo ed il secondo è maggiore del terzo, anche il primo è maggiore del terzo (**proprietà transitiva delle disuguaglianze**)

$$\{a > b \ , \ b > c\} \Rightarrow a > c$$

Aggiungendo o togliendo da ambedue i membri di una disuguaglianza uno stesso numero si ottiene una disuguaglianza dello stesso tipo (senso).

$$a > b \iff a + m > b + m \quad , \quad a < b \iff a + m < b + m \qquad \forall a, b m \in R$$

In una disuguaglianza un termine può essere portato da un membro all'altro cambiandolo di segno.

$$a + m > b \iff a > b - m \qquad a + m < b \iff a < b - m$$

Moltiplicando e dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo si ottiene una disuguaglianza dello stesso tipo. In simboli abbiamo:

$$a > b \iff a \cdot c > b \cdot c \ \wedge \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \forall a, b \in R \ \wedge \ \forall c \in R^{+}$$

$$a < b \iff a \cdot c < b \cdot c \ \wedge \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad \forall a, b \in R \ \wedge \ \forall c \in R^{+}$$ (*)

Moltiplicando e dividendo ambedue i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo si ottiene una disuguaglianza di senso contrario. In simboli abbiamo:

$$a > b \iff a \cdot c < b \cdot c \ \wedge \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad \forall a, b \in R \ \wedge \ \forall c \in R^{-}$$

$$a < b \iff a \cdot c > b \cdot c \ \wedge \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \forall a, b \in R \ \wedge \ \forall c \in R^{-}$$ (*)

(*) $\wedge$ simbolo di **congiunzione logica** ; $a \wedge b$ si legge : << a e b >>

$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^+$

$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^-$

$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^+$

$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ se $a, b \in R^-$

Inequazioni e loro proprietà

Consideriamo due funzioni numeriche $f(x)$ e $g(x)$ entrambe definite in un insieme $I \subseteq R$. Se alla x attribuiamo un particolare valore numerico (ad esempio x_1) dell'insieme **I**, $f(x)$ e $g(x)$ assumono valori numerici tali che per essi è possibile una sola delle tre seguenti relazioni:

$f(x_1) > g(x_1)$ $\qquad$ $f(x_1) = g(x_1)$ $\qquad$ $f(x_1) < g(x_1)$

Spesso è necessario generalizzare il problema e ricercare tutti i valori di $x \in I$ per i quali si verifica una delle due seguenti relazioni: **[1]** $f(x) > g(x)$ $\qquad$ $f(x) < g(x)$ **[2]**

La relazione **[1]** (o la relazione [2]) che traduce il problema della ricerca di tutti i valori numerici di $x \in I$ per i quali la funzione $f(x)$ assume valori numeri maggiori o minori di quelli assunti dalla funzione $g(x)$ dicesi **inequazione**. In breve possiamo dire che una **inequazione è una disuguaglianza condizionata posta allo scopo di stabilire se esistono valori della x che rendono** $f(x)$ **maggiore o minore di** $g(x)$**.**

Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si chiamano i **due membri** (primo e secondo membro) dell'inequazione, mentre la variabile x dicesi **incognita**. Le **soluzioni** o **radici** di una inequazione ad una incognita sono **intervalli**. Una inequazione che non ammette soluzioni dicesi **impossibile**, se ammette soluzioni si dice **possibile** o **compatibile**.

Due inequazioni si dicono **equivalenti** se ammettono le stesse soluzioni, cioè se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda e viceversa ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima. Se nelle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ le operazioni da eseguirsi nell'incognita x sono solo di addizione, sottrazione e moltiplicazione (in tal caso $f(x)$ e $g(x)$ sono **polinomi**) l'inequazione dicesi **razionale intera**.

Se, infine, $f(x)$ e $g(x)$ o entrambe sono funzioni irrazionali l'inequazione dicesi **irrazionale**.

Per le inequazioni valgono i seguenti **principi di equivalenza**:

01) Principio preliminare

Operando secondo le regole del calcolo algebrico all'interno del primo o del secondo membro o di entrambi i membri di una inequazione otteniamo una inequazione equivalente alla data.

02) Principio di addizione e di sottrazione

Se $p(x)$ è un polinomio in x allora è valido il seguente **teorema fondamentale**:

$$f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm p(x) \gtrless g(x) \pm p(x)$$

Da questo teorema si deducono i due seguenti **corollari**:

a) Se nei due membri di una stessa inequazione compaiono due termini uguali, questi si possono eliminare

b) un qualsiasi termine di una inequazione può essere trasportato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno

03) Principio di moltiplicazione e di divisione

Esso afferma quanto segue:

$$f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow m \cdot f(x) \gtrless m \cdot g(x) \quad \forall\, m \in R^+$$

$$f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{m} \gtrless \frac{g(x)}{m} \quad \forall\, m \in R^+$$

$$f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow k \cdot f(x) \lessgtr k \cdot g(x) \quad \forall\, k \in R^-$$

$$f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{k} \lessgtr \frac{g(x)}{k} \quad \forall\, k \in R^-$$

Per $k = -1$ abbiamo $f(x) \gtrless g(x) \Leftrightarrow -f(x) \lessgtr -g(x)$

cioè possiamo cambiare il segno a tutti i termini di una inequazione purché ne cambiamo il senso.

Le inequazioni $f(x) \gtrless g(x)$ e $f(x) - g(x) \gtrless 0$ sono **equivalenti**, per cui una qualsiasi inequazione può essere ricondotta alla seguente **forma canonica**: $P(x) > 0$

Se $\Phi(x)$ è un polinomio ridotto a forma canonica, allora il suo grado dicesi **grado** dell'inequazione razionale intera.

Osservazione :Se moltiplichiamo o dividiamo ambo i membri di una inequazione per una funzione $p(x)$, in generale , non otteniamo una inequazione equivalente , cioè l'inequazione $f(x) \gtrless g(x)$ non è equivalente né alla inequazione $p(x) \cdot f(x) \gtrless p(x) \cdot g(x)$ **[3]**

né alla inequazione $\dfrac{f(x)}{p(x)} \gtrless \dfrac{g(x)}{p(x)}$ **[4]**

Infatti l'inequazione [3] è **equivalente** alla inequazione: $p(x) \cdot [f(x) - g(x)] \gtrless 0$

la quale , a sua volta , è **equivalente** ai due sistemi:

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ f(x) - g(x) \gtrless 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p(x) < 0 \\ f(x) - g(x) \lessgtr 0 \end{cases}$$

i quali, come si intuisce facilmente, non sono equivalenti all'inequazione $f(x) \gtrless g(x)$.

Le suddette inequazioni sono **equivalenti** soltanto quando $p(x)$ è una funzione positiva in tutto il suo dominio.

Inequazioni razionali intere di primo grado ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle seguenti forme:

$$ax > b \qquad ax < b$$

Per risolvere una inequazione di primo grado ridotta a forma canonica basta dividere ambo i membri per **a**, ricordando di cambiare il senso dell'inequazione se è $a < 0$.

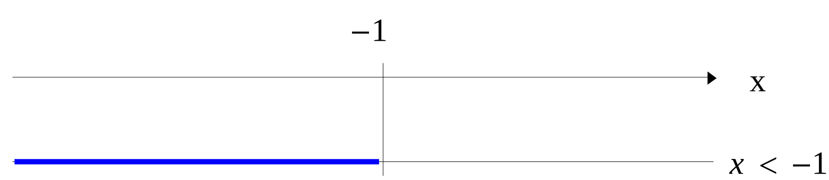
$$ax > b \quad \Rightarrow \quad x > \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a > 0 \quad , \quad x < \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a < 0$$

$$ax < b \quad \Rightarrow \quad x < \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a > 0 \quad , \quad x > \frac{b}{a} \ \text{ se } \ a < 0$$

ESEMPI

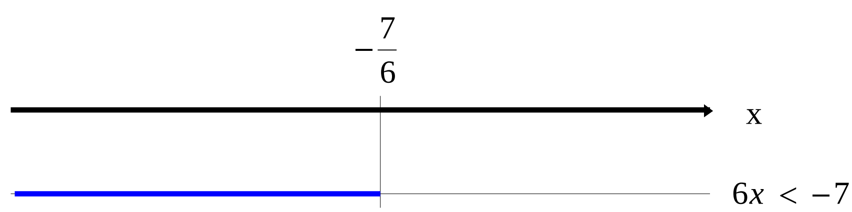
$$\boxed{\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} > \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}} \qquad \text{per} \quad x < -1$$

$$6 - 3x - 12 - 6x > 6x + 21 - 8x - 20 \quad ; \quad -7x > 7 \quad , 7x < -7 \quad ; \quad x < -1$$



$$(x+1)^3 + 3x + 3 < x^3 + 3(x+1)(x-1) \qquad \text{per} \quad x < -\frac{7}{6}$$

$$\cancel{x}^3 + 3\cancel{x}^2 + 3x + 1 + 3x + 3 < \cancel{x}^3 + 3\cancel{x}^2 - 3 \quad , \quad 6x < -7 \quad , \quad x < -\frac{7}{6}$$



Attraverso lo studio del segno di un binomio di primo grado è possibile risolvere inequazioni di grado superiore al primo. Naturalmente il primo membro dell'inequazione ridotta a forma canonica deve essere decomposto in fattori di primo grado.

IL **segno** del binomio di primo grado $ax + b$ coincide col segno di **a** alla destra dello zero del binomio. Questo significa che il segno del binomio di primo grado $ax + b$ coincide col segno di **a** per valori della x maggiori dello zero del binomio $ax + b$.

$-6x^3 + x^2 + 57x - 70 > 0$ $\quad (x - 2)(-3x + 5)(2x + 7) > 0$ per $x < -\frac{7}{2}$ e $\frac{5}{3} < x < 2$

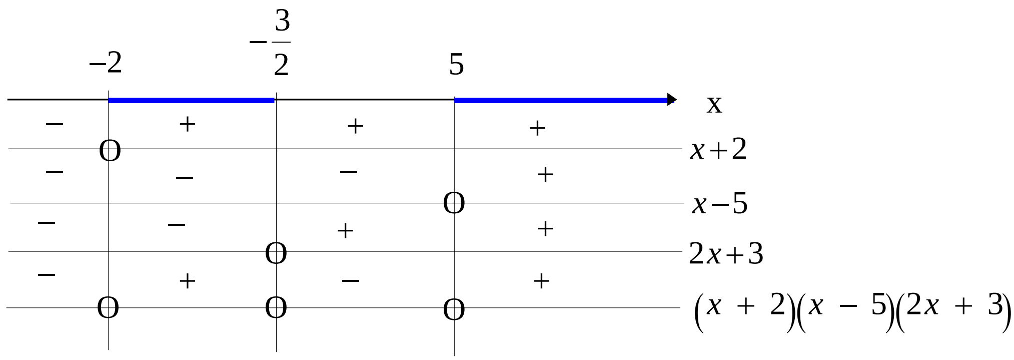
Si calcolano gli **zeri** dei tre fattori di primo grado e si compila il seguente prospetto .

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, $-3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$, $2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

x		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		2	
$x - 2$	$-$		$-$		$-$	O	$+$
$-3x + 5$	$+$		$+$	O	$-$		$-$
$2x + 7$	$-$	O	$+$		$+$		$+$
$(x - 2)(-3x + 5)(2x + 7)$	$+$	O	$-$	O	$+$	O	$-$

$-2x^3 + 3x^2 + 29x + 30 < 0$ $\quad$ per $\quad -2 < x < -\frac{3}{2}$, $x > 5$

$2x^3 - 3x^2 - 29x - 30 > 0$ $\quad (x + 2)(x - 5)(2x + 3) > 0$



Segno di un trinomio di secondo grado ad una incognita

Consideriamo un trinomio di secondo grado nella variabile x: $T(x) = ax^2 + bx + c$ **[5]**

con a, b, c numeri reali relativi costanti (cioè numeri dati indipendenti da x) ed $a \neq 0$.

Col simbolo $T(\alpha)$ intendiamo il numero che si ottiene quando nella [5] al posto della x poniamo α, cioè il valore numerico che assume il trinomio per $x = \alpha$. Se poniamo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{[6]}$$

otteniamo una equazione di secondo grado in **x** (detta **equazione associata al trinomio**) le cui radici x_1 ed x_2 si chiamano **zeri** del trinomio. Per convenzione poniamo $x_1 < x_2$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ = **DISCRIMINANTE** del trinomio **[7]**

01) $\Delta > 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e distinti**

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $a > 0$	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $a < 0$

02) $\Delta = 0$: **il trinomio ammette due zeri reali e coincidenti** $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

03) $\Delta < 0$: **il trinomio ammette due zeri complessi e coniugati**, il trinomio non si annulla mai $\forall\, x \in R$.

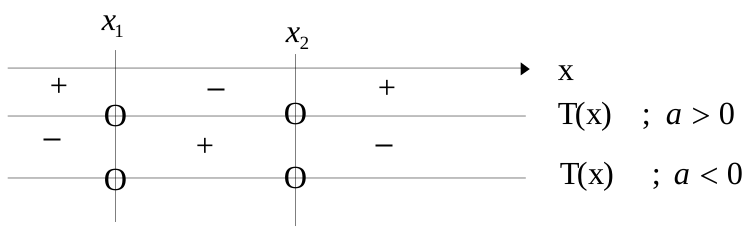
L'intervallo limitato ed aperto $]x_1, x_2[$ è detto **intervallo delle radici**.

Se $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ diciamo che la variabile x assume **valori esterni all'intervallo delle radici**. Dall'algebra sappiamo che: $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ **[8]**

Studiare il segno del trinomio significa stabilire per quali valori della variabile x esso assume valori positivi, negativi, nulli. Dobbiamo distinguere tre casi:

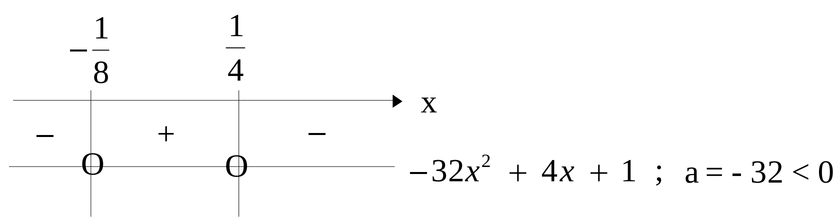
01) $\Delta > 0$ **Il trinomio assume lo stesso segno di a per valori della x esterni all'intervallo delle radici, segno opposto ad a per valori della x interni all'intervallo delle radici.**

Sinteticamente possiamo scrivere:



Studiare il segno del trinomio $T(x) = -32x^2 + 4x + 1$

L'equazione associata al trinomio è: $32x^2 - 4x - 1 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ (zeri del trinomio)



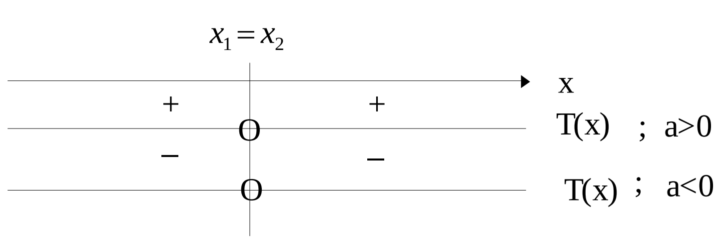
$T(x) > 0 \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right[$ (cioè per $-\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}$]

$T(x) < 0 \qquad \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{8}\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$ (cioè per $x < -\frac{1}{8}$ ed $x > \frac{1}{4}$]

$T(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{8}$ ed $x = \frac{1}{4}$

02) $\Delta = 0$: **il trinomio assume sempre lo stesso segno di a e si annulla per** $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Quindi il segno di **T(x)** coincide col segno di **a** , tranne che per $x = x_1$ in corrispondenza del quale il trinomio si annulla .

