Prodotti notevoli

Si chiamano prodotti notevoli alcuni prodotti fra polinomi che si effettuano in base a determinate regole che ci consentono di semplificare certi calcoli .

Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Quadrato di un binomio: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Quadrato di un polinomio $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

Cubo di un binomio

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Cubo di un trinomio

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Potenza di un binomio; triangolo di Tartaglia

Potenza di un binomio è una potenza del tipo: $(a+b)^n$

Lo sviluppo di $(a+b)^n$ è un polinomio avente $n+1$ termini , di grado **n** , omogeneo , completo ed ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b . I coefficienti del suddetto polinomio si deducono dal **triangolo di Tartaglia** .

n	coefficienti								
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Regola pratica per il calcolo dei coefficienti

(1) I termini estremi hanno coefficiente uguale ad 1

(2) scritto un coefficiente, si ottiene il successivo moltiplicando il coefficiente scritto per l'esponente di **a** nel termine già scritto e dividendo il prodotto ottenuto per il numero che indica il posto occupato dal monomio di cui abbiamo già scritto il coefficiente (oppure dividendo per l'esponente di **b** aumentato di 1)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} (a+b)^2 & = & a^6 & + & 6a^5b & + & 15a^4b^2 & + & 20a^3b^3 & + & 15a^2b^4 & + & 6ab^5 & + & b^6 \\ & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & \end{array}$$

$$6 = \frac{1\cdot 6}{1} \quad , \quad 15 = \frac{6\cdot 5}{2} \quad , \quad 20 = \frac{15\cdot 4}{3} \quad , \quad 15 = \frac{20\cdot 3}{4} \quad , \quad 6 = \frac{15\cdot 2}{5}$$

Divisione di un polinomio per un binomio di primo grado

Posiamo utilizzare la regola di Ruffini.

Regola di Ruffini

Serve a trovare rapidamente il quoziente ed il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x + k$ oppure del tipo $ax + b$

- $B(x) = x + k$ $\qquad (2x^4 - 9x^2 - 16):(x + 3)$

termine noto del divisore cambiato di segno

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -9 & 0 & -16 \\ -3 & & -6 & 18 & -27 & 81 \\ \hline & 2 & -6 & 9 & -27 & 65 \end{array}$$

Termine noto del dividendo

Resto

coefficienti del quoziente Q(x) che è un polinomio inferiore di un grado rispetto al dividendo

$$Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 27 \qquad , \qquad R = 65$$

- $B(x) = ax + b$ $\qquad$ Si procede come segue :

(1) Si divide ogni termine del dividendo $A(x)$ ed ogni termine del divisore per **a**

(2) si esegue la divisione come nel caso precedente

(3) i coefficienti dei termini del quoziente non vengono alterati

(4) il resto trovato , moltiplicato per **a** , è il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il polinomio $B(x)$

$(7x^3 - 2x^2 - 3x + 1):(3x - 1)$, $a = 3$, $b = -1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & & \frac{7}{9} & \frac{1}{27} & -\frac{26}{81} \\ \hline & \frac{7}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{26}{27} & \frac{1}{81} \end{array}$$

$Q(x) = \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{26}{27}$, $R = \frac{1}{81} \cdot 3 = \frac{1}{27}$

Decomposizione in fattori di un polinomio

Messa in evidenza totale

Si applica questo metodo quando tutti i termini del polinomio ammettono un $M.C.D.$ diverso da 1 . In questo caso si raccoglie a fattore comune il $M.C.D.$ di tutti i termini .

$\mathbf{x^3 + x^2 + 6x = x(x^2 + x + 6)}$ $\mathbf{12a^3b^3 + 6a^2b + 2ab^2 = 2ab(6a^2b^2 + 3a + b)}$

$$\mathbf{x(a+b) + 2y(a+b) + 4xy(a+b) = (a+b)(x + 2y + 4xy)}$$

Messa in evidenza parziale

Si applica questo procedimento quando è possibile la messa in evidenza a gruppi in modo che, mediante una successiva messa in evidenza totale , il polinomio dato viene decomposto nel prodotto di due polinomi . $\mathbf{ax + ay + bx + xy = a(b+y) + x(b+y) = (b+y)(a+x)}$

Il polinomio da decomporre è un binomio differenza di due quadrati

La decomposizione si effettua tenendo presente la seguente identità: $\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$

Il polinomio da decomporre è un binomio somma o differenza di due cubi

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità:

$\mathbf{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$ $\mathbf{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

Il polinomio da decomporre è un trinomio che è lo sviluppo del quadrato di un binomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$ $\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$

Il polinomio da decomporre è un quadrinomio che è lo sviluppo del cubo di un binomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente le due seguenti identità :

$\mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3}$ $\mathbf{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3}$

Il polinomio da decomporre è lo sviluppo del quadrato di un polinomio

La decomposizione del polinomio si effettua tenendo presente una delle seguenti identità:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd=(a+b+c+d)^2$$

Il polinomio da decomporre è un trinomio del tipo x^2+sx+p

Se è possibile trovare due numeri **a** e **b** per i quali risulta $a+b=s$ $a\cdot b=p$ allora il polinomio si decompone tenendo presente la seguente identità: $x^2+sx+p=(x+a)(x+b)$

$x^2+5x-14=(x-2)(x+7)$ $\quad a=-2\ ,\ b=+7$

Se il polinomio da decomporre si annulla per un certo valore $x=k$ della sua variabile, esso può essere decomposto applicando una o più volte la regola di Ruffini.