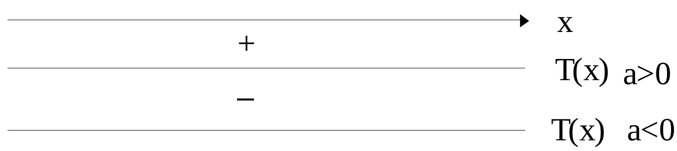


Studiare il segno del trinomio $T(x) = -4x^2 + 12x - 9 = 0$

$$\Delta = 0 \ , \ a = -4 < 0 \ , \ x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$$

$$T(x) > 0 \quad \forall\, x \in \varnothing \quad , \quad T(x) < 0 \quad \forall\, x \neq \frac{3}{2} \quad , \quad T(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{3}{2}$$

03) $\Delta < 0$ **Il trinomio assume sempre lo stesso segno di a**.



Studiare il segno del trinomio $T(x) = 4x^2 - 12x + 1$

$$\Delta < 0 \quad , \quad a > 0 \quad , \quad T(x) > 0 \quad \forall\, x \in R \quad , \quad T(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in \varnothing$$

Inequazioni razionali intere di secondo grado

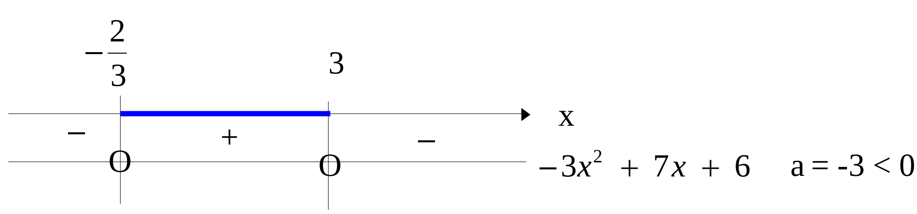
Sono inequazioni riconducibili ad una delle due seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad\qquad ax^2 + bx + c < 0$$

Per risolvere una inequazione di secondo grado ad una incognita ridotta a forma canonica basta ricordare le proprietà del segno del trinomio .

$$-3x^2 + 7x + 6 > 0 \quad \forall\, x \in \left]-\frac{2}{3}, 3\right[\quad \left(-\frac{2}{3} < x < 3\right)$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \ , \ x_1 = -\frac{2}{3} \quad , \ x_2 = 3$$



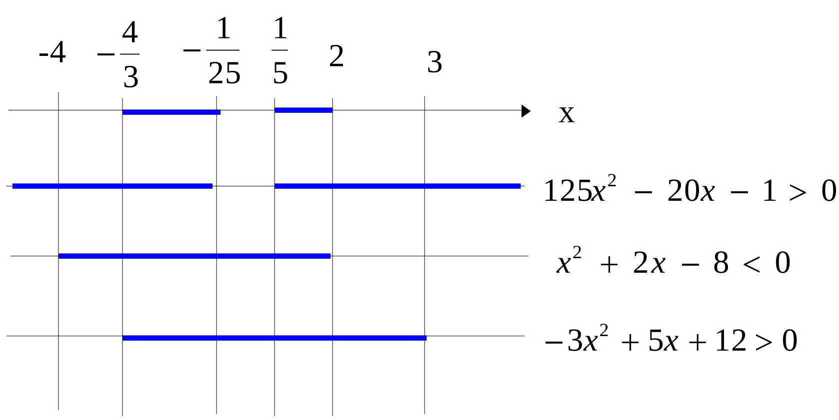
Sistemi di inequazioni in una incognita

Dicesi **sistema di inequazioni in una incognita** l'insieme di due o più incognite di cui vogliamo trovare, quando esistono, le soluzioni comuni. Un sistema di inequazioni dicesi **possibile** se ammette soluzioni, **impossibile** se non ammette soluzioni. In quest'ultimo caso le inequazioni che compongono il sistema sono fra loro **incompatibili**.

Per risolvere un sistema di inequazioni si procede come segue:

- si trovano le soluzioni di tutte le inequazioni che compongono il sistema. Come sappiamo tali soluzioni sono intervalli numerici
- L'intervallo o gli intervalli numerici comuni a tutti gli intervalli precedentemente trovati sono le soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} 125x^2 - 20x - 1 > 0 \quad per \quad x < -\dfrac{1}{25} \;\; e \;\; x > \dfrac{1}{5} \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \quad per \quad -4 < x < 2 \\ -3x^2 + 5x + 12 > 0 \quad per \quad -\dfrac{4}{3} < x < 3 \end{cases}$$

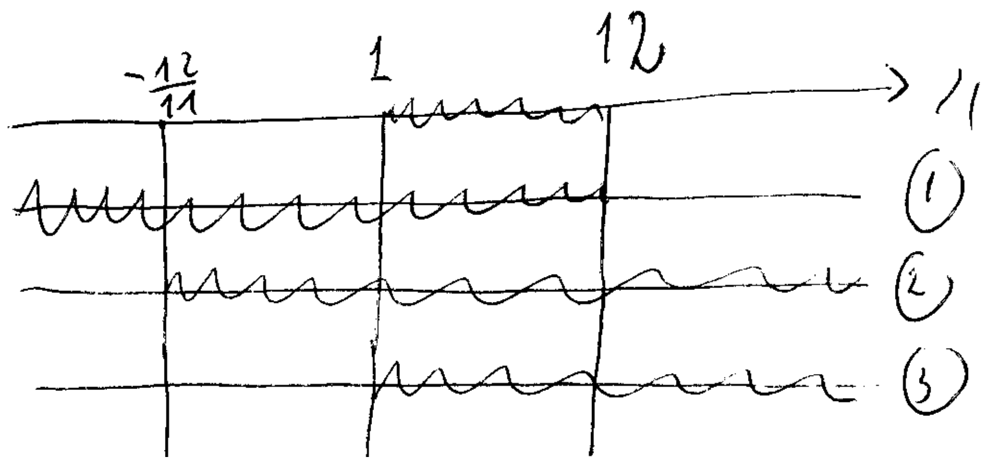


(*)

Il sistema dato è verificato per $-\dfrac{4}{3} < x < -\dfrac{1}{25}$ e $\dfrac{1}{5} < x < 2$ cioè $\forall x \in \left]-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{25}\right[\cup \left]\dfrac{1}{5}, 2\right[$

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{(2x+1)(x-3)}{4} - \dfrac{(x+2)(x-2)}{3} + \dfrac{10x+7}{12} > \dfrac{(x-1)^2}{6} \quad per \quad x < 12 \\ (2) \quad \dfrac{(2x+3)^2}{2} - \dfrac{(5x+1)(x-2)}{3} - \dfrac{(x-4)^2}{4} > \dfrac{x^2-10}{12} \quad per \quad x > -\dfrac{2}{11} \\ (3) \quad \dfrac{(2x-1)^2}{3} - \dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{5x^2+1}{6} < -\dfrac{x+7}{3} \quad per \quad x > 1 \end{cases}$$

(*) Gli intervalli soluzioni delle singole inequazioni vengono messi in evidenza mediante serpentine. Le serpentine disegnate sull'asse orientato ci dicono quali sono le soluzioni del sistema dato.



Il sistema è verificato per $1 < x < 12$

Inequazioni razionali fratte ad una incognita

Sono inequazioni che possono essere ricondotte ad una delle due seguenti forme :

[1] $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$ **[2]** con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi in x .

Per risolvere queste inequazioni bisogna scartare i valori della x che annullano il denominatore $B(x)$, cioè bisogna porre: $B(x) \neq 0$.

Le soluzioni dell'inequazione $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi :

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'inequazione $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$ coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

Nella pratica, però, conviene risolvere una inequazione frazionaria attraverso lo studio del segno dei **fattori di primo e di secondo grado** in cui possono essere decomposti i polinomi **A(x)** e **B(x)**. I seguenti esempi serviranno a chiarire quanto detto.

$$\frac{2(7 - x)(3x^2 + 4x - 15)}{3(-2x^2 + 3x + 2)} > 0 \quad \text{per} \quad -3 < x < -\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{5}{3} < x < 2 \quad , \quad x > 7$$

$$7 - x = 0 \ \Rightarrow \ x = 7 \ , \ 3x^2 + 4x - 15 = 0 \ \Rightarrow \ x = -3 \quad x = \frac{5}{3}$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 2$$

x		-3		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		2		7	
$7 - x$	+		+		+		+		+	O	−
$3x^2 + 4x - 15$	+	O	−		−	O	+		+		+
$-2x^2 + 3x + 2$	−		−	O	+		+	O	−		−
$\frac{2(7 - x)(3x^2 + 4x - 15)}{3(-2x^2 + 3x + 2)}$	−	O	+	∞	−	O	+	∞	−	O	+

Inequazione biquadratica

E' una inequazione riconducibile ad una delle due seguenti forme:

$$ax^4 + bx^2 + c > 0 \qquad ax^4 + bx^2 + c < 0$$

Si risolve decomponendo in fattori di secondo grado il trinomio $ax^4 + bx^2 + c$ e studiando il segno dei singoli fattori .

$$9x^4 - 106x^2 + 225 < 0$$

per: $-3 < x < -\frac{5}{3} \quad , \quad \frac{5}{3} < x < 3$

$$9x^4 - 106x^2 + 225 = 0 \ , \ x^2 = \frac{53 \pm \sqrt{2809 - 2025}}{9} = \frac{53 \pm 28}{9} \ , \ x^2 = \frac{25}{9} \ , \ x^2 = 9$$

$$9x^4 - 106x^2 + 225 = 9\left(x^2 - \frac{25}{9}\right)(x^2 - 9) = (9x^2 - 25)(x^2 - 9)$$

L'inequazione proposta può essere scritta nella seguente maniera: $(9x^2 - 25)(x^2 - 9) < 0$

x		-3		$-\frac{5}{3}$		$\frac{5}{3}$		3	
$9x^2 - 25$	+		+	O	-	O	+		+
$x^2 - 9$	+	O	-		-		-	O	+
$(9x^2 - 25)(x^2 - 9)$	+	O	-	O	+	O	-	O	+

Inequazioni irrazionali

Una inequazione si dice **irrazionale** quando in essa l'incognita figura almeno una volta sotto il segno di radice. In generale, la risoluzione di una inequazione irrazionale presenta notevoli difficoltà. Noi ci limiteremo alla risoluzione di alcuni tipi di inequazioni irrazionali.

Indichiamo con $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in x .

- Inequazioni irrazionali del tipo: $A(x) > \sqrt{B(x)}$ **[1]**

Siccome operiamo nel campo dei numeri reali dovrà essere:

[2] $B(x) \geq 0$ (condizione di **realtà**)

Inoltre, poiché conveniamo di considerare i radicali in senso aritmetico, dovrà essere:

[3] $A(x) > 0$ (condizione di **positività**)

Sotto queste condizioni è lecito elevare ambo i membri della [1] al quadrato ottenendo :

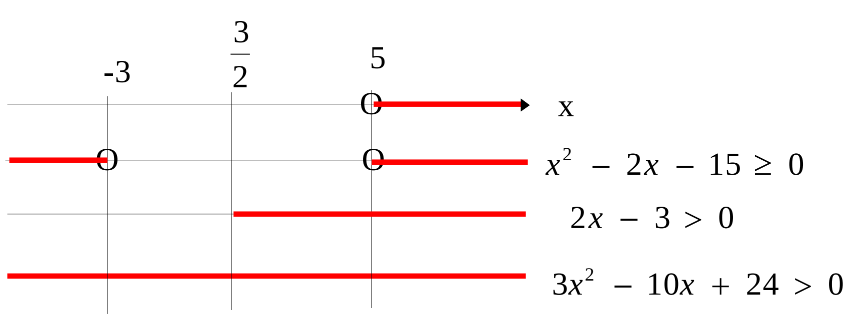
$[A(x)]^2 > B(x)$ **[4]**

Pertanto l'inequazione [1] è **equivalente** al sistema: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ [A(x)]^2 > B(x) \end{cases}$ **[5]**

cioè le soluzioni dell'inequazione [1] coincidono con quelle del sistema **[5]** .

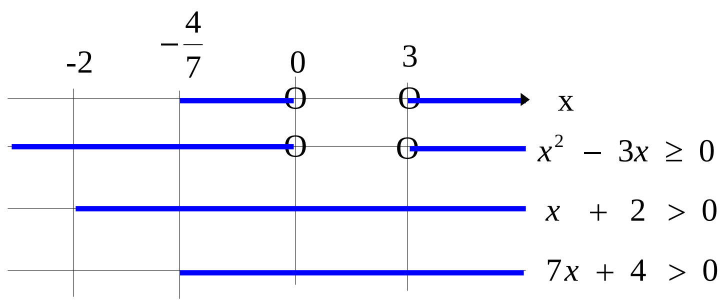
$2x - 3 > \sqrt{x^2 - 2x - 15}$ per $x \geq 5$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ (2x - 3)^2 > x^2 - 2x - 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 & per \quad x \leq -3 \ , \ x \geq 5 \\ 2x - 3 > 0 & per \quad x > \dfrac{3}{2} \\ 3x^2 - 10x + 24 > 0 & \forall \ x \in R \end{cases}$$



$x + 2 > \sqrt{x^2 - 3x}$ per $-\dfrac{4}{7} < x \leq 0 \quad , \quad x \geq 3$

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ (x+2)^2 > x^2 - 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \quad per \quad x \leq 0 \ , \ x \geq 3 \\ x + 2 > 0 \quad per \quad x > -2 \\ 7x + 4 > 0 \quad per \quad x > -\dfrac{4}{7} \end{cases}$$



- Inequazione irrazionale del tipo: $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ **[6]**

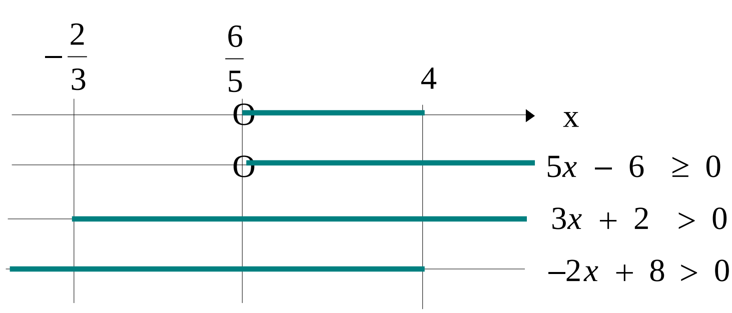
Essa è equivalente al sistema: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$ **[7]**

$\sqrt{x^2 + 4x - 5} > \sqrt{(x+7)(x-3)}$ per : $x \leq -7 \quad , \quad x \geq 3$

$$\begin{cases} (x+7)(x-3) \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 > (x+7)(x-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x - 21 \geq 0 \quad per \quad x \leq -7 \ , x \geq 3 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \quad per \quad x < -5 \ , x > 1 \\ 16 > 0 \qquad \forall \ x \in R \end{cases}$$

$\sqrt{3x+2} > \sqrt{5x-6}$ per $\dfrac{6}{5} \leq x < 4$

$$\begin{cases} 5x - 6 \geq 0 \\ 3x + 2 > 0 \\ 3x + 2 > 5x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 6 \geq 0 \quad per \quad x \geq \dfrac{6}{5} \\ 3x + 2 > 0 \quad per \quad x > -\dfrac{2}{3} \\ -2x + 8 > 0 \quad per \quad x < 4 \end{cases}$$



- Inequazione irrazionale del tipo: $A(x) < \sqrt{B(x)}$ **[8]**

Essa è equivalente ai due seguenti sistemi:

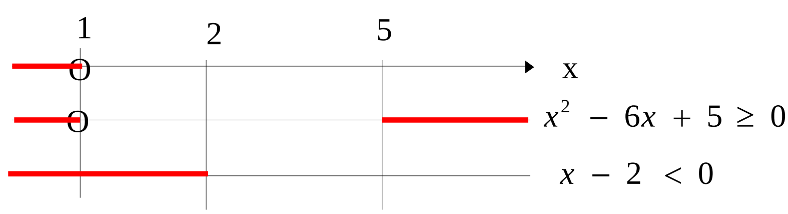
[9] $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$ **[10]**

Nel sistema [10] possiamo trascurare l'inequazione $B(x) > 0$ in quanto essa è **suvvalente** all'inequazione $[A(x)]^2 < B(x)$. Quindi le soluzioni dell'inequazione [8] coincidono con quelle dei due seguenti sistemi:

[9] $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$ **[11]**

$x - 2 < \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ per : $x \leq 1$

$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 & per \quad x \leq 1 \ , \ x \geq 5 \\ x - 2 < 0 & per \quad x < 2 \end{cases}$ Il sistema è verificato per $x \leq 1$



$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x - 2)^2 < x^2 - 6x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 2 \geq 0 & per \quad x \geq 2 \\ 2x - 1 < 0 & per \quad x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Questo secondo sistema non ammette soluzioni.