Equazione di primo grado ad una incognita

E’ una equazione riconducibile alla seguente forma: $\mathbf{ax=b}$ **[*]**

La soluzione dell’equazione [*] è una frazione che ha per numeratore il termine noto del secondo membro e per denominatore il coefficiente dell’incognita , cioè: $\mathbf{x=\dfrac{b}{a}}$

Sistema di primo grado a due incognite

E’ un sistema che ridotto a forma normale, assume la seguente forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

METODO DI SOSTITUZIONE

Si procede come segue:

1) Si risolve una delle due equazioni rispetto alla x (rispetto alla y)

2) L espressione così ricavata si sostituisce nell’altra equazione al posto della x (della y). Si ottiene una equazione di primo grado in y (x) la cui soluzione dà il valore della y (x)

3) Il valore trovato per la y (per la x) viene sostituito nell’espressione precedentemente trovata, pervenendo così al valore della x (della y).

$$\begin{cases} \mathbf{2x+3y=4} \\ \mathbf{-5x+y=7} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4-3y \\ -5x+y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4-3y}{2} \\ -5x+y=7 \end{cases} \quad -5\left(\frac{4-3y}{2}\right)+y=7 \quad \frac{-20+15y}{2}+y=7$$

$$-20+15y+2y=14 \quad , \quad 17y = 20+14 \quad , \quad 17y=34 \quad , \quad y=\frac{34}{17}=2$$

$$x = \frac{4-3y}{2} = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad \mathbf{x=-1\ ,\ y=2}$$

METODO DEL CONFRONTO

Si procede come segue:

1) Si risolvono le due equazioni del sistema rispetto alla medesima incognita ,ad esempio rispetto ad x

2) Si uguagliano le due espressioni algebriche ottenute e si perviene ad una equazione di primo grado in y

3) Si risolve questa equazione ottenendo il valore della y , cioè si ottiene $y = y_o$

4) Il valore dell'altra incognita (nel nostro caso x) si ottiene sostituendo quello trovato y_o in una qualsiasi delle due espressioni precedentemente trovate .

$$\begin{cases} 3x-7y=27 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{7y+27}{3} \\ x = \dfrac{-2y+4}{5} \end{cases} \quad \frac{7y+27}{3} = \frac{-2y+4}{5} \quad , \quad 35y+135 = -6y+12$$

$$35y+6y = -135+12 \quad , \quad 41y = -123 \quad , \quad y = -\frac{123}{41} = -3$$

$$x = \frac{7(-3)+27}{3} = \frac{-21+27}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad x=2 \ , \ y=-3$$

METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Vogliamo eliminare la y e calcolare la x:

$$\begin{array}{l} 2 \\ 7 \end{array}\begin{cases} 3x-7y=27 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \qquad m.c.m.(7,2) = 14 \quad , \quad \mathbf{\frac{14}{7}=2} \quad , \quad \mathbf{\frac{14}{2}=7}$$

$$\begin{cases} 6x - 14y = 54 \\ 35x + 14y = 28 \\ \hline 41x \quad \neq \quad = 82 \end{cases} \qquad \text{sommiamo membro a membro} \quad , \quad x = \frac{82}{41} = 2$$

Vogliamo eliminare la x e calcolare la y:

$$\begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array}\begin{cases} 3x-7y=27 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \qquad m.c.m.(3,5) = 15 \quad , \quad \frac{15}{3}=5 \quad , \quad \frac{15}{5}=3$$

$$\begin{cases} 15x - 35y = 135 \\ 15x + 6y = 12 \\ \hline \neq \quad -41y = 123 \end{cases} \qquad \text{Si sottrae membro a membro} \qquad y = -\frac{123}{41} = -3$$

METODO DI CRAMER

Dati quattro numeri a, b, a_1, b_1 il numero $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b$ dicesi determinante del secondo ordine e si ottiene sottraendo dal prodotto dei termini della diagonale discendente il prodotto dei termini della diagonale ascendente .

Se il sistema che vogliamo risolvere è ridotto a forma canonica, cioè è del tipo: $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

allora abbiamo:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = **determinante del sistema** = determinante formato dai coefficienti delle incognite

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$ = **determinante dell'incognita x** = determinante che si ottiene dal determinante del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$ = **determinante dell'incognita y** = determinante che si ottiene dal determinante del sistema sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti

Le soluzioni del sistema dato ci vengono fornite dalle due seguenti frazioni :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 27 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & -7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{54 + 28}{6 + 35} = \frac{82}{41} = 2 \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 135}{6 + 35} = -\frac{123}{41} = -3$$

Numeri reali

Dicesi numero razionale un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma di frazione.

Sono pertanto numeri razionali: (1) tutti i numeri interi (2) tutti i numeri decimali limitati (3) tutti i numeri decimali periodici. Dicesi numero irrazionale ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione. Un numero razionale o irrazionale dicesi reale.

numeri reali

- RAZIONALI (numeri frazionari)
  1) Numeri interi
  2) Numeri decimali limitati
  3) Numeri decimali periodici
- IRRAZIONALI = numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione = = numeri decimali illimitati e non periodici