- Altre inequazioni irrazionali

$A(x) > \sqrt[3]{B(x)} \iff [A(x)]^3 > B(x)$	$A(x) < \sqrt[3]{B(x)} \iff [A(x)]^3 < B(x)$
$\sqrt[3]{A(x)} > \sqrt[3]{B(x)} \iff A(x) > B(x)$	$\sqrt[3]{A(x)} < \sqrt[3]{B(x)} \iff A(x) < B(x)$

$x + 4 > \sqrt[3]{x^3 + 15x + 46}$ per $x < -2 \ , \ x > -\dfrac{3}{4}$

$$(x + 4)^3 > x^3 + 15x + 46 \quad , \quad x^3 + 12x^2 + 48x + 64 > x^3 + 15x + 46$$

$$12x^2 + 33x + 18 > 0 \quad , \quad 4x^2 + 11x + 6 > 0 \quad \text{per} \quad x < -2 \ , \ x > -\frac{3}{4}$$

- Inequazioni irrazionali del tipo : $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} > \sqrt{C(x)}$ $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < \sqrt{C(x)}$

$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 2} > \sqrt{x + 1}$ per : $x \geq 2$

Imponiamo , innanzitutto , la condizione di realtà : $\begin{cases} x - 2 \geq 0 & per \quad x \geq 2 \\ x + 2 \geq 0 & per \quad x \geq -2 \\ x + 1 \geq 0 & per \quad x \geq -1 \end{cases}$

I tre radicali sono reali se : $x \geq 2$. Essendo ambo i membri dell'inequazione positivi, possiamo elevare al quadrato ottenendo:

$$x - 2 + \cancel{x} + 2 + 2\sqrt{x^2 - 4} > \cancel{x} + 1 \ , \quad 1 - x < 2\sqrt{x^2 - 4}$$

Questa inequazione irrazionale, tenendo presente la condizione di realtà, equivale ai due seguenti sistemi:

$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 & per \quad x \leq -2 \, , x \geq 2 \\ 1 - x < 0 & per \quad x > 1 \end{cases}$ Questo sistema è verificato per $x \geq 2$

$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ (1 - x)^2 < 4(x^2 - 4) \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ 1 - x \geq 0 \\ 3x^2 + 2x - 17 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 2 \quad \text{Condizione generale di realtà} \\ x \leq 1 \\ x < -\dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{3} \cong -2{,}7 \ , \ x > \dfrac{-1 + 2\sqrt{13}}{3} \cong 2{,}07 \end{cases}$ Questo sistema non ammette soluzioni

$\sqrt{x - 1} \leq \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1}$ per $x \geq 1$

Condizione di realtà: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ **C.R.** $x \geq 1$

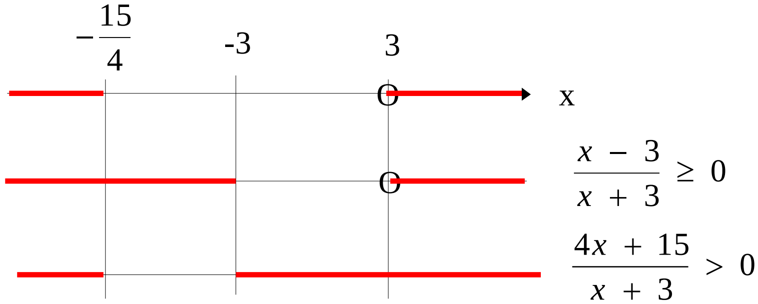
Per $x \geq 1$ risulta : $\sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1} > 0$, quindi è possibile elevare ambo i membri alla sesta potenza ottenendo: $(x - 1)^3 \leq (x\sqrt{x} + 1)^2$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq x^3 + 2x\sqrt{x} + 1$

$-3x(x - 1) - 2 \leq 2x\sqrt{x}$ disuguaglianza sempre verificata per $x \geq 1$, in quanto il primo membro è sempre negativo ed il secondo membro è sempre positivo. Quindi l'intervallo $[1, +\infty[$ è la soluzione dell'inequazione proposta.

$\sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 3}} < 3$ per : $x < -\dfrac{15}{4}$, $x \geq 3$

Condizione di realtà : $\dfrac{x - 3}{x + 3} \geq 0$ per $x < -3$, $x \geq 3$

$\frac{x-3}{x+3} < 9 \;,\; \frac{-8x-30}{x+3} < 0 \;,\; \frac{4x+15}{x+3} > 0$ per: $x < -\frac{14}{4} \;,\; x > -3$



Equazioni contenenti valori assoluti dell'incognita

- Sono equazioni in cui la variabile (incognita) figura almeno una volta all'interno di un valore assoluto. Si risolvono tenendo presente la definizione di valore assoluto di un numero reale relativo,

cioè ricordando che se $x \in R$ abbiamo: $|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

- In generale, una equazione con uno o più valori assoluti si trasforma in due o più equazioni senza valori assoluti, ciascuna delle quali ha la variabile vincolata a variare in un determinato intervallo parziale.

Un **criterio generale** potrebbe essere il seguente:

1) si studia il segno della funzione $f(x)$ presente all'interno del singolo simbolo di valore assoluto

2) otteniamo due o più intervalli parziali all'interno dei quali tutte le funzioni $f(x)$ assumono segno costante, cioè sono positive o negative

3) in ogni intervallo parziale eliminiamo i valori assoluti ricordando che:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) > 0 \\ 0 & se \quad f(x) = 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Otteniamo, in ogni singolo intervallo parziale, una equazione senza valori assoluti ma con delle limitazioni per l'incognita.

- Nella risoluzione di una equazione con moduli possono essere utili le seguenti equivalenze :

$$|f(x)| = k \in R^+ \Leftrightarrow f(x) = \pm k$$

L'equazione $|f(x)| = k \in R^{-}$ non ammette radici reali

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$$

$$|f(x)| = g(x) \quad \not\Leftrightarrow \quad f(x) = \pm g(x)$$

$$\begin{cases} |f(x)| = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

x		-1		0		1		2	
$x^2 - 3x + 2$	+		+		+	0	−	0	+
$x^2 + x$	+	0	−	0	+		+		+

$2|x^2 - 3x + 2| - x = 3|x^2 + x|$

$x < -1 \, , \, 0 < x < 1 \, , \, x > 2$ $\qquad 2x^2 - 6x + 4 - x = 3x^2 + 3x \; , \quad x^2 + 10x - 4 = 0$

$x = -5 \pm \sqrt{25 + 4} \; , \; x_1 = -5 - \sqrt{29}$ (R.A.) $x_2 = -5 + \sqrt{29}$

$-1 < x < 0$ $\qquad 2x^2 - 6x + 4 - x = -3x^2 - 3x \; , 5x^2 - 4x + 4 = 0$

Questa equazione non ammette radici reali

$1 < x < 2$ $\qquad -2x^2 + 6x - 4 + x = 3x^2 + 3x \quad , \quad 5x^2 - 2x + 4 = 0$

Questa equazione non ammette radici reali

$$|2x - 3| = 5$$

x		$\frac{3}{2}$	
2x - 3	−	0	+

Primo metodo

$\boxed{x < \frac{3}{2}} \Rightarrow -2x + 3 = 5 \;\; , \; x = -1$ **S.A.**

$\boxed{x > \frac{3}{2}} \Rightarrow 2x - 3 = 5 \; , \; x \; 0 \; 4$ **S.A.**

Secondo metodo

Essendo $5 > 0$, possiamo elevare al quadrato ambo i membri della nostra equazione ottenendo :

$$(2x - 3)^2 = 25 \; , \; 4x^2 - 12x + 9 = 25 \; , \; 4x^2 - 12x - 16 = 0 \; , \; x^2 - 3x - 4 = 0$$

$x_1 = -1$ (**S.A.**) , $x_2 = 4$ (**S.A.**)

Terzo metodo

$2x - 3 = \pm 5 \quad , \quad 2x - 3 = -5 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad 2x - 3 = 5 \quad , \quad 2x - 3 = 5 \; , \; x = 4$

$$\left|2x - 3\right| = x + 1 \qquad \textbf{[D]}$$

Primo metodo

$\boxed{x \leq \frac{3}{2}} \Rightarrow -2x + 3 = x + 1 \ , \quad 3x = 2 \ , \ x = \frac{2}{3}$ (**S.A.**)

$\boxed{x > \frac{3}{2}} \Rightarrow 2x - 3 = x + 1 \quad , \quad x = 4$ (**S.A.**)

Secondo metodo

Per elevare al quadrato ambo i membri dell'equazione [D] dobbiamo supporre $x + 1 \geq 0$, cioè : $x \geq -1$. Sotto tali ipotesi otteniamo : $\left(2x - 3\right)^2 = \left(x + 1\right)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 2x + 1 \ , \quad 3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{2}{3}$ (**S.A.**) , $x_2 = 4$ (**S.A.**)

Terzo metodo

Se supponiamo $x + 1 \geq 0$, cioè: $x \geq -1$ possiamo scrivere: $2x - 3 = \pm\left(x + 1\right)$

$2x - 3 = -x - 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ (**S.A.**) , $2x - 3 = x + 1 \Rightarrow x_2 = 4$ (**S.A.**)

	-7		$\frac{3}{2}$		x
−		−	O	+	2x - 3
−	O	+		+	x + 7

$$\left|2x - 3\right| = \left|x + 7\right|$$

Primo metodo

$x \leq -7 \Rightarrow -2x + 3 = -x - 7 \ , \ x = 10$ (**R.N.A.**)

$-7 < x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -2x + 3 = x + 7 \ , \ x = -\frac{4}{3}$ (R.N.A.)

$x > \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3 = x + 7 \ , \ x = 10$ (**S.A.**)

Secondo metodo

$$\left(2x - 3\right)^2 = \left(x + 7\right)^2 \ , \ 4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 14x + 49 \ , \ 3x^2 - 26x - 40 = 0$$

$$x_1 = -\frac{4}{3} \quad , \quad x_2 = 10$$

Terzo metodo

$$2x - 3 = \pm\left(x + 7\right) \qquad \text{se} \qquad x \geq -1$$

$$2x - 3 = x + 7 \quad \Rightarrow \quad x = 10 \quad , \quad 2x - 3 = -x - 7 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{3}$$

$$|3 - x| - |x + 2| = 5$$

		-2		3		x
3 - x	+		+	0	−	
x + 2	−	0	+		+	

$\boxed{x \leq -2} \Rightarrow 3 - \cancel{x} + \cancel{x} + 2 = 5 \Rightarrow \quad 5 = 5$

Tutti i punti dell'intervallo $]-\infty, -2]$ sono soluzioni dell'equazione data

$\boxed{-2 < x \leq 3} \Rightarrow 3 - x - x - 2 = 5 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$

$\boxed{x > 3} \Rightarrow -3 + \cancel{x} - \cancel{x} - 2 = 5 \Rightarrow -5 = 5$

Nell'intervallo $]3, +\infty[$ l'equazione proposta non ammette soluzioni

$$|x - 2| + |x - 1| = x - 3$$

		1		2		x
x - 2	−		−	0	+	
x - 1	−	0	+		+	

$\boxed{x \leq 1} \Rightarrow -x + 2 - x + 1 = x - 3 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow$

$x = \frac{2}{3}$ (**R.N.A.**)

$\boxed{-1 < x \leq 2} \Rightarrow -x + 2 + x - 1 = x - 3 \Rightarrow \quad x = 4$ (**R.N.A.**)

$\boxed{x > 2} \Rightarrow x - 2 + x - 1 = x - 3 \Rightarrow \quad x = 0$ (**R.N.A.**)

L'equazione proposta non ammette soluzioni.

Principali proprietà dei moduli e disuguaglianze notevoli

- $|-x| = |x|$ • $x \leq |x| \quad \forall x \in R$ • $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in R$
- **Disuguaglianza triangolare**: $|a+b| \leq |a| + |b|$ il segno di uguaglianza vale quando a, b, sono **concordi**.

Dimostrazione: $-|a| \leq a \leq |a| \quad \wedge \quad -|b| \leq b \leq |b| \quad \forall a, b \in R$

Sommando membro a membro otteniamo: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \quad -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Ricordando che $|f(x)| \leq k \in R^+ \quad \Leftrightarrow \quad -k \leq f(x) \leq +k$ otteniamo $|a+b| \leq |a| + |b|$ essendo $|a| + |b|$ un numero positivo.

- Generalizzando la relazione precedente otteniamo:

$$|a + b + c + \cdots\cdots| \leq |a| + |b| + |c| + \cdots\cdots$$

dove il segno di uguaglianza vale quando a, b, c,... sono **concordi**.

- $|a-b| \leq |a|+|b|$ Per la dimostrazione partiamo dalla identità $|a+b| \leq |a|+|b| \quad \forall a,b \in R$

Poiché essa è sempre vera lo sarà anche quando sostituisco b con $-b$. Si ottiene:

$$|a-b| \leq |a|+|-b| \qquad |a-b| \leq |a|+|b|$$

- $|a\cdot b\cdot c\cdots| = |a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots$ $\quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ Le due relazioni si dimostrano esaminando i casi possibili per i segni di a, b, c,....
- $|a-b| \geq |a|-|b|$ il segno di uguaglianza vale quando a, b sono **concordi** ed il **modulo** di a è maggiore del modulo di b.
- $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y| \qquad \forall\, x,y \in R$
- $\big||x|-|y|\big| = |x+y| \leq |x|+|y| \qquad se\ xy > 0$
- $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| = |x|+|y| \qquad se\ xy < 0$
- **Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz**: $2|ab| \leq a^2+b^2 \qquad \forall a,b \in R$

Dimostrazione: $0 \leq (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \ \Rightarrow\ 2ab \geq -\left(a^2+b^2\right)$

$0 \leq (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \ \Rightarrow\ 2ab \leq \left(a^2+b^2\right)$

$-\left(a^2+b^2\right) \leq 2ab \ \wedge\ 2ab \leq \left(a^2+b^2\right) \ \Rightarrow\ 2|ab| \leq a^2+b^2 \quad c.v.d.$

Inequazioni con valori assoluti

Le inequazioni con valori assoluti si risolvono ricordando che:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x > 0 \end{cases} \qquad\qquad |f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) > 0 \\ 0 & se \quad f(x) = 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) > 0 \end{cases}$$

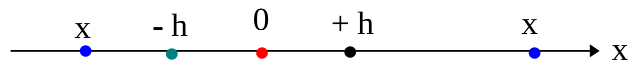
$$|x| = \pm x \text{ se } x > 0 \qquad , \qquad |f(x)| = \pm f(x) \quad \text{se} \quad f(x) > 0$$

Particolarmente importanti, soprattutto in analisi matematica, sono le seguenti inequazioni con valori assoluti:

- $\left.\begin{matrix} |x| < \sigma \\ \sigma > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -\sigma < x < \sigma$

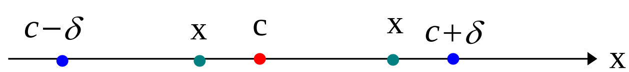
- $$\left.\begin{matrix} |f(x)| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) < +\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < +\varepsilon \\ f(x) > -\varepsilon \end{cases}$$

- $$\left.\begin{matrix} |x| > h \\ h > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x < -h \ \wedge \ x > h$$



- $$\left.\begin{matrix} |f(x)| > k \\ k > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f(x) < -k \ \wedge \ f(x) > k$$

- $$\left.\begin{matrix} |x - c| < \delta \\ \delta > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -\delta < x - c < \delta \Leftrightarrow c - \delta < x < c + \delta$$



- $$|f(x) - c| < \delta \in R^+ \Leftrightarrow -\delta < f(x) - c < \delta \Leftrightarrow c - \delta < f(x) < c + \delta$$

- Particolarmente importanti ed utili sono le tre seguenti inequazioni:

$$|f(x)| < g(x) \qquad |f(x)| > g(x) \qquad |f(x)| > |g(x)|$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni reali di variabile reale.