Radicali

definizione di radice aritmetica
si definisce *radice aritmetica* n-sima di a, e si indica con $\sqrt[n]{a}$, quel numero b tale che: $b^n = a$ con a e b numeri reali ≥ 0 e con n numero intero > 0 in simboli: $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a}$
nomenclatura
$\sqrt[n]{a^m}$ si chiama radicale; n è l'indice della radice; m è l'esponente del radicando; a^m è il radicando — $\sqrt[n]{a^m}$

proprietà		
$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$	$\sqrt[1]{a} = a$	$\sqrt[0]{a}$ *non ha significato*

esempi					
$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{8} = 2$

operazioni con i radicali		
operazione	nome	esempio
$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$	semplificazione	$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$
$\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ $\rightarrow$ $\sqrt[mn]{a^n}$ e $\sqrt[mn]{b^m}$	riduzione allo stesso indice	$\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[3]{2}$ $\rightarrow$ $\sqrt[12]{5^3}$ e $\sqrt[12]{2^4}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$	prodotto di radicali	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{200}$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	rapporto di radicali	$\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$
$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	trasporto di fattore dentro il segno di radice	$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$
$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a^{m+n}} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^n} = a\sqrt[n]{a^m}$	trasporto di fattore fuori il segno di radice	$\sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2} = 5\sqrt[3]{5^2}$ $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	potenza di radicali	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	radice di radice	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$\alpha\sqrt[n]{a} \pm \beta\sqrt[n]{a} = (\alpha \pm \beta)\sqrt[n]{a}$	somma algebrica di radicali simili	$8\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

Radicali

razionalizzazione del denominatore di una frazione

- *che cosa è:* se al denominatore di una frazione compaiono uno o più radicali allora esso è un numero irrazionale. La razionalizzazione è una operazione che consente di eliminare i radicali al denominatore rendendolo così un numero razionale.
- *come si fa:* per razionalizzare il denominatore di una frazione bisogna moltiplicare il numeratore ed il denominatore della frazione per uno stesso fattore detto *"fattore razionalizzante"*. Tale fattore va scelto in modo opportuno a seconda di come è formato il denominatore.

Si distinguono quattro casi riportati di seguito, in essi il fattore razionalizzante è evidenziato in **colore**.

1°caso: al denominatore una sola radice quadrata		
cosa fare	esempi	
$\frac{x}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$	$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{a}{5\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{5b}$
osserva che: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ e che: $3\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = 3a$		

2°caso:	al denominatore una sola radice **non** quadrata
cosa fare	esempi
$\dfrac{x}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{x\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$	$\dfrac{2}{\sqrt[3]{7^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{7}}{7}$ $\dfrac{2}{\sqrt[5]{ab^2c^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{a^4b^3c^2}}{\sqrt[5]{a^4b^3c^2}} = \dfrac{2\sqrt[5]{a^4b^3c^2}}{abc}$
osserva che: $\sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{a^5} = \sqrt[7]{a^7} = a$	e che: $\sqrt[5]{ab^2c^3} \cdot \sqrt[5]{a^4b^3c^2} = \sqrt[5]{a^5b^5c^5} = abc$

3°caso:	al denominatore un polinomio con una o più radici quadrate	
cosa fare	esempi	
$\dfrac{x}{a+\sqrt{b}} \cdot \dfrac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{x(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$	$\dfrac{2}{5-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \dfrac{2(5+\sqrt{3})}{25-3} = \dfrac{2(5+\sqrt{3})}{22} = \dfrac{5+\sqrt{3}}{11}$	
$\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$	$\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$	
osserva che il prodotto notevole $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$ si può applicare anche ai seguenti casi		
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$	$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b) = a-b^2$	$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-b$

4°caso:	al denominatore un binomio con una o due radici cubiche
cosa fare	$\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{x(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$
esempio	$\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}} = \dfrac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})}{2+5} = \dfrac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})}{7}$
ricorda i prodotti notevoli:	$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ $\quad$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

Radicale doppio

Chiamasi radicale doppio ogni espressione avente la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Le suddette formule sono utili se a^2-b è un **q**uadrato perfetto. In questo caso il radicale doppio si trasforma in due radicali semplici.

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$$

Potenza ad esponente frazionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Per le potenze ad esponente frazionario valgono le seguenti proprietà formali:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \quad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{ap}{nq}} \quad (a \cdot b \cdot c)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \cdot c^{\frac{m}{n}} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

I numeri complessi

Noi sappiamo che la radice quadrata di un numero negativo non esiste nel campo dei numeri reali. Infatti $\sqrt{-4}$ non esiste in R in quanto non è possibile trovare un numero reale il cui quadrato è -4 . Per rendere possibile l'estrazione di radice ad indice pari di un numero reale negativo si introducono i numeri immaginari. Si pone per definizione: $\sqrt{-1} = i$ cioè: $i^2 = -1$

Il simbolo i, che rappresenta la radice quadrata del numero -1, è detto unità immaginaria.

Si definisce poi numero immaginario il simbolo bi, che esprime il prodotto del numero reale **b** per l'unità immaginaria i. Infine, dicesi numero complesso la somma di un numero reale **a** e di un numero immaginario bi. Un numero complesso assume la seguente forma: $a+bi$

Due numeri complessi si dicono coniugati quando hanno la stessa parte reale ed opposti i coefficienti dell'unità immaginaria. I due seguenti numeri $a+bi$ e $a-bi$ sono complessi e coniugati. Le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione si eseguono alla stessa maniera dei numeri reali con l'unica avvertenza di ricordare che risulta: $i^2 = -1$

Il prodotto di due numeri complessi e coniugati è un numero reale:

$$(3+5i)\cdot(3+5i) = 9+15i+15i+4i^2 = 9+30i+4(-1) = 30i+5$$

Equazione di secondo grado ad una incognita

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se b è un **numero pari** abbiamo: $x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

Relazioni fra le radici ed i coefficienti di una equazione di secondo grado

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Scomposizione in fattori di un trinomio di secondo grado

$$T(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove i numeri x_1 **ed** x_2 **sono gli zeri del trinomio, ossia** *le radici dell'equazione associata* $ax^2 + bx + c = 0$.