- $$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -g(x) < f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

CASO PARTICOLARE

Se $g(x)$ è una costante , che per semplicità indicheremo con **b** , si ha: $|f(x)| < b$

Se $\boxed{b \leq 0}$ l'inequazione non ammette soluzioni in quanto un numero positivo non può essere più piccolo di un numero negativo

Se $\boxed{b > 0}$ allora le soluzioni dell'inequazione proposta coincidono con le soluzioni del sistema :

$$-b < f(x) < b \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} f(x) > -b \\ f(x) < b \end{cases}$$

- La soluzione dell'inequazione $|f(x)| > g(x)$ coincide con l'**unione** degli intervalli che risolvono la seguente inequazione: $g(x) < 0$ ed i due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

CASO PARTICOLARE

Se $g(x)$ è una costante che , per semplicità indicheremo col simbolo **b** , l'inequazione diventa :

$$|f(x)| > b$$

Se $b < 0$ l'inequazione diventa una **inidentità** (**disuguaglianza**) in quanto il primo membro, mai negativo, è sicuramente maggiore di un numero negativo

Se $b \geq 0$ allora l'inequazione data è equivalente alle due seguenti inequazioni:

$$f(x) < -b \quad \wedge \quad f(x) > b$$

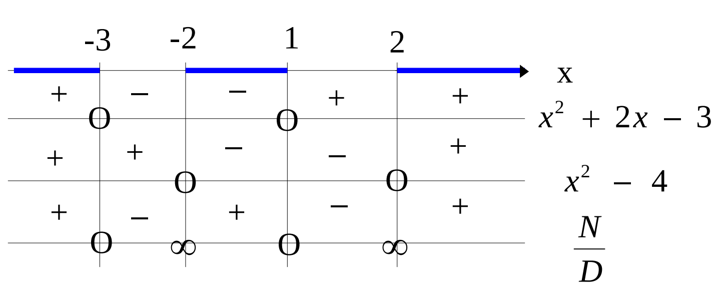
- L'inequazione $|f(x)| > |g(x)|$ è equivalente ai due seguenti sistemi di inequazioni:

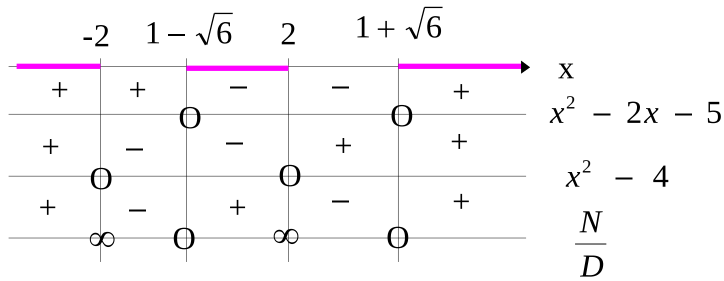
$$\begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

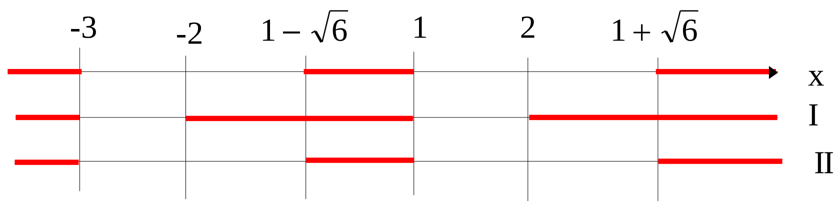
$\left|\dfrac{2x+1}{x^2-4}\right| < 1$ per $x < -3$, $1-\sqrt{6} < x < 1$, $x > 1+\sqrt{6}$

$$-1 < \frac{2x+1}{x^2-4} < 1 \qquad , \qquad \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2-4} > -1 \\ \dfrac{2x+1}{x^2-4} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} I & \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4} > 0 \quad per \quad x < -3\,, -2 < x < 1\,, x > 2 \\ \dfrac{x^2-2x-5}{x^2-4} > 0 \quad per \quad x < -2\,, 1-\sqrt{6} < x < 2\,, x > 1+\sqrt{6} \end{cases} \\ II & \end{array}$$







$\dfrac{|x| - 3}{x + 1} < x - 1$ per $x > -1$

Per $x \geq 0$ l'inequazione diventa: $\dfrac{x - 3}{x + 1} < x - 1$, $\dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1} > 0$ per $\boxed{x \geq 0}$

in quanto : $x^2 - x + 2 > 0 \quad \forall\, x \in R$

Per $x < 0$ l'inequazione diventa: $\dfrac{-x - 3}{x + 1} < x - 1$, $\dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1} > 0$ per $-1 < x < 0$

in quanto: $x^2 + x + 2 > 0 \quad \forall\, x \in R$

L'intervallo $]-1,+\infty[$ è la soluzione dell'inequazione proposta.

Unità Didattica N° 15

I sistemi di equazioni a due incognite

Sistemi di secondo grado a due incognite

Definizione: Dicesi **grado** di un sistema di equazioni il **prodotto** dei gradi delle equazioni che compongono il sistema.

Definizione: Dicesi **sistema di secondo grado a due incognite** un sistema, che ridotto a forma canonica, assume la forma:

$$\begin{cases} px + qy + r = 0 & \to \text{equazione di primo grado} \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 & \to \text{equazione di secondo grado} \end{cases}$$

Un sistema di secondo grado a due incognite si risolve col **metodo di sostituzione**.

Dall'equazione di primo grado si ricava la $x = -\dfrac{qy + r}{p}$ (la $y = -\dfrac{px + r}{q}$) e la si sostituisce nell'equazione di secondo grado ad una incognita detta **equazione risolvente il sistema**.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x^2 - xy + 3y^2 - 7x = 11 \end{cases} \quad y = \frac{4 - 3x}{2} \quad , \quad 5x^2 - \frac{x(4 - 3x)}{2} + \frac{3(4 - 3x)^2}{4} - 7x = 11$$

$$53x^2 - 108x + 4 = 0 \ , \ x_1 = 2 \ , \ x_2 = \frac{2}{53} \ , \ y_1 = -1 \ , \ y_2 = \frac{103}{53} \ , \ \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases} , \ \begin{cases} x_2 = \dfrac{2}{53} \\ y_2 = \dfrac{103}{53} \end{cases}$$

Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite si dice **simmetrico** se le due equazioni non mutano se scambiamo tra loro le due incognite. Da ciò discende che se il sistema simmetrico ammette la radice $x = \alpha , y = \beta$ ammetterà anche la soluzione $x = \beta , y = \alpha$. Il sistema simmetrico $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ è detto **sistema simmetrico fondamentale**.

Esso si risolve mediante l'**equazione ausiliaria**: $t^2 - St + P = 0$ che ammette le soluzioni:

$t = t_1 , t = t_2$. Le soluzioni del sistema fondamentale sono: $\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t_2 \\ y = t_1 \end{cases}$

In generale un sistema simmetrico si risolve utilizzando le **formule di Waring**:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P \qquad x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=S^3-3PS$$

$$x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=S^4-4PS^2+2P^2$$

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2(x+y)=S^5-5PS^3+5SP^2$$

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=13 \\ 16(x^2+y^2)-3xy-52(x+y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2-3xy=13 \\ 16(x+y)^2-35xy-52(x+y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^2-3P=13 \\ 16S^2-35P-52S=0 \end{cases} \quad \begin{cases} P=\dfrac{S^2-13}{3} \\ 16S^2-35\dfrac{S^2-13}{3}-52S=0 \end{cases} \quad 48S^2-35S^2+455-156S=0$$

$$13S^2-156S+455=0 \qquad S=\frac{78\pm\sqrt{6048-5915}}{13}=\frac{78\pm\sqrt{169}}{13}=\frac{78\pm13}{13}=\begin{cases} S_1=5 \\ S_2=7 \end{cases}$$

$$P_1=\frac{25-13}{3}=4 \quad , \quad P_2=\frac{49-13}{3}=12 \qquad \begin{cases} x+y=S_1 \\ xy=P_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$$

$$t^2-5t+4=0 \quad , \quad t_1=1\,,\,t_2=4 \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=S_2 \\ xy=P_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \quad t^2-7t+12=0 \ , \quad t_1=3\,,\,t_2=4 \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4+y^4=97 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=97 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ 625-100xy+2(xy)^2=97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \quad \begin{cases} S=5 \\ 528-100P+2P^2=0 \end{cases} \quad 2P^2-100P+528=0 \ , \ P^2-50P+264=0$$

$$P=25\pm\sqrt{625-264}=\begin{cases} P_1=6 \\ P_2=44 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=S \\ xy=P_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \quad t^2-5t+6=0$$

$$t=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 44 \end{cases} \qquad t^2 - 5t + 44 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-176}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-151}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{151}}{2} \quad , \quad \begin{cases} x = \dfrac{5 - i\sqrt{151}}{2} \\ y = \dfrac{5 + i\sqrt{151}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{5 + i\sqrt{151}}{2} \\ y = \dfrac{5 - i\sqrt{151}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ xy = 225 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\right) = 225 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15 \end{cases} \qquad \text{Pongo: } \begin{cases} \sqrt{x} = u \\ \sqrt{y} = z \end{cases} \qquad \begin{cases} u + z = 8 \\ u \cdot z = 15 \end{cases}$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \qquad t = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 = \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 3 \\ u = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 5 \\ u = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 9 \\ y = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 25 \\ y = 9 \end{cases}$$

Sistemi omogenei

Un sistema costituito da due equazioni di secondo grado in due incognite si dice **omogeneo** se nelle sue equazioni mancano i termini di primo grado. Quindi un **sistema omogeneo**, ridotto a forma canonica assume la seguente forma: $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$

Si possono presentare due casi:

1) Primo caso: $d \neq 0 \, , d_1 \neq 0$ Il sistema si risolve ponendo: $\boxed{y = tx}$

$$\begin{cases} ax^2 + btx^2 + ct^2x^2 = d \\ a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = d_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2\left(a + bt + ct^2\right) = d \\ x^2\left(a_1 + b_1t + c_1t^2\right) = d_1 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro otteniamo :

$$\frac{x^2\left(a + bt + ct^2\right)}{x^2\left(a_1 + b_1t + c_1t^2\right)} = \frac{d}{d_1} \qquad d_1\left(a + bt + ct^2\right) = d\left(a_1 + b_1t + c_1t^2\right)$$

Si tratta di una equazione di secondo grado in **t** le cui radici sono t_1 e t_2. Il sistema omogeneo dato è **equivalente** ai due seguenti sistemi di secondo grado:

$$\begin{cases} y = t_1x \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t_2x \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases}$$

oppure ai due seguenti sistemi di secondo grado:

$$\begin{cases} y = t_1 x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t_2 x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 10 \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad \boxed{y = tx} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2tx^2 + t^2x^2 = 10 \\ x^2 + tx^2 = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(2 - 2t + t^2) = 10 \\ x^2(1 + t) = 15 \end{cases}$$

$$\frac{x^2(2 - 2t + t^2)}{x^2(1 + t)} = \frac{10}{5} = \frac{2}{3} \quad , \quad 6 - 6t + 3t^2 = 2 + 2t \quad , \quad 3t^2 - 8t + 4 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} = \begin{cases} t_1 = \frac{2}{3} \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 15 \ , \ 3x^2 + 2x^2 = 45 \ , \ 5x^2 = 45 \ , \ x^2 = 9 \ , \ x = \pm 3$$

$$x = -3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(-3) = -2 \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \qquad x = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(3) = 2 \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + xy = 15 \end{cases} \quad x^2 + 2x^2 = 15 \ , \ 3x^2 = 15 \ , \ x^2 = 5 \ , \ x = \pm\sqrt{5} \quad \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

2) SECONDO CASO: $d = 0 \, , d_1 \neq 0$

Tenendo presente la seconda equazione del sistema omogeneo deduciamo subito che deve essere : $x \neq 0 \, , y \neq 0$ in quanto sappiamo che $d_1 \neq 0$.

Ponendo $y = tx$ la prima equazione del sistema omogeneo diventa : $ax^2 + btx^2 + ct^2x^2 = 0$

$x^2(a + bt + ct^2) = 0$ e quindi, dovendo essere $x \neq 0$,otteniamo l'equazione di secondo grado in t: $a + bt + ct^2 = 0$ le cui radici sono t_1 e t_2

Qualora l'equazione $ct^2 + bt + a = 0$ diventa di primo grado ($c = 0 \Rightarrow cy^2 = 0 \Rightarrow$ $ax^2 + bxy = 0$) allora alle soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = tx = -\frac{a}{b}x \\ a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = d_1 \end{cases}$$

bisogna aggiungere le soluzioni del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = d_1 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{d_1}{d}} \end{cases}$

Il sistema omogeneo dato è equivalente ai due sistemi di secondo grado :

$$\begin{cases} y = t_1x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = t_2x \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 11 \end{cases} \quad y = tx \ , \ 2tx^2 + 3t^2x^2 = 0 \ , \ x^2\left(2t + 3t^2\right) = 0 \ , \ 2t + 3t^2 = 0$$

$$t(2 + 3t) = 0 \quad , \quad 2 + 3t = 0 \quad , \quad t_1 = -\frac{2}{3} \ , \ t_2 = 0$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 11 \end{cases} \qquad x^2 + 3x\left(-\frac{2}{3}x\right) + 5\cdot\frac{4}{9}x^2 = 11 \quad , \quad x^2 - \frac{6x^2}{3} + \frac{20x^2}{9} = 11$$

$$9x^2 - 18x^2 + 20x^2 = 99 \ \ , 11x^2 = 99 \ \ , x^2 = 9 \ \ , x = \pm 3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -\dfrac{2}{3}(-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3}(3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

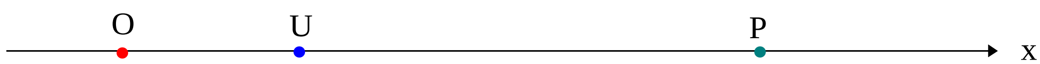
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 11 \end{cases} \qquad x^2 = 11 \quad , \quad x = \pm\sqrt{11} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt{11} \\ y = 0 \end{cases} \ , \ \begin{cases} x = \sqrt{11} \\ y = 0 \end{cases}$$

U.D. N° 15

Funzioni e loro rappresentazione grafica

Le coordinate cartesiane

Su di una retta **r** consideriamo un punto **O**, detto **origine**, un **verso positivo** indicato con una freccia ed un **segmento unitario** OU. In questo caso la retta r dicesi **asse delle ascisse** e viene indicata col simbolo x e di solito è disegnata in posizione orizzontale.

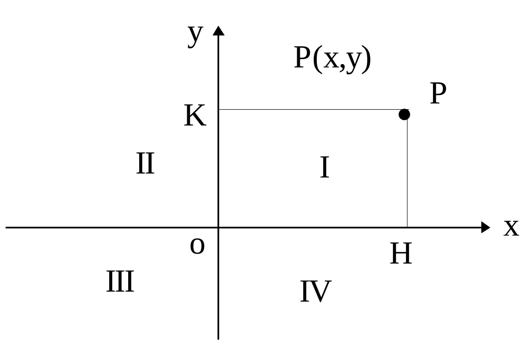


Ogni punto $P \in r$ individua il segmento OP. Noi sappiamo che $\frac{OP}{OU}$ è un numero reale che esprime la misura del segmento OP rispetto al segmento OU assunto come segmento unitario.

Adesso poniamo: $\boxed{\frac{OP}{OU} = x}$ e conveniamo di considerare x **positivo** (**negativo**) se P si trova alla **destra** (**sinistra**) di **O**. Il numero x dicesi **ascissa del punto P**.

Da quanto abbiamo detto è evidente che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra i numeri reali relativi **R** ed i punti **P** di una retta **r** sulla quale abbiamo fissato un **punto origine O**, un **verso positivo**, una **unità di misura** per i segmenti.

Adesso consideriamo due rette orientate **x** ed **y** fra loro perpendicolari. La retta **x** è orientata da sinistra verso destra, la retta **y** è orientata dal basso verso l'alto. Sia **O** il punto comune alle rette x ed y. Sia **P** un punto qualsiasi del piano. Sia **H** la proiezione ortogonale di P sulla retta x e K la proiezione ortogonale di P sulla retta y.



Sia $x = \frac{OH}{OU}$ l'ascissa del punto H rispetto alla retta orientata x , sia $y = \frac{OK}{OU}$ l'ascissa del punto K rispetto alla retta orientata y . I numeri reali relativi **x** ed **y** si dicono le **coordinate cartesiane** del punto **P** .

Si scrive $P(x,y)$ e si legge <<**P di coordinate x ed y**>>. x è detta **ascissa** del punto P, y è detta **ordinata** del punto P. La retta orientata x è detta **asse delle ascisse** o **asse delle x**, la retta orientata y è detta **asse delle ordinate** o **asse delle y**. Le due rette x ed y costituiscono un **sistema di assi cartesiani ortogonali**. Il punto **O** è detto **origine degli assi**.

Da quanto si è detto si deduce che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra le coppie ordinate di numeri reali ed i punti di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani.

Le rette **x** ed **y** dividono il piano in 4 parti ciascuna delle quali prende il nome di **quadrante**.

Le rette **x** ed **y** e le loro due bisettrici dividono il piano in **8** parti, ciascuna delle quali prende il nome di **ottante**.

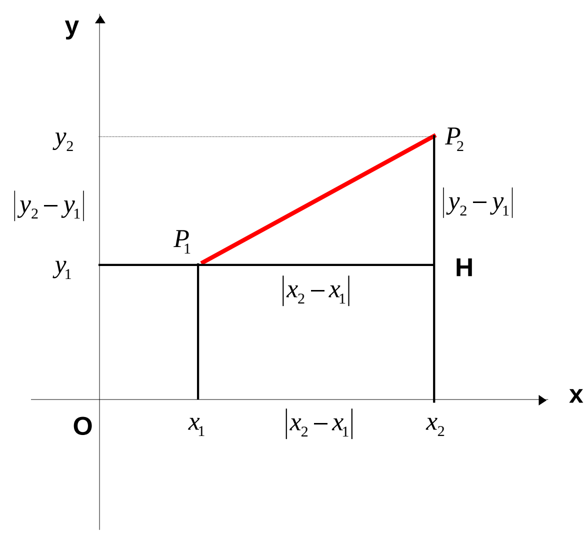
La distanza tra due punti

La distanza tra i punti $P_1(x_1;y_1)$ e $P_2(x_2;y_2)$ si calcola applicando la seguente formula :

$$d(P_1,P_2) = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dimostrazione

Basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHB .



$$\overline{P_1P_2} = d(P_1,P_2) = \sqrt{\overline{P_1H}^2 + \overline{P_2H}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A(-1,2))$, $B(-5;3)$ $\qquad d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\ \sqrt{(-5+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

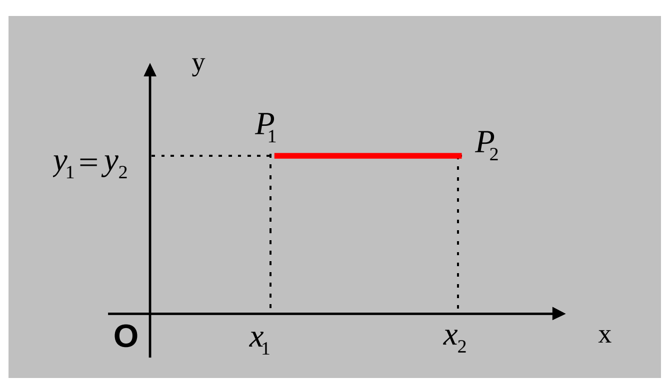
Osservazione: Se i punti $P_1(x_1;y_1)$ e $P_2(x_2;y_2)$ hanno la stessa ordinata $(y_1 = y_2)$ allora il segmento P_1P_2 è parallelo all'asse delle ascisse.

In questo caso abbiamo :

$$d(P_1,P_2) = |x_2 - x_1|$$

Possiamo anche dire che :

$d(P_1,P_2)=$ **ascissa maggiore - ascissa minore**

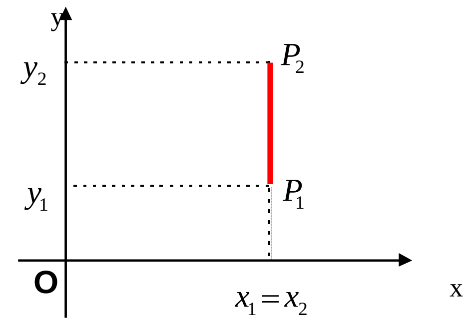


Se i punti $P_1(x_1;y_1)$ e $P_2(x_2;y_2)$ hanno la **stessa ascissa** $(x_1 = x_2)$ allora il segmento P_1P_2 è parallelo all'asse delle ordinate.

In questo caso abbiamo: $d(P_1,P_2) = |y_2 - y_1|$

Possiamo anche dire che :

$d(P_1,P_2) =$ **ordinata maggiore - ordinata minore**

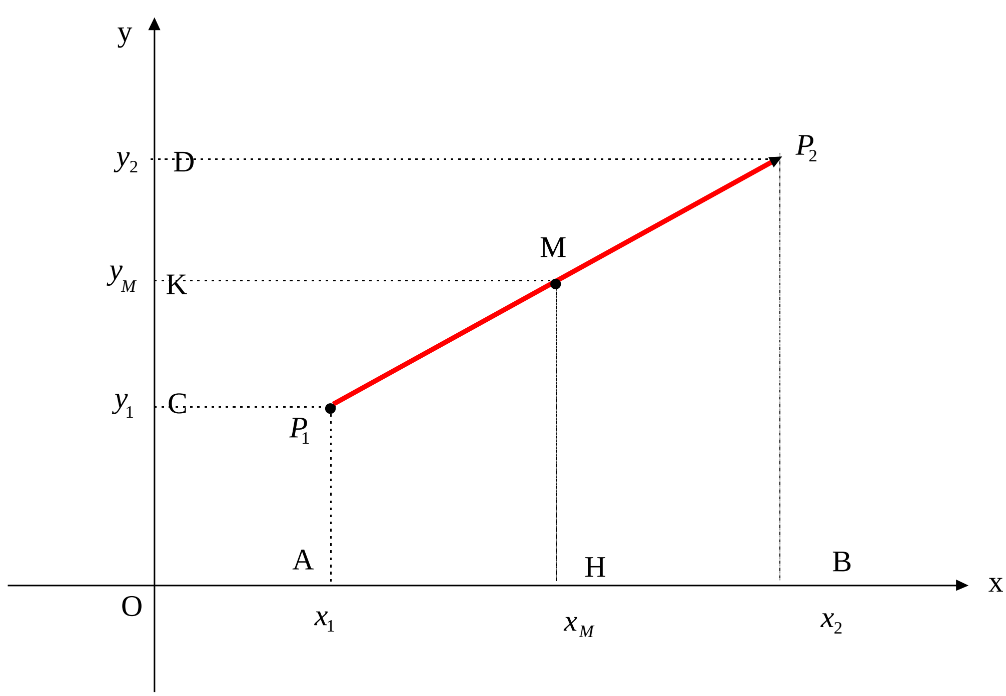


Le coordinate del punto medio di un segmento

Sia $M(x_M, y_M)$ il punto medio del segmento di estremi $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$. Ricordando che in un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali a segmenti uguali sull'una corrispondono segmenti uguali sull'altra abbiamo:

$$MP_1 = MP_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} AH = HB \\ CK = KD \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

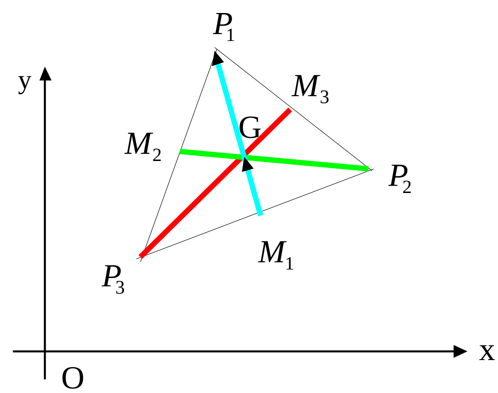


Le coordinate del baricentro di un triangolo

Per calcolare le coordinate del b**aricentro** $G(x_G, y_G)$ del triangolo di vertici $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ basta applicare le seguenti formule: $x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

Che si dimostrano applicando opportunamente il secondo teorema di Talete.

Coordinate del baricentro di un triangolo del quale conosciamo le coordinate dei suoi vertici $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$



Equazione cartesiana di una curva piana

Definizione: **Dicesi curva piana il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x;y)$ verificano una equazione a due incognite $A(x;y)=0$.**

Se tale equazione è di primo grado , la curva è una retta , se è di secondo grado la curva è una conica , cioè una circonferenza o una parabola o una ellisse o una iperbole .

L'equazione $2x-3y+12=0$ rappresenta una retta , l'equazione $y=2x^2-3x+5$ rappresenta una parabola ad asse verticale, $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ rappresenta una circonferenza di centro $C(2;-3)$, l'equazione $16x^2+9y^2-144=0$ rappresenta un'ellisse, l'equazione $x^2-9y^2-36=0$ rappresenta una iperbole.

Il grafico di una equazione di primo grado a due incognite

Definizione: **Dicesi retta il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x;y)$ verificano una equazione di primo grado a due incognite**

$$ax + by + c = 0 \qquad \textbf{[B]}$$

è l'**equazione generale** della retta o **equazione della retta sotto forma implicita**.

$by = -ax - c \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ Ponendo $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$ l'equazione **[B]** diventa:

$$y = mx + n \qquad \textbf{[C]}$$

che rappresenta l'**equazione canonica** della retta o **equazione della retta sotto forma esplicita**. Il numero reale relativo **n** dicesi **ordinata all'origine** perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y , mentre **m** dicesi **coefficiente angolare** della retta. L'equazione **[C]** non si presta a rappresentare rette parallele all'asse delle y in quanto **m** perde di significato.

$4x + 3y - 12 = 0$ **equazione generale della retta**, $y = -\frac{4}{3}x + 4$ **equazione canonica della retta** , $m = -\frac{4}{3}$ = **coefficiente angolare** della retta , $n = 4$ = **ordinata all'origine**

Equazione segmentaria della retta

Dall'equazione generale della retta ricaviamo: $ax + by = -c$, $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$

$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ Se poniamo: $p = -\frac{c}{a}$, $q = -\frac{c}{b}$ otteniamo: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ **[D]**

che rappresenta l'**equazione segmentaria** della retta.

I numeri reali relativi **p** e **q** sogliono chiamarsi le **intercette** (della retta sugli assi cartesiani) in quanto il primo rappresenta l'ascissa del punto in cui la retta incontra l'asse x , il secondo l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y.

L'**equazione segmentaria** della retta $7x + 3y - 21 = 0$ è: $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$

Equazioni di rette aventi una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani

$x = k$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle y.

Essa si ricava ponendo: $b = 0$, $k = -\frac{c}{a}$. Risulta: $m = -\frac{a}{b} = \infty$

$y = h$ rappresenta l'equazione di una generica retta parallela all'asse delle x.

Essa si ricava ponendo: $a = 0$, $k = -\frac{c}{b}$. Risulta: $m = -\frac{a}{b} = 0$

k(h) rappresenta l'ascissa (l'ordinata) di un generico punto della retta.

$x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate . Si ottiene per: $b = c = 0$, $a = 1$, $m = \infty$

$y = 0$ l'equazione dell'asse delle ascisse . Si ottiene per: $a = c = 0$, $b = 1$, $m = 0$

$y = x$ è l'equazione della bisettrice del I e III quadrante , detta anche **bisettrice fondamentale** degli assi cartesiani . Risulta: $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $m = 1$

$y = -x$ è l'equazione della bisettrice del II e IV quadrante , detta anche **bisettrice secondaria** degli assi cartesiani . Risulta: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $m = -1$

$ax + by = 0$ oppure $y = mx$ è l'equazione di una generica retta passante per l'origine degli assi cartesiani.

Equazione della retta passante per due punti

Per scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ basta applicare la seguente formula : $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ **[E]**

Essa non si presta a rappresentare né rette parallele all'asse delle ascisse ($y = y_1$) né rette parallele all'asse delle ordinate ($x_2 = x_1$) in quanto , annullandosi uno dei due denominatori , verrebbe a perdere di significato.

Equazione della retta passante per un punto ed avente coefficiente angolare assegnato

Ponendo: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\dfrac{a}{b}$ **[F]** la [E] diventa: $y - y_1 = m(x - x_1)$ **[G]**

che rappresenta l'equazione della retta passante per un dato punto $P_1(x_1, y_1)$ ed avente coefficiente angolare **m** assegnato. Il numero **m** è detto , come sappiamo, **coefficiente angolare** della retta.

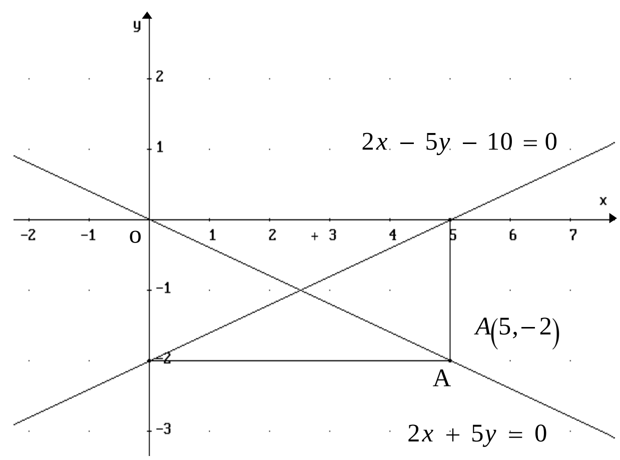
Rappresentazione grafica della retta

Vediamo come è possibile disegnare una retta quando conosciamo la sua equazione. Se la retta è obliqua basta trovare le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi cartesiani. Se passa per l'origine degli assi, basta trovare un sua qualsiasi altro punto distinto dall'origine; preferibilmente quello che ha come coordinate numeri interi. A volte è conveniente scrivere l'equazione sotto forma segmentaria e poi disegnarla utilizzando l'interpretazione geometrica dei simboli p e q. Se vogliamo disegnare la retta di equazione $2x - 5y - 10 = 0$ basta scriverla in forma segmentaria, cioè:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$$

essendo: $p = 5$, $q = -2$.

Se invece vogliamo disegnare la retta $2x + 5y = 0$ bisogna calcolare le coordinate di un suo punto, ad esempio $A(5,-2)$. Infatti ponendo nell'equazione della retta $x = 5$ si ricava $y = -2$. Adesso la retta può essere disegnata in quanto conosciamo le coordinate di due suoi punti .



Il punto comune a due rette

Per calcolare le coordinate del punto $P(x,y)$ comune alle rette r ed s aventi , rispettivamente , equazioni: r: $ax + by + c = 0$ s: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ basta risolvere il seguente sistema :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{[10]}$$

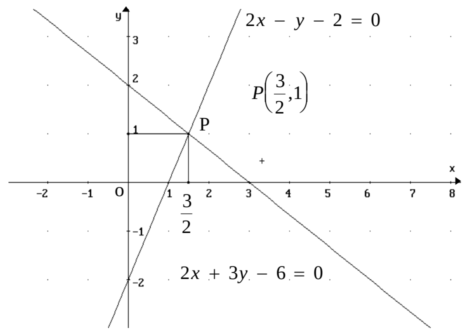
Applicando il teorema di Cramer otteniamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & -c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b} \qquad \textbf{[11]}$$

Quindi l'intersezione delle due rette è il punto $P\left(\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b}\right)$

Se vogliamo calcolare le coordinate del punto comune alle rette di equazioni $2x + 3y - 6 = 0$ e $2x - y - 2 = 0$, dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 2x = y + 2 \end{cases}$

$6 - 3y = y + 2$ $\qquad x = \frac{3}{2}$ $\quad y = 1$ $\quad P\left(\frac{3}{2},1\right)$



Discutiamo le soluzioni [11] del sistema [10] .