L'equazione di secondo grado avente come radici due numeri dati ha il primo coefficiente uguale all'unità, il secondo coefficiente è la somma dei due numeri cambiata di segno, il terzo coefficiente coincide col prodotto dei due numeri.

$$x^2 - Sx + P = 0 \qquad S = x_1 + x_2 \qquad P = x_1 \cdot x_2$$

Equazione biquadratica

Dicesi **equazione biquadratica** una equazione riconducibile alla seguente forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Si tratta di una equazione di 4° grado priva dei termini di grado dispari. Essa si risolve mediante la seguente sostituzione: $x^2 = y \quad (x^4 = y^2)$ Si ottiene: $ay^2 + by + c = 0$ che è una equazione di 2° grado in y, la quale ammette due radici reali y_1 , y_2 se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

$$x = \pm\sqrt{y_1} \quad , \quad x = \pm\sqrt{y_2} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{y_1} \quad , \quad x_2 = \sqrt{y_1} \quad , \quad x_3 = -\sqrt{y_2} \quad , \quad x_4 = \sqrt{y_2}$$

Equazioni irrazionali

1) L'equazione irrazionale contiene un solo radicale di indice due:

$$\sqrt{A(x)} = B(x)$$

L'equazione si risolve elevando ambo i membri al quadrato: $A(x) = [B(x)]^2$

La verifica può essere eliminata se, preliminarmente, imponiamo la condizione di realtà e la condizione di positività che, nel caso nostro si traduce nella risoluzione del seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

2) **Equazione irrazionale del tipo**: $\boxed{\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = C(x)}$

Le condizioni di realtà e di positività si traducono nel seguente sistema: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ C(x) \geq 0 \end{cases}$

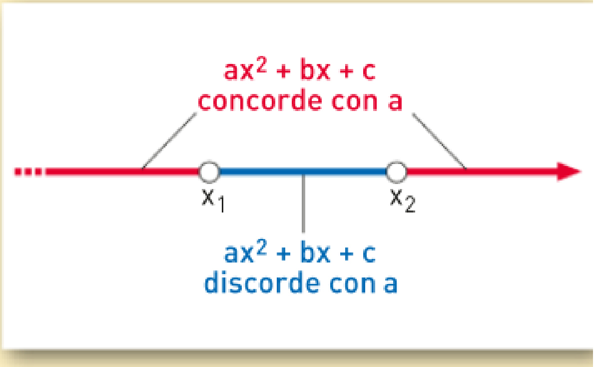
Poi bisogna eliminare i radicali separando opportunamente un radicale ed elevando ambo i membri al quadrato.

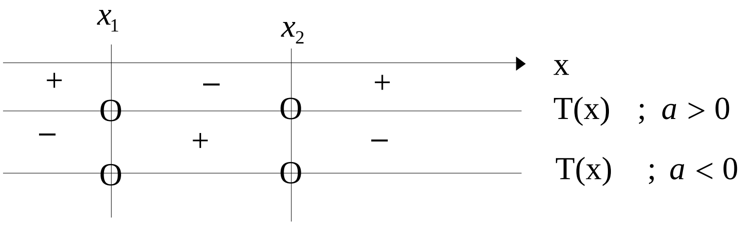
Segno del trinomio di secondo grado

REGOLA

Il trinomio $ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) che ha equazione associata con $\Delta > 0$, ha segno:

- concorde con a per valori esterni all'intervallo individuato dalle radici dell'equazione associata;
- discorde con a per valori interni all'intervallo delle radici.

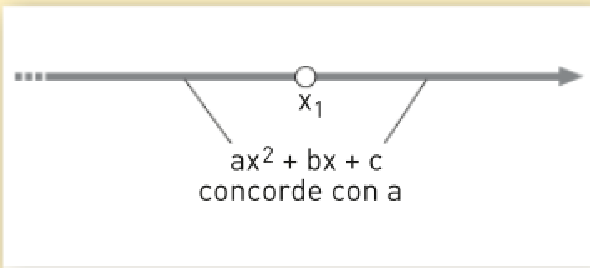


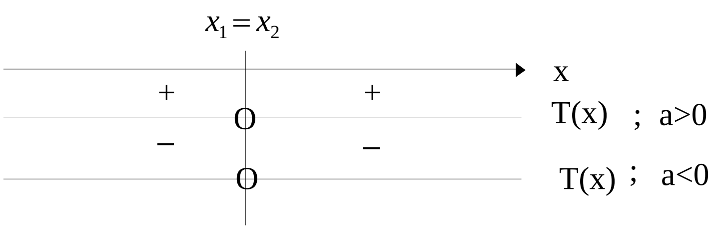


$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

REGOLA

Il trinomio $ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) che ha equazione associata con $\Delta = 0$, ha segno concorde con a per tutti i valori di x diversi dalla radice dell'equazione associata.

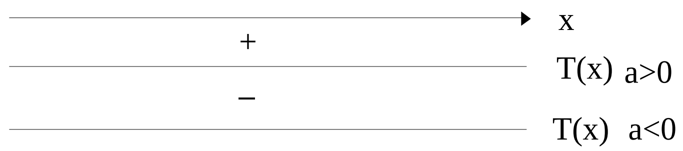




$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

REGOLA

Il trinomio $ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) che ha equazione associata con $\Delta < 0$, ha segno concorde con a per ogni valore reale.