1° caso: $ab_1 - a_1 b \neq 0$ cioè: $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ cioè i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **non sono proporzionali**. Sotto queste ipotesi, le rette r ed s sono incidenti. Viceversa, se le rette r ed s sono incidenti, allora i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **non sono proporzionali**.

2° caso: cioè: $ab_1 - a_1 b = 0$ $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \neq \frac{c_1}{c}$ cioè i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **sono proporzionali**. Ponendo: $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, il sistema da risolvere diventa:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ kax + kby = -c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = -c \\ ax + by = -\frac{c_1}{k} \end{cases}$$

Essendo $\frac{c_1}{k} \neq c$ il sistema non ammette soluzioni , cioè non esiste alcuna coppia di numeri (x,y) che verifica simultaneamente le due equazioni del sistema [10]. In questo caso le due rette sono **parallele e distinte**. Viceversa se le rette r ed s sono parallele e distinte allora i coefficienti omonimi delle variabili x ed y **sono proporzionali**, cioè le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare.

$r // s \Rightarrow a_1 = ka$, $b_1 = kb$ con $k \in R$.

Ponendo $k = 1$ otteniamo : $a_1 = a$, $b_1 = b$ ed anche: $m_1 = m$

Risultano fra loro parallele le rette aventi equazioni generali:

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad ax + by + h = 0$$

ed anche le rette aventi equazioni in forma canonica $y = mx + n$, $y = mx + h$

Possiamo utilizzare queste conclusioni per scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$.

Una generica retta parallela ad r ha equazione : $ax + by + h = 0$ ($y = mx + h$)

$P_1 \in s \Rightarrow ax_1 + by_1 + h = 0$ ($y_1 = mx_1 + h$) , $h = -ax_1 - by_1$ ($h = -mx_1 - y_1$)

Quindi l'equazione della retta **s** passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$ assume una delle due seguenti forme: $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ $\qquad$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $\qquad$ **[12]**

3° caso: $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k$ $\quad a_1=ka\ ,\ b_1=kb\ ,\ c_1=kc$ con $k\in R$.

Il sistema [10] assume la forma: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ kax+kby+kc=0 \end{cases}$

Le equazioni di questo sistema sono equivalenti e quindi rappresentano la stessa retta .

Riassumendo possiamo affermare quanto segue:

Date le rette r ed s aventi rispettivamente equazioni:

r: $ax+by+c=0$ $\quad$ s: $a_1x+b_1y+c_1=0$ $\qquad$ si ha:

r ed s incidenti $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$
r ed s coincidenti $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k$ cioè : $a_1=ka\ ,\ b_1=kb\ ,\ c_1=kc$
r ed s parallele e distinte $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=k\neq\frac{c_1}{c}$ cioè $a_1=ka\ ,\ b_1=kb\ ,\ c_1\neq kc$

Rette parallele

Teorema

C.N.S. perché due rette siano **parallele** è che i **loro coefficienti angolari siano uguali**.

r: $ax+by+c=0\ ,\ y=mx+n$, **s**: $a_1x+b_1y+c_1=0\ ,\ y=m_1x+n_1$

$$r\ //\ s \Rightarrow m=m_1 \text{ oppure } a_1=ka\ ,\ b_1=kb \text{ con } k\in R-\{0\}$$

cioè **k** è una costante di proporzionalità non nulla . In particolare essa può assumere il valore $k=1$ ed il parallelismo tra le due rette si trasforma nella uguaglianza tra i coefficienti delle variabili omonime: $a_1=a\ ,\ b_1=b$.

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $ax+by+c=0$: $\qquad a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $y=mx+n$: $\qquad y-y_1=m(x-x_1)$

Rette perpendicolari

C.N.S. perché due rette siano perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano **antireciproci**, cioè che il prodotto dei loro coefficienti angolari sia **-1**.

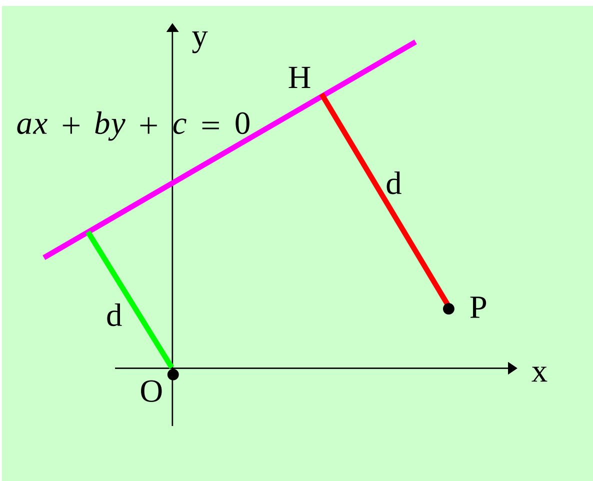
$r\perp s \Leftrightarrow [\,m\cdot m_1=-1$, oppure $aa_1+bb_1=0$ oppure $a_1=kb$ e $b_1=-ka$ con $k\in R-\{0\}$

oppure $a_1=b$ e $b_1=-a$ $\quad$ oppure $a_1=-b$ e $b_1=a$ $\,]$

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$: $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$

Equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1,y_1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = mx + n$: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

Distanza di un punto da una retta



Per calcolare la distanza del punto $P_1(x_1,y_1)$ dalla retta r di equazione $ax + by + c = 0$ basta applicare la seguente formula

$$d(P,r) = \overline{PH} = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se $P \equiv O$ la precedente formula diventa:

$$d(O,r) = \overline{OH} = d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Fascio di rette

Dicesi **fascio di rette a centro proprio** l'insieme di tutte le rette del piano passanti per uno stesso punto $P_o(x_o,y_o)$, detto **centro del fascio**. L'equazione del fascio di rette avente come centro il punto $P_o(x_o,y_o)$ è: $y - y_o = m(x - x_o)$ o meglio $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

Al variare del parametro **m** otteniamo tutte le rette del piano passanti per il punto $P_o(x_o,y_o)$, esclusa quella parallela all'asse y. Un fascio di rette a centro proprio è individuato quando conosciamo le coordinate del suo centro oppure quando conosciamo le equazioni di due sue qualsiasi rette.

Vediamo adesso come è possibile calcolare l'equazione del fascio proprio di rette individuato dalla retta **r** (di equazione $ax + by + c = 0$) e dalla retta **s** (di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$).

Se **h** (o **k**) è un numero reale qualsiasi , allora:

$ax + by + c + h\cdot(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ oppure $k\cdot(ax + by + c) + a_1x + b_1y + c_1 = 0$

è l'**equazione del fascio di rette** individuato dalle rette r ed s.

Scrivere l'equazione del fascio individuato dalle rette $3x + y - 3 = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$

$$3x + y - 3 + k\cdot(4x - 3y + 12) = 0 \quad , \quad 3x + y - 3 + 4kx - 3ky + 12k = 0$$

$(3+4k)x+(1-3k)y+12k-3=0$ equazione del fascio di rette

Se il parametro figura soltanto nel termine noto , allora abbiamo il fascio di rette a **centro improprio** o **fascio di rette parallele**.

PROBLEMA INVERSO

Data l'equazione del fascio di rette $(2+m)x-(3+m)y+13+5m=0$ calcolare le coordinate del suo centro.

Primo procedimento

1) Ci calcoliamo le equazioni delle rette che individuano il fascio

$$2x + mx - 3y - my + 13 + 5m = 0 \quad , \quad 2x - 3y + 13 + m(x - y + 5) = 0$$

$2x-3y+13=0$, $x-y+5=0$ sono le rette che individuano il fascio .

2) Le coordinate del centro P del fascio si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni che individuano il fascio .

$$\begin{cases} 2x - 3y + 13 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \qquad P(-2,3)$$

Secondo procedimento

Basta attribuire al parametro **m** due particolari e convenienti valori, Si ottengono due rette del fascio che con la loro intersezione ci consentono di calcolare le coordinate del centro del fascio.

$$m = -2 \Rightarrow -y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3;\ m = -3 \Rightarrow -x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \qquad P(-2,3)$$

Equazioni delle bisettrici degli angoli formati da due rette

Consideriamo le rette concorrenti **r** ed **s** aventi rispettivamente equazioni $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Dalla geometria euclidea sappiamo che la bisettrice di un angolo è il **luogo geometrico** dei punti del piano equidistanti dai due latti . Detto $P(x,y)$ un generico punto di una della due bisettrici possiamo scrivere: $\overline{PH} = \overline{PK}$ e quindi :

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

cioè :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

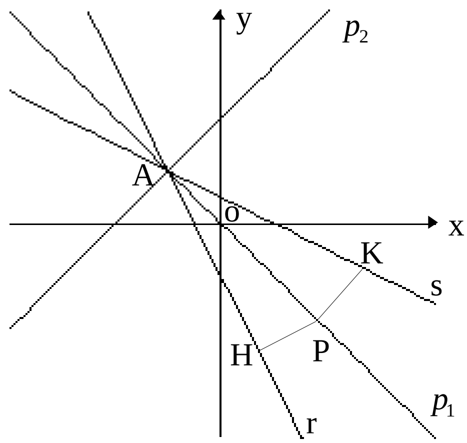
$$|x| = \begin{cases} x \ \ se \ x > 0 \\ -x \ \ se \ x < 0 \end{cases} \qquad |x + 2| = 5 \Rightarrow x + 2 = \pm 5 \Rightarrow x = -7 \ , \ x = 3$$

Le bisettrici richieste sono due e sono sempre fra loro **perpendicolari**.

Calcolare le bisettrici degli angoli formati dalle rette $x + 2y - 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$.

$$\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2x + y + 1}{\pm\sqrt{4 + 1}} \quad , \quad x + 2y - 1 = 2x + y + 1 \quad , \quad x - y + 2 = 0$$

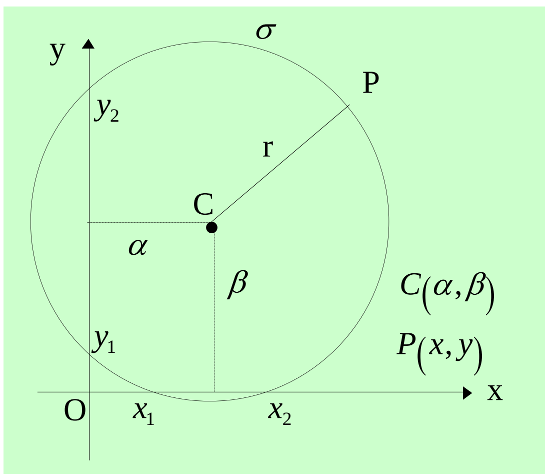
$$x + 2y - 1 = -2x - y - 1 \qquad x + y = 0$$



Equazione della circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **C** detto **centro** . Riferito il piano ad un sistema ortonormale di assi cartesiani , detto $C(\alpha,\beta)$ il centro della circonferenza σ , $P(x,y)$ un generico punto di σ abbiamo : $CP = r \quad \Rightarrow \quad CP^2 = r^2 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2} \qquad [1]$$



La [1] è l'equazione di una circonferenza di dato centro e dato raggio . Se $C \equiv O$ la [1] diventa:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad [2]$$

La [2] rappresenta l'equazione di una circonferenza avente il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani.

Equazione generale della circonferenza

L'equazione [1] assume la seguente forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ [3]

se poniamo: [4] $a = -2\alpha\ ,\ b = -2\beta\ ,\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

$$\alpha = -\frac{a}{2}\ ,\ \beta = -\frac{b}{2}\ ,\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \qquad [5]$$

Intersezione di due circonferenze

$$\sigma :\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad , \quad \sigma_1 :\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Per calcolare le coordinate dei punti comuni alle circonferenze σ e σ_1 basta risolvere il seguente

sistema : $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$ [7]

Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \hline \#\quad \#\quad (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione $(a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0$ [6]

rappresenta una retta detta **asse radicale** delle due circonferenze. Tale asse radicale contiene i due punti **A** e **B** (reali e distinti, reali e coincidenti, immaginari) comuni alle due circonferenze. Pertanto le coordinate di questi due punti si ottengono risolvendo uno dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza uscenti da un dato punto

Scrivere le equazioni delle rette uscenti dal punto $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

PRIMO METODO

1) Mi calcolo le coordinate del centro **C** di σ e la misura del suo raggio: $C(3;2)$, $r = \sqrt{10}$

2) Mi scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P_o\left(3, -\frac{4}{3}\right)$ **:**

$$y + \frac{4}{3} = m(x - 3) \quad , \quad 3y + 4 = 3mx - 9m \qquad 3mx - 3y - 4 - 9m = 0$$

3) Impongo che la distanza del centro **C** della circonferenza σ da una generica retta del fascio sia uguale al raggio **r** della circonferenza , cioè: $\overline{CH} = r$, $\dfrac{|9m - 6 - 4 - 9m|}{\sqrt{9m^2 + 9}} = \sqrt{10}$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo : $\dfrac{100}{9m^2 + 9} = 10$, $10 = 9m^2 + 9$, $9m^2 = 1$

$$m^2 = \frac{1}{9} \ , \ m = \pm\frac{1}{3} \ , \ m_1 = -\frac{1}{3} \ , \ m_2 = \frac{1}{3} \ \text{(si sostituisce nella [*])}$$

$$t_1 : \ x - 3y - 7 = 0 \qquad t_2 : \ x + 3y + 1 = 0$$

OSSERVAZIONE

Per calcolare le **coordinate dei punti di tangenza** basta risolvere il sistema fra l'equazione della circonferenza e l'equazione di ciascuna tangente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \qquad T_1(4,-1)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \qquad T_2(2,-1)$$

SECONDO METODO

1) Mi scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P_o\left(3,-\frac{4}{3}\right)$ e risolvo il seguente sistema :

$$\begin{cases} y + \dfrac{4}{3} = m(x - 3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

2) Mi trovo l'equazione risolvente tale sistema eliminando la y :

$$9(m^2 + 1)x^2 - 2(27m^2 + 30m + 27)x + 81m^2 + 180m + 91 = 0$$

3) Impongo che il Δ (o il $\frac{\Delta}{4}$) dell'equazione risolvente il sistema sia uguale a zero .

$$\frac{\Delta}{4} = (27m^2 + 30m + 27)^2 - 9(m^2 + 1)(81m^2 + 180m + 91) = 0 \ , \ 9m^2 - 1 = 0 \ , \ m = \pm\frac{1}{3}$$

OSSERVAZIONE

Con questo secondo procedimento, in generale, i calcoli sono piuttosto laboriosi.