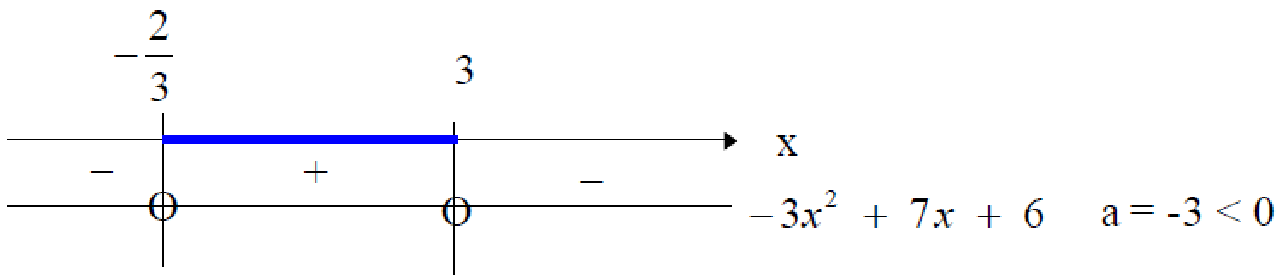
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Disequazioni di secondo grado

Per risolvere una disequazione di secondo grado ad una incognita ridotta a forma canonica basta ricordare le proprietà del segno del trinomio.

$-3x^2 + 7x + 6 > 0 \quad \forall\, x \in \left]-\frac{2}{3}, 3\right[\quad \left(-\frac{2}{3} < x < 3\right)$

$3x^2 - 7x - 6 = 0 \; , \; x_1 = -\frac{2}{3} \; , \; x_2 = 3$



Le disequazioni fratte

Le disequazioni fratte

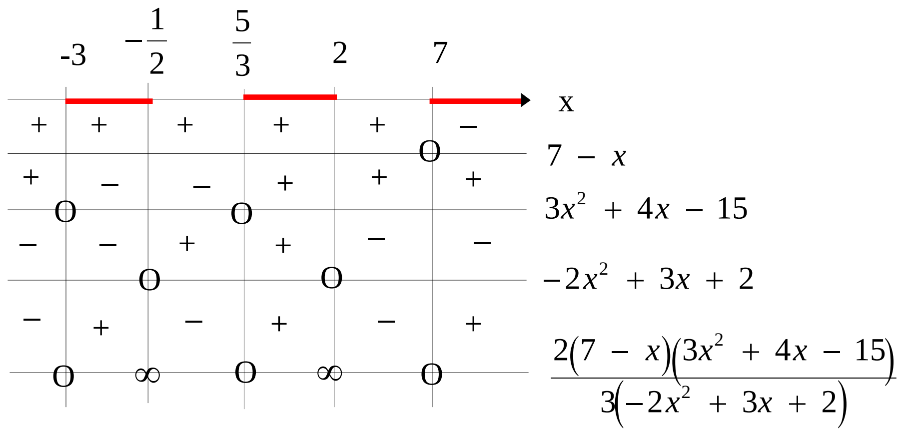
Per risolvere una **disequazione fratta**, $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$, si studiano i segni del numeratore e del denominatore, poi si determina il segno della frazione mediante la regola dei segni.

La frazione si annulla se e solo se il numeratore è 0; non esiste se il denominatore è nullo.

$\frac{2(7-x)(3x^2+4x-15)}{3(-2x^2+3x+2)} > 0$ per $-3 < x < -\frac{1}{2} \; , \; \frac{5}{3} < x < 2 \; , \; x > 7$

$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7 \; , \; 3x^2 + 4x - 15 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad x = \frac{5}{3}$

$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \; , \quad x = 2$



I sistemi di disequazioni

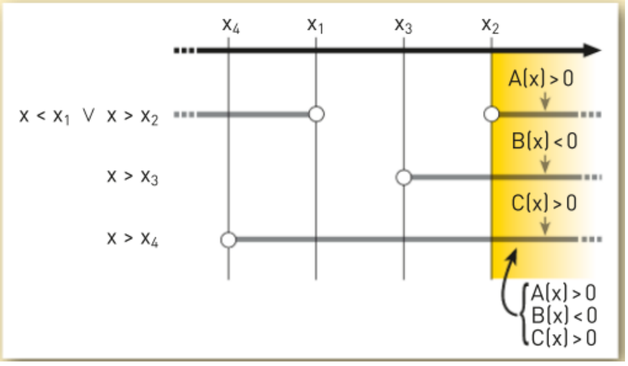
I sistemi di disequazioni

Per determinare le soluzioni di un **sistema di disequazioni** si risolvono le singole disequazioni; quindi si considerano in quali intervalli sono verificate tutte contemporaneamente.

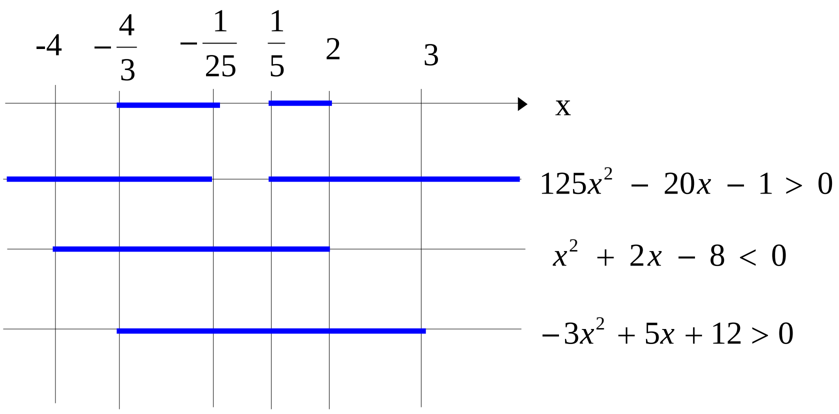
ESEMPIO Supponiamo che le disequazioni del sistema:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$$

siano verificate negli intervalli indicati nel grafico. Il sistema è allora verificato soltanto per $x > x_2$.



$$\begin{cases} 125x^2 - 20x - 1 > 0 \quad per \quad x < -\frac{1}{25} \; e \; x > \frac{1}{5} \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \quad per \quad -4 < x < 2 \\ -3x^2 + 5x + 12 > 0 \quad per \quad -\frac{4}{3} < x < 3 \end{cases}$$



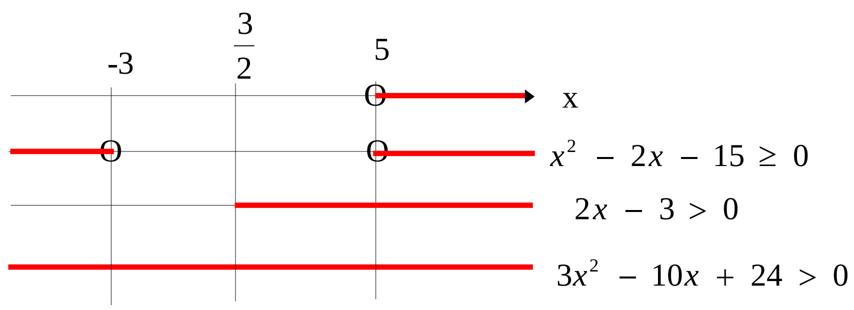
Il sistema dato è verificato per $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{25}$ e $\frac{1}{5} < x < 2$ cioè $\forall x \in \left]-\frac{4}{3},-\frac{1}{25}\right[\cup \left]\frac{1}{5},2\right[$

Le disequazioni irrazionali

La disequazione irrazionale $\mathbf{A(x) > \sqrt{B(x)}}$ è **equivalente** al sistema: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ [A(x)]^2 > B(x) \end{cases}$

$2x - 3 > \sqrt{x^2 - 2x - 15}$ per $x \geq 5$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ (2x - 3)^2 > x^2 - 2x - 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 & per \quad x \leq -3 \,,\, x \geq 5 \\ 2x - 3 > 0 & per \quad x > \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 10x + 24 > 0 & \forall\, x \in R \end{cases}$$



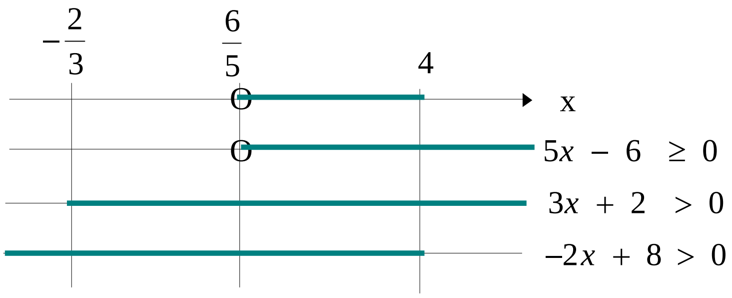
La disequazione $\mathbf{\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}}$ è equivalente al sistema: $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$

$\mathbf{\sqrt{x^2 + 4x - 5} > \sqrt{(x + 7)(x - 3)}}$ per: $x \leq -7 \quad , \quad x \geq 3$

$$\begin{cases} (x + 7)(x - 3) \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 > (x + 7)(x - 3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x - 21 \geq 0 & per \;\; x \leq -7 \,,\, x \geq 3 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 & per \;\; x < -5 \,,\, x > 1 \\ 16 > 0 & \forall\, x \in R \end{cases}$$

$\sqrt{3x + 2} > \sqrt{5x - 6}$ per $\frac{6}{5} \leq x < 4$

$$\begin{cases} 5x - 6 \geq 0 \\ 3x + 2 > 0 \\ 3x + 2 > 5x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 6 \geq 0 & per \;\; x \geq \frac{6}{5} \\ 3x + 2 > 0 & per \;\; x > -\frac{2}{3} \\ -2x + 8 > 0 & per \;\; x < 4 \end{cases}$$



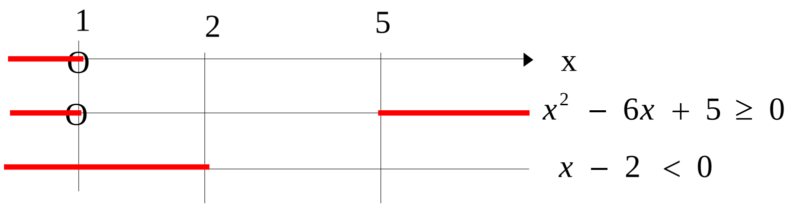
La disequazione irrazionale $\mathbf{A(x) < \sqrt{B(x)}}$ è equivalente ai due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$$

$x - 2 < \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ per : $x \leq 1$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 & per \quad x \leq 1 \ , \ x \geq 5 \\ x - 2 < 0 & per \quad x < 2 \end{cases}$$

Il sistema è verificato per $x \leq 1$

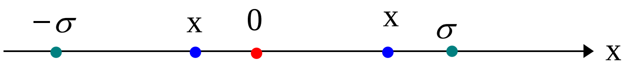


$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x - 2)^2 < x^2 - 6x + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2 \geq 0 & per \quad x \geq 2 \\ 2x - 1 < 0 & per \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Questo secondo sistema non ammette soluzioni.