Equazione della retta tangente ad una circonferenza in un suo punto P_o

Scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 60 = 0$ **nel punto** $P_o(-4,2)$

PRIMO PROCEDIMENTO

1) Mi calcolo le coordinate del centro **C** di σ: $C(-7,6)$

2) Mi calcolo il coefficiente angolare della retta P_oC: $m_{P_oC} = \dfrac{y_C - y_{P_o}}{x_C - x_{P_o}} = \dfrac{6-2}{-7+4} = -\dfrac{4}{3}$

3) $CP_o \perp t \Rightarrow m_t = -\dfrac{1}{m_s} = \dfrac{3}{4}$

4) $y - y_o = m_t(x+4)$, $y - 2 = \dfrac{3}{4}(x+4)$, $4y - 8 = 3x + 12$, $3x-4y+20=0$

SECONDO PROCEDIMENTO

Basta applicare la **regola degli sdoppiamenti**: $x^2 \to x_o x$, $y^2 \to y_o y$, $x \to \dfrac{x+x_o}{2}$, $y \to \dfrac{y+y_o}{2}$

σ: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, t: $x_o x + y_o y + a\cdot\dfrac{x+x_o}{2} + b\cdot\dfrac{y+y_o}{2} + c = 0$

oppure: $x_o x + y_o y + \alpha(x+x_o) + \beta(y+y_o) + c = 0$

Nel caso dell'esempio numerico abbiamo: $-4x + 2y + 7(x-4) - 6(y+2) + 60 = 0$

$$3x - 4y + 20 = 0$$

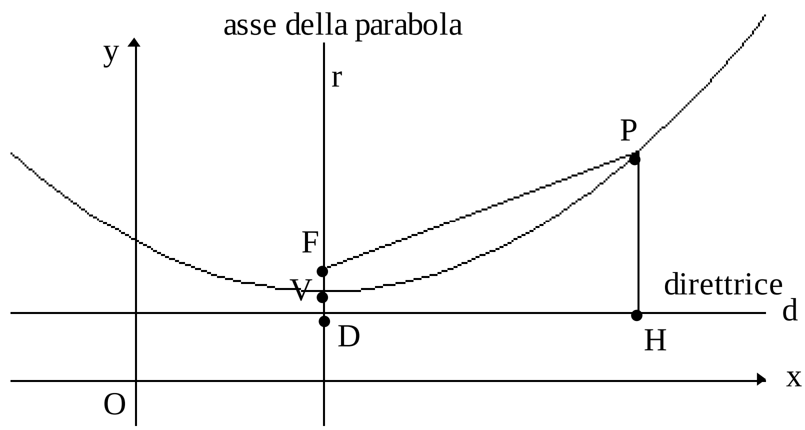
TERZO METODO

Si può utilizzare uno dei procedimenti usati per il calcolo della retta tangente ad una circonferenza uscenti da un punto .

La parabola

Definizione: Dicesi **parabola** il luogo geometrico dei punti **P** del piano equidistanti da un punto fisso **F** detto **fuoco** e da una retta fissa **d** (non contenente il fuoco) detta **direttrice**.

La retta **r** passante per **F** e perpendicolare alla direttrice **d** è l'**asse** della parabola. La retta **r** incontra la retta **d** nel punto **D** . Il punto medio **V** del segmento FD è il **vertice** della parabola.



La parabola ad asse verticale

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle ascisse sia parallelo alla direttrice **d** , l'equazione della parabola assume la forma $y = ax^2 + bx + c$

$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ **Vertice** della parabola $F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ **Fuoco** della parabola

$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ equazione della **direttrice** della parabola

$x = \frac{-b}{2a}$ equazione dell'**asse** della parabola

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la **concavità verso l'alto** (il basso)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma: $\boxed{y = ax^2 = \frac{1}{4p}x^2} \Leftrightarrow \boxed{x^2 = 4py}$

$F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ $F(0, p)$ $y = -p = -\frac{1}{4a}$ = **equazione della direttrice** $\Delta = b^2 - 4ac$

Intersezioni con gli assi cartesiani

La parabola ad asse verticale incontra sempre l'asse delle **y** nel punto $A(0,c)$. Per calcolare le coordinate delle eventuali intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ cioè la seguente equazione di secondo grado :

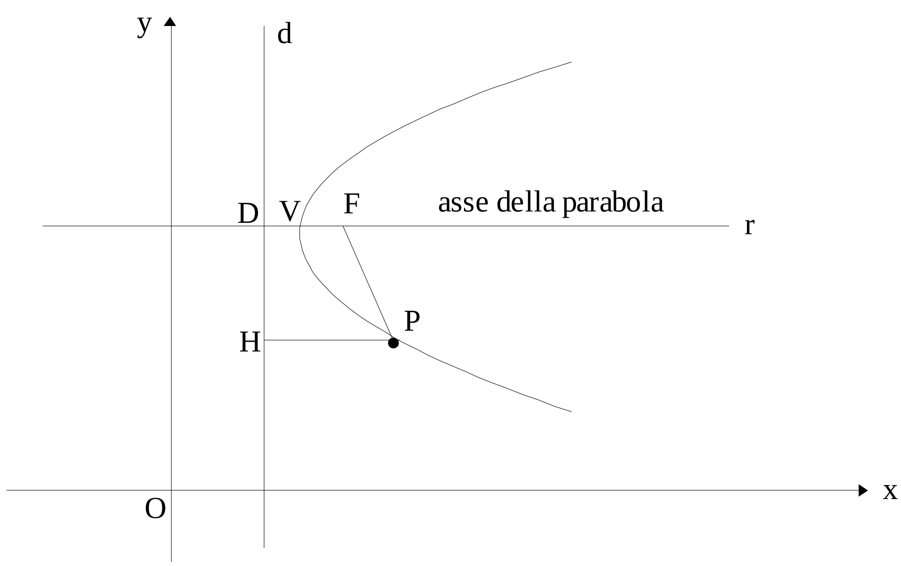
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Delta > 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti distinti

$\Delta = 0$: la parabola incontra l'asse delle ascisse in due punti coincidenti. Questo significa che la parabola ha il vertice **V** sull'asse delle x, cioè l'asse x è **tangente** alla parabola nel vertice

$\Delta < 0$: la parabola non incontra l'asse delle ascisse

La parabola ad asse orizzontale



Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle **y** risulti parallelo alla direttrice **d** , allora l'equazione della parabola assume la forma: $\boxed{x = ay^2 + by + c}$

$V\left(\frac{-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ **Vertice** della parabola

$F\left(\frac{1 - \Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ **Fuoco** della parabola

$\boxed{x = -\frac{1 + \Delta}{4a}}$ equazione della **direttrice** della parabola

$y = \frac{-b}{2a}$ equazione dell'**asse** della parabola

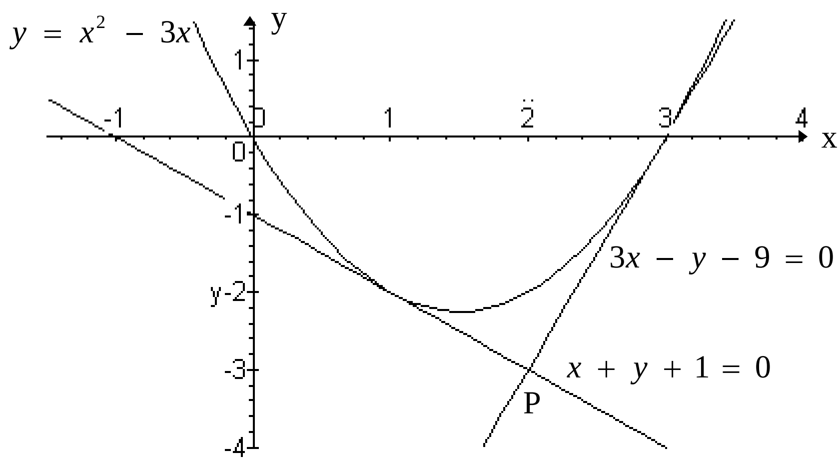
$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la **concavità verso destra** (**sinistra**)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma: $\boxed{x = ay^2 = \frac{1}{4p}y^2} \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 4px}$

$F\left(\frac{1}{4a}, 0\right)$ $\quad F(p, 0)$ $\quad x = -p = -\frac{1}{4a}$ = equazione della direttrice $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

Tangenti ad una parabola condotte da un punto

Calcolare le equazioni delle rette tangenti condotte alla parabola γ di equazione $y = x^2 - 3x$ condotte dal punto $P(2, -3)$



Si procede come segue:

1) Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro $P(2, -3)$

$$y - y_o = m(x - x_o) \qquad\qquad y + 3 = m(x - 2)$$

2) Si risolve il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione del fascio di rette :

$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases}$ $\qquad x^2 - (m + 3)x + 3 + 2m = 0$ equazione risolvente il sistema

3) Si impone che sia uguale a zero il Δ dell'equazione risolvente il sistema :

$$\Delta = (3 + m)^2 - 4(3 + 2m) = 0 \quad , \quad m^2 - 2m - 3 = 0 \quad , \quad m_1 = - \qquad m_2 = 3$$

4) Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione del fascio:

$$t_1 : x + y + 1 = 0 \qquad\qquad t_2 : 3x - y - 9 = 0$$

Retta tangente alla parabola in un suo punto

PRIMO PROCEDIMENTO

E' identico a quello illustrato nel paragrafo precedente

SECONDO PROCEDIMENTO: regola degli sdoppiamenti

Per ottenere l'equazione della retta **t** tangente a γ nel punto $P_o(x_o, y_o)$ basta sostituire nell'equazione della parabola $x_o x$ al posto di x^2 , $y_o y$ al posto di y^2, $\frac{x + x_o}{2}$ al posto di **x**, $\frac{y + y_o}{2}$ al posto di **y**.

$$\frac{y + y_o}{2} = a x_o x + \frac{b}{2}(x + x_o) + c \qquad y = ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{\frac{x + x_o}{2} = a x_o x + \frac{b}{2}(x + x_o) + c} \qquad x = ay^2 + by + c$$

Unità Didattica N° 16

Le progressioni

PROGRESSIONI ARITMETICHE

1) Proprietà generali

a) Dicesi **progressione aritmetica** (o per **differenza**) e si indica col simbolo $A(d)$ un insieme ordinato di numeri (almeno tre) $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$ tali che la **differenza** tra uno qualunque di essi (escluso il primo) ed il suo precedente sia costante , cioè tale che , qualunque sia l'indice n , si abbia: $a_{n+1} - a_n = d$ [1]

con **d** quantità costante detta **ragione** o **differenza**.

b) I numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$si chiamano **termini** o **elementi** della progressione aritmetica che può essere limitata o illimitata in uno o in tutti e due i sensi .

Per indicare una **progressione aritmetica** si usa il simbolo $\div$ e si scrive :

$$\div \quad \cdots a_{-n}, a_{-n+1}, \cdots, a_{n-1}, a_o, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$$

ESEMPI

$\div$ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 **progressione aritmetica. limitata nei due sensi di ragione 2**

$\div$ .... -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2........ **progressione aritmetica illimitata nei due sensi di ragione 1**

c) Se i termini di una p.a. sono numeri reali e se $d > 0$ la progressione si dice **crescente**, se $d < 0$ la progressione si dice **decrescente**.

Progressione aritmetica limitata nei due sensi: $\div \; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ [2]

Progressione aritmetica illimitata in un senso: $\div \; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n \cdots\cdots$ [3]

Progressione aritmetica illimitata in entrambi i sensi: $\div \cdots\cdots a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ [4]

2) Proprietà delle progressioni aritmetiche

a) In ogni **progressione aritmetica** limitata il termine **n-esimo** è uguale al primo termine più (n-1) volte la ragione . In simboli abbiamo : $a_n = a_1 + (n-1)d$ [5]

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ a_4 - a_3 &= d \\ &\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= d \\ \hline a_n - a_1 &= (n-1)d \end{aligned}$$

Sommando membro a membro otteniamo

b) Relazioni tra due termini qualsiasi

Se a_r ed a_s sono due termini qualsiasi di una $A(d)$ ed è $r < s$ allora risulta :

$$a_s = a_r + (s-r)d \qquad [6]$$

Tenendo presente la [5] possiamo scrivere :

$$a_s = a_1 + (s-1)d$$ sottraendo membro

$$a_r = a_1 + (r-1)d$$ a membro otteniamo

$$a_s - a_r = sd - rd = (s-r)d \Rightarrow a_s = a_r + (s-r)d$$

c) In una progressione aritmetica $A(d)$ limitata la somma di due termini equidistanti dagli estremi (**termini coniugati**) è uguale alla somma degli estremi : $a_n + a_1 = a_{k+1} + a_{n-k}$ [7]

Se a_{k+1} è un termine preceduto da k elementi e a_{n-k} è un termine seguito da n elementi , per la [5] abbiamo : $a_{k+1} = a_1 + kd$ cioè : $a_{k+1} - a_1 = kd$ [α] , mentre per la [6] abbiamo :

$a_n = a_{n-k} + kd$ cioè : $a_n - a_{n-k} = kd$ [β]

Confrontando la [α] con la [β] otteniamo : $a_n + a_1 = a_{k+1} + a_{n-k}$ c.v.d.

- Due termini di una progressione aritmetica si dicono **coniugati** quando la somma dei loro indici dà $n+1$.

d) Somma dei termini di una progressione aritmetica limitata $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ [8]

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Sommo membro a membro

Dimostrazione

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{1} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{2} + \underbrace{\cdots}_{\cdots} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{n-1} + \underbrace{(a_n + a_1)}_{n}$$

Tenendo presente la [7] abbiamo: $2S_n = n(a_1 + a_n)$, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

e) Somma dei primi **n** numeri interi

$\div 1,2,3,\cdots,n-1,n$, $a_1 = 1$, $a_n = n$ $\quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ [9]

f) Somma dei primi n numeri pari

$\div 2,4,6,8,...,2n$, $A(2)$, $a_1 = 2$, $a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

$S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = \frac{2n(1+n)}{2}$ $\quad S_n = n(1+n)$

g) Inserzione di medi aritmetici

Inserire m **medi aritmetici** $x_1, x_2, ..., x_m$ tra due numeri dati **a , b** significa costruire la progressione aritmetica $a, x_1, x_2, ..., x_m, b$. Per la [5] abbiamo :

$b = a + (m + 2 - 1)d$ $\quad d = \frac{b-a}{m+1}$

h) Osservazioni

1) Se in un problema i termini incogniti sono in numero dispari allora conviene indicare con **x** il termine centrale e con **d** la ragione . Per $n = 5$ abbiamo : $x - 2d$, $x - d$, $\mathbf{x}$, $x + d$, $x + 2d$

2) Se i termini della progressione aritmetica sono pari ($n = 2m$) allora conviene indicare con $x - d$ il termine ennesimo e con $2d$ la ragione . Per $n = 6$, $m = 3$ abbiamo :

$$x - 5d \ , \ x - 3d \ , \ x - d \ , \ x + d \ , \ x + 3d \ , \ x + 5d$$

3) Somma delle potenze simili dei numeri naturali

$$\sigma_k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + (n-1)^k + n^k \qquad [13]$$

Considero l'identità : $(1 + x)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}x + \binom{k+1}{2}x^2 + ... + \binom{k+1}{k}x^k + x^{k+1}$ [14]

Ponendo successivamente nella [14] $x = 1,2,3,....,n$ otteniamo :

$$2^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}1 + \binom{k+1}{2}1^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}1^k + 1^{k+1}$$

$$3^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}2 + \binom{k+1}{2}2^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}2^k + 2^{k+1}$$

$$(1 + n)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1}n + \binom{k+1}{2}n^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}n^k + n^{k+1}$$

$$(1+n)^{k+1} = n + \binom{k+1}{1}(1+2+\ldots+n) + \binom{k+1}{2}(1^2+2^2+\ldots+n^2) + \ldots + \binom{k+1}{k}(1^k+2^k+\ldots+n^k) =$$

$$= n + 1 + \binom{k+1}{1}\sigma_1 + \binom{k+1}{2}\sigma_2 + \ldots + \binom{k+1}{k}\sigma_k \qquad \text{cioè :}$$

$$(n + 1)^{k+1} = n + 1 + \binom{k+1}{1}\sigma_1 + \binom{k+1}{2}\sigma_2 + \ldots + \binom{k+1}{k}\sigma_k \qquad [15]$$

CASI PARTICOLARI:

$k = 1$ $\quad (n + 1)^2 = n + 1 + \binom{2}{1}\sigma_1$ cioè : $\sigma_1 = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dbinom{n+1}{2}$ $\quad [16] \equiv [9]$

$k = 2$ $\quad (n + 1)^3 = n + 1 + \binom{3}{1}\sigma_1 + \binom{3}{2}\sigma_2 = n + 1 + 3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{3\cdot 2}{2}\cdot\sigma_2$

$$3\sigma_2 = (n + 1)^3 - (n + 1) - \frac{3}{2}n(n + 1) = (n + 1)\left(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3}{2}n\right) =$$

$$= (n + 1)\left(\frac{2n^2 + 4n - 3n}{2}\right) = \frac{n + 1}{2}(2n^2 + n) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2}$$

$$\sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2} \qquad [17]$$

Similmente si ottiene:

$$\sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sigma_1^2 \qquad [18]$$

$\sigma_4 = \dfrac{3n^2 + 3n - 1}{5}\cdot\sigma_2$ **[19]** $\qquad \sigma_5 = \dfrac{2n^2 + 2n - 1}{3}\cdot\sigma_3$ **[20]**

$\sigma_6 = \dfrac{3n^4 + 6n^3 - 3n + 1}{7}\cdot\sigma_4$ **[21]**

4) Somma delle potenze simili in una progressione aritmetica

$\div a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n \qquad S_k = a_1^k + a_2^k + a_3^k + \ldots.. + a_n^k$ **[22]** con $k = 1, 2, \ldots...$

Considero l'identità :

$$(d + x)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k x + \binom{k+1}{2} d^{k-1} x^2 + \ldots. + \binom{k+1}{k} d\, x^k + x^{k+1} \qquad \textbf{[23]}$$

Se nella [23] pongo successivamente $x = a_1, a_2, \ldots., a_n$ ottengo :

$$(d + a_1)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k a_1 + \binom{k+1}{2} d^{k-1} a_1^2 + \ldots. + \binom{k+1}{k} d\, a_1^k + a_1^{k+1} = a_2^{k+1}$$

$$(d + a_2)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k a_2 + \binom{k+1}{2} d^{k-1} a_2^2 + \ldots. + \binom{k+1}{k} d\, a_2^k + a_2^{k+1} = a_3^{k+1}$$

$$(d + a_n)^{k+1} = d^{k+1} + \binom{k+1}{1} d^k a_n + \binom{k+1}{2} d^{k-1} a_n^2 + \ldots. + \binom{k+1}{k} d\, a_n^k + a_n^{k+1} = a_{n+1}^{k+1}$$

Sommando membro a membro otteniamo :

$$(a_n + d)^{k+1} = a_1^{k+1} + \binom{k+1}{k} d\, S_k + \ldots. + \binom{k+1}{2} d^{k-1} S_2 + \binom{k+1}{1} d^k S_1 + n d^{k+1} \qquad \textbf{[24]}$$

Se risulta $a_1 = 1$, $d = 1$, per cui $a_n = n$ la $[24] \equiv [15]$.

CASI PARTICOLARI

$k = 1 \Rightarrow (a_n + d)^2 = a_1^2 + 2d\, S_1 + nd^2 \Rightarrow S_1 = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$k = 2 \Rightarrow (a_n + d)^3 = a_1^3 + 3d\, S_2 + 3d^2 S_1 + nd^3$ cioè : S_2

Esercizi risolti sulle progressioni aritmetiche

- **Trovare la somma dei primi** 40 **multipli del** 3

$$a_1 = 3 \;,\; d = 3 \;,\; n = 40 \;;\; S_{40} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} =$$

$$= \frac{40(6 + 39 \cdot 3)}{2} = 2460$$

- **Trovare la somma dei primi** 20 **numeri multipli del 3 che superano il numero 60**.

$a_1 = 63 \ , \ d = 3 \ , \ n = 20 \ , \ S_{20} = \dfrac{20(126+19\cdot 3)}{2} = 1830$

- **Si sa che il 2° ed il 7° termine di una $\div$ danno per somma 92 e che il 4° con l'11° fanno 71. Calcolare questi quattro termini.**

$a_2 = a_1 + d \ , \ a_7 = a_1 + 6d \ , \ a_4 = a_1 + 3d \ , \ a_{11} = a_1 + 10d$

$\begin{cases} 2a_1 + 7d = 92 \\ 2a_1 + 13d = 71 \end{cases} \qquad d = -3{,}5 \ , \ a_1 = 58{,}25 \ , \ a_2 = 54{,}75 \ , \ a_7 = 37{,}25 \ , \ a_{11} = 23{,}25$

- **La somma dei 4 termini di mezzo di una $\div$ di 12 termini è 74; il prodotto degli estremi è 70. Qual è la progressione?**

Sia $x \ , \ x + d \ , \ x + 2d \ , \ldots , \ x + 11d$ la p.a. richiesta .

I 4 termini di mezzo sono : $x + 4d \ , \ x + 5d \ , \ x + 6d \ , \ x + 7d$

Abbiamo : $4x + 22d = 74$ cioè: $2x + 11d = 37$.

Il prodotto degli estremi è : $x(x + 11d) = 70$ Eliminando la d otteniamo : $x^2 - 37x + 70 = 0$

$x = \dfrac{37 \pm \sqrt{1369 - 280}}{2} = \dfrac{37 \pm \sqrt{1089}}{2} = \dfrac{37 \pm 33}{2} \ , \ x = 2 \ , \quad = 35$

$x = 2 \Rightarrow 11d = 3 \ , \ d = 3 \ , \ \div 2,5,8,11,14,17,20,23,26,,29,32,35$

$= 35 \ \Rightarrow \ d = -3 \ , \ \div 35,32,29,26,23,20,17,14,11,8,5,2$

- **In una progressione aritmetica di 11 termini, la somma dei termini è 176; la differenza degli estremi è 30. Qual è la progressione?**

$a_{11} - a_1 = 30 \ , \ S_{11} = \dfrac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 176 \Rightarrow a_{11} + a_1 = 32 \quad \begin{cases} a_{11} - a_1 = 30 \\ a_{11} + a_1 = 32 \end{cases} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{11} = 31 \end{cases}$

$d = 3 \ , \qquad \div 1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31$

- **La somma di 3 numeri in progressione aritmetica è 33, il loro prodotto è uguale a 1287. Quali sono i tre numeri?**

Siano $x - d \ , \mathbf{x} \ , \ x + d$ i 3 numeri richiesti . $x - d + x + x + d = 33 \Rightarrow x = 11$

$x(x - d)(x + d) = 1287 \Rightarrow d^2 = 4 \ , \ d = \pm 2 \ , \ \div 9,11,13 \ , \quad \div 13,11,9$

- **Trovare tre numeri in progressione aritmetica conoscendo la loro somma s , e la somma b^2 dei loro quadrati.**

Siano $x - d \ , \mathbf{x} \ , \ x + d$ i 3 numeri richiesti . $(x - d) + x + (x + d) = s \Rightarrow x = \dfrac{s}{3}$

$$(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=b^2 \Rightarrow 3x^2+2d^2-b^2=0 \quad , \quad d^2=\frac{b^2}{2}-\frac{3x^2}{2}=\frac{b^2}{2}-\frac{s^2}{6}$$

$d=\pm\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{s^2}{6}}$ I tre numeri richiesti sono : $\frac{s}{3}-\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{s^2}{6}}$, $\frac{s}{3}$, $\frac{s}{3}+\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{s^2}{6}}$,

- **Trovare 4 numeri in progressione aritmetica sapendo che la loro somma vale 22 e che la somma dei loro quadrati vale** 166**.**

Siano $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ i 4 numeri richiesti (**2d** è la ragione) .

$$(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=22 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{11}{2}$$

$(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=166$, $2x^2+10d^2+83=0$ cioè :

$d^2=\frac{9}{4}$, $d=\pm\frac{3}{2}$ I numeri richiesti sono : $\frac{11}{2}-\frac{9}{2}=1$, $\frac{11}{2}-\frac{3}{2}=4$, $\frac{11}{2}+\frac{3}{2}=7$

$\frac{11}{2}+\frac{9}{2}=10$

- **La ragione di una progressione aritmetica di 4 termini è 4; il prodotto dei quattro termini è 585. Qual è la p.a. ?**

Siano x , $x+4$, $x+8$, $x+12$ i 4 numeri cercati . Abbiamo :

$x(x+4)(x+8)(x+12)=585$ cioè : $x^4+24x^3+176x^2+484x-585=0$

$(x-1)(x+13)(x^2+12x+45)=0$, $x=1 \Rightarrow$ **1 , 5 , 9 , 13**

$x=-13 \Rightarrow$ **-13 , - 9 , -5 , - 1**

Progressioni geometriche

1) Proprietà generali

Un insieme ordinato di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$dicesi **progressione aritmetica** se

$\forall n \in N$ si ha : $$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}=q} \qquad \textbf{[1]}$$

con **q** quantità costante diversa da **1** detta **ragione** o **quoziente** .

Una progressione geometrica di ragione **q** si indica col simbolo **G(q)** e si scrive:

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ **G(q)** **limitata nei due sensi**

$\ldots\ldots a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$ **G(q)** **illimitata nei due sensi**

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$ **G(q)** **illimitata in un senso**

Se gli elementi di una **G(q)** sono reali e la ragione è positiva , la progressione si dice **crescente** se risulta $q > 1$, **decrescente** se risulta $q < 1$.

Se invece è $q < 0$ la progressione geometrica dicesi **alternata**.

2) Proprietà delle progressioni geometriche

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ **[1]**

$$\left.\begin{array}{lcl} a_2 & = & a_1 \cdot q \\ a_3 & = & a_2 \cdot q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n-1} & = & a_{n-2} \cdot q \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot q \end{array}\right\}$$ Moltiplicando membro a membro i termini delle $n-1$ righe otteniamo :

$$\cancel{a_2}\cancel{a_3}\cdots\cancel{a_{n-1}}\cdot a_n = a_1\cancel{a_2}\cancel{a_3}\cdots\cancel{a_{n-1}}\cdot q^k \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- $a_{n+k} = a_n \cdot q^k$ **[2]**

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & q \cdot a_n \\ a_{n+2} & = & q \cdot a_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n+k} & = & q \cdot a_{n+k-1} \end{array}\right\}$$ Moltiplicando membro a membro i termini delle k righe otteniamo:

$$\cancel{a_{n+1}}\cdot\cancel{a_{n+2}}\cdots a_{n+k} = a_n \cdot \cancel{a_{n+1}}\cdots\cancel{a_{n+k-1}}\cdot q^k \quad \Rightarrow \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- **Relazione tra due termini qualsiasi**

$a_s = a_k \cdot q^{s-k}$ **[3]**

$$\begin{cases} a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \\ a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \end{cases}$$ Dividendo membro a membro otteniamo :

$$\frac{a_s}{a_k} = \frac{q^{s-1}}{q^{k-1}} = q^{s-k} \quad \Rightarrow \quad a_s = a_k \cdot q^{s-k}$$

• Prodotto di due termini coniugati

Due termini di una progressione geometrica di n termini si dicono **coniugati** o **simmetrici** quando la somma dei loro indici è $n+1$. $a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1}$ **[4]**

Dimostrazione : $\begin{cases} a_{k+1} = a_1 \cdot q^k \\ a_n = a_{n-k} \cdot q^k \end{cases}$ Dividendo membro a membro otteniamo :

$$\frac{a_{k+1}}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-k}} \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1}$$

OSSERVAZIONE

Se la progressione geometrica è limitata ed ha un numero dispari di termini , quello centrale a_c è **coniugato di se stesso**, per cui la [4] diventa : $a_c^2 = a_1 a_n$ $\quad a_c = \sqrt{a_1 a_n}$ **[5]**

• Prodotto di n termini consecutivi

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \qquad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \qquad \textbf{[6]}$$

Dimostrazione $\left.\begin{matrix} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{matrix}\right\}$ Moltiplico membro a membro

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdots (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

1 2 n-1 n

Per la [4] abbiamo : $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$ $\qquad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

• Somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1 \qquad \text{se} \quad q > 1 \qquad \textbf{[7]}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 \qquad \text{se} \quad q < 1 \qquad \textbf{[8]}$$

Dimostrazione

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$, $q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q + (a_1 - a_1)$, $q \cdot S_n = S_n + q \cdot a_n - a_1$

$(q-1) S_n = q a_n - a_1$, $S_n = \dfrac{q a_n - a_1}{q - 1} = \dfrac{q a_1 q^{n-1} - a_1}{q - 1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1$

Se risulta $q < 1$ scriviamo : $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1$

Altra dimostrazione

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

Sottraggo membro a membro

$$qS_n - S_n = -a_1 + qa_n = a_1 q^n - a_1 \ldots\ldots$$

- **Somma dei termini di una progressione geometrica illimitata**

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \quad \textbf{[9]} \quad \text{se } |q| < 1 \text{ cioè se : } -1 < q < 1$$

Dimostrazione

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} =$$

$$\frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \lim_{n \to \infty} q^n = \frac{a_1}{1 - q}$$

- **Inserzione di medi geometrici**

Inserire **m medi geometrici** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ fra due numeri dati **a , b** , entrambi diversi da zero , significa costruire la progressione geometrica : $a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, b$

Dalla [1] ricaviamo : $b = a \cdot q^{m+1}$ $\qquad q = \sqrt[m+1]{\dfrac{a}{b}}$ **[10]**

che ci permette di ricavare gli elementi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$

3) Frazione generatrice di un numero periodico

- $0,\overline{8} = 0,8888888\ldots = \dfrac{8}{10} + \dfrac{8}{100} + \dfrac{8}{1000} + \dfrac{8}{10000} + \ldots = \dfrac{8}{10} + \dfrac{8}{10^2} + \dfrac{8}{10^3} + \dfrac{8}{10^4} + \ldots =$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

- $2,\overline{3} = 2,333333.... = 2 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... =$

$$= 2 + \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{23 - 2}{9}$$

- $2,3\overline{15} = 2,315151515... = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + ... = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3}\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ...\right] =$

$$= \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3}\left[\lim_{n \to +\infty} 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} \right] = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3}\left[\frac{1}{\frac{99}{100}} \right] = \frac{23}{10} + \frac{15}{990} = \frac{2292}{990} = \frac{2315 - 23}{990}$$

<< Un numero decimale periodico non può avere come periodo il numero 9 o un gruppo di cifre tutte uguali al 9 >>

Esempio: $2,\overline{9} = 2,99999.... = 2 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ... = 2 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...\right) =$

$$2 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...\right) = 2 + 9\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 2 + 9\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9}\right) = 2 + 1 = 3$$

- **Caso generale**

Sia $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ una progressione geometrica di ragione **q** e primo termine **a₁** .

La somma S_n dei primi **n** termini in progressione geometrica è uguale a : $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1$

Se i termini n sono infiniti , se $q < 1$ allora q^n è trascurabile , cioè : $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ è la somma di infiniti termini in progressione geometrica avente primo termine $a_1 = \frac{1}{10}$ e ragione $q = \frac{1}{10} < 0$. Quindi : $S_n = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = S_n = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$

N.B. Il simbolo $2,\overline{9}$ rappresenta un numero intero , precisamente il numero **3** . Infatti , in particolari situazioni , la somma di infiniti termini (che in generale non ha significato) è una quantità finita .

- Vogliamo calcolare la **frazione generatrice** del numero decimale $0,\overline{p} = 0,ppppppp....$ avente la cifra decimale p che si ripete illimitatamente. Quindi p è il periodo formato da una sola cifra.

(p potrebbe avere r cifre che si ripetono illimitatamente, ad esempio $0,\overline{251} = 0,251251251...$)

$$\mathbf{0,\overline{p} = 0,ppppp...} = \frac{p}{10} + \frac{p}{100} + \frac{p}{1000} + .. = p\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ..\right) = p\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = p\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}}\right) = \frac{p}{9}$$

$p = 9 \Rightarrow 0,\overline{9} = 1$

p è formato da due cifre: $p = ab$

$$\mathbf{0,\overline{ab} = 0,abababab...} = \frac{ab}{10^2} + \frac{ab}{10^4} + \frac{ab}{10^6} + ... = ab\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ...\right) = ab\left(\frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}}\right) =$$

$$= ab\left(\frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{99}{10^2}}\right) = \frac{ab}{99}$$

Se $a = b = 9$ abbiamo: $0,\overline{99} = \frac{99}{99} = 1$ Il simbolo $0,\overline{99}$ rappresenta il numero 1.