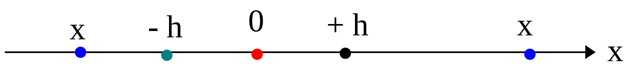
Disequazioni con valori assoluti

- $\left.\begin{array}{l} |x| < \sigma \\ \sigma > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -\sigma < x < \sigma$



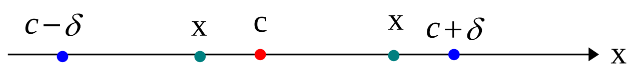
- $\left.\begin{array}{l} |f(x)| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) < +\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < +\varepsilon \\ f(x) > -\varepsilon \end{cases}$

- $\left.\begin{array}{l} |x| > h \\ h > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x < -h \ \wedge \ x > h$



- $\left.\begin{array}{l} |f(x)| > k \\ k > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x) < -k \ \wedge \ f(x) > k$

- $$\left.\begin{array}{r}|x-c|<\delta \\ \delta>0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad -\delta<x-c<\delta \quad \Leftrightarrow \quad c-\delta<x<c+\delta$$

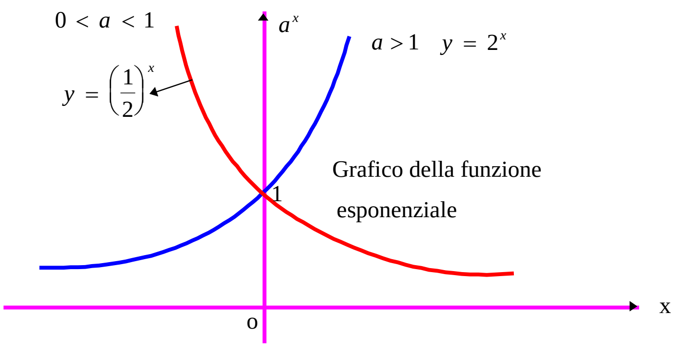


- $$|f(x)-c|<\delta \in R^{+} \quad \Leftrightarrow \quad -\delta<f(x)-c<\delta \quad \Leftrightarrow \quad c-\delta<f(x)<c+\delta$$

Queste disequazioni ti serviranno quando farai anali matematica.

La funzione esponenziale

Grafico della funzione esponenziale $\mathbf{f(x)=a^x}$



Equazione esponenziale normale $\quad \mathbf{a^x = b}$

Teorema: Se a e b sono numeri reali positivi diversi da uno, l'equazione esponenziale $\mathbf{a^x = b}$ ammette una ed una sola soluzione x_1, precisamente una radice positiva (negativa) **se** $a>1$ **e** $b>1$ **oppure** $0<a<1$ **e** $0<b<1$ **[**$a>1$ **e** $0<b<1$ **oppure** $0<a<1$ **e** $b>1$

$$2^x=8 \;,\; 2^x=8 \;,\; x=3 \;,\; \left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{27} \;,\; \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \;,\; x=3$$

Risoluzione di alcune equazioni esponenziali

L'equazione esponenziale $\quad \mathbf{a^{f(x)}=a^{g(x)}}$ è equivalente all'equazione algebrica : $f(x)=g(x)$

Le equazioni esponenziali $\quad \mathbf{k\cdot a^{2\cdot f(x)}+n\cdot a^{f(x)}+p=0} \qquad \mathbf{k\cdot a^{f(x)}+\frac{n}{a^{f(x)}}+p=0}$

si risolvono ponendo: $y=a^{f(x)}$. Otteniamo rispettivamente le due seguenti equazioni algebriche:

$\mathbf{my^2+ny+p=0} \qquad my+\frac{n}{y}+p=0 \qquad$ cioè: $\qquad \mathbf{my^2+py+n=0}$

Se y_1 ed y_2 sono le radici reali delle equazioni algebriche trovate , abbiamo:

$$a^{f(x)}=y_1 \quad , \quad a^{f(x)}=y_2$$

Definizione di logaritmo

Se $a, b \in R^+$, definiamo **logaritmo** del numero **b** nella **base a** e lo indichiamo col simbolo $\mathbf{\log_a b}$ la radice dell'equazione $a^x = b$, cioè logaritmo del numero b nella base a è l'esponente x che bisogna dare ad a per avere **b**. In simboli abbiamo:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

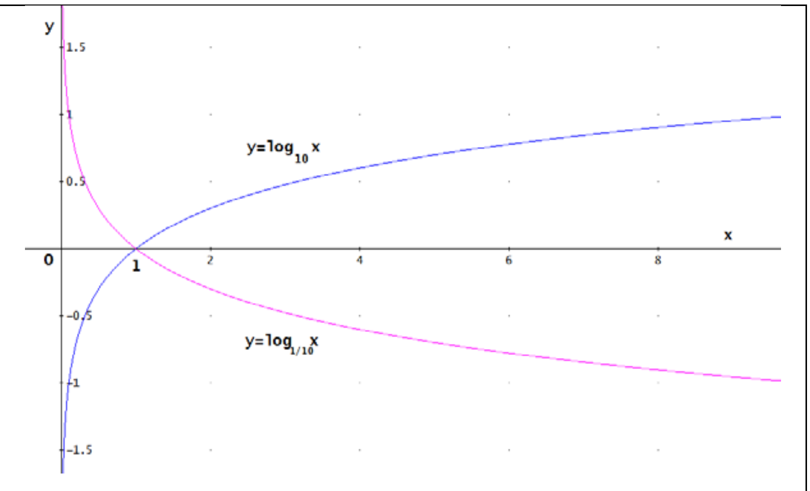
Sussistono pertanto le 4 seguenti identità: $\log_a a^x = x$ $\quad a^{\log_a b} = b$ $\quad a^{\log_a f(x)} = f(x)$ $\quad a^{\ln f(x)} = f(x)$

Funzione logaritmo $f(x) = \log_a x$

Grafico della funzione logaritmo

Grafico della funzione $y = \log_{10} x$

Grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{10}} x$



Teoremi fondamentali sui logaritmi

$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$ $\quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\quad \log_a b^m = m \cdot \log_a b$

$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$ $\quad \log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a b$

Altre proprietà dei logaritmi

I logaritmi nella stessa base di numeri reciproci sono numeri reali opposti

$$\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$$

Logaritmi in basi reciproche di numeri reciproci sono uguali

$\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \log_a x$ $\quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ $\quad \log_a b = \log_{a^n} b^n$ $\quad \log_a b = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b}$ $\quad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

Equazioni logaritmiche

L'equazione logaritmica $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ **[A]** con $a > 0$ ed $a \neq 1$ **è**

equivalente al seguente sistema misto: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ **[B]**

L'equazione $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ **equivale** al sistema misto : $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \ , \ a(x) \neq 1 \end{cases}$

L ' equazione: $k \cdot \log_a^2 f(x) + h \cdot \log_a f(x) + n = 0$ si risolve ponendo $\log_a f(x) = y$

Otteniamo il seguente sistema misto: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ k y^2 + h y + n = 0 \Rightarrow y_1 , y_2 \end{cases}$ $f(x) = a^{y_1}$, $f(x) = a^{y_2}$

L'equazione: $k \cdot \log_a f(x) + \dfrac{h}{\log_a f(x)} + n = 0$ si risolve ponendo : $\log_a f(x) = y$

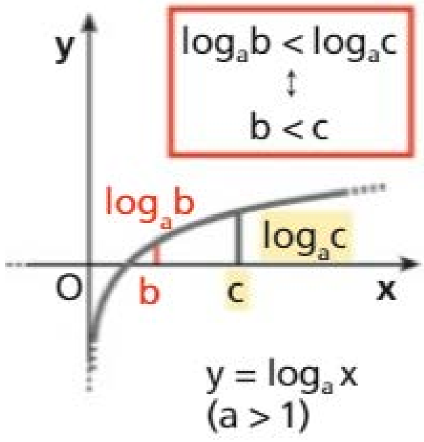
Otteniamo il seguente sistema misto: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ k y + \dfrac{h}{y} + n = 0 \end{cases}$

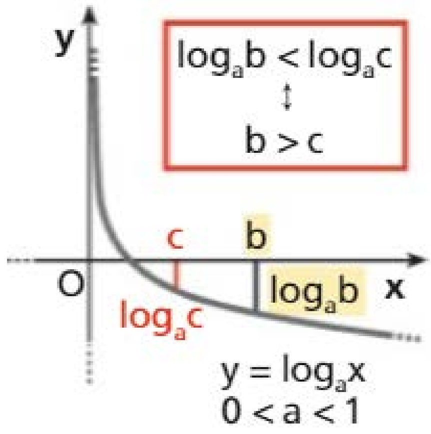
Disequazioni logaritmiche

La disequazione $\begin{cases} \log_a f(x) \gtrless \log_a g(x) \\ a > 1 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \gtrless g(x) \end{cases}$

La disequazione $\begin{cases} \log_a f(x) \gtrless \log_a g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \lessgtr g(x) \end{cases}$

come si deduce facilmente utilizzando i seguenti grafici:

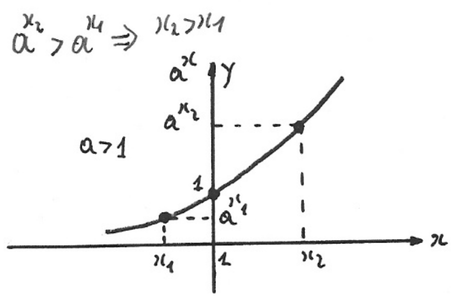


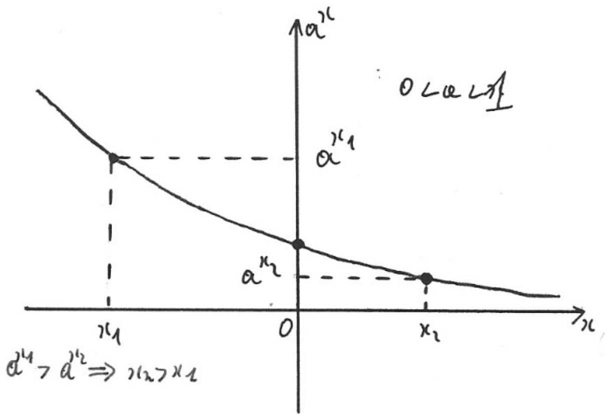


Disequazioni esponenziali

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) > g(x) \qquad \begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) < g(x) \qquad \begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) > g(x)$$





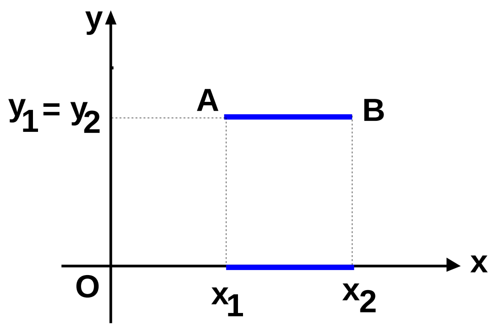
La distanza tra due punti

La distanza tra i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ si calcola applicando la seguente formula :

$$\mathbf{d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

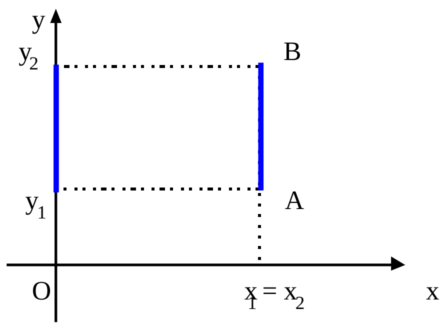
$$\mathbf{d(A,B) = |x_2 - x_1|}$$

$\mathbf{d(A,B)}$ = **ascissa maggiore - ascissa minore**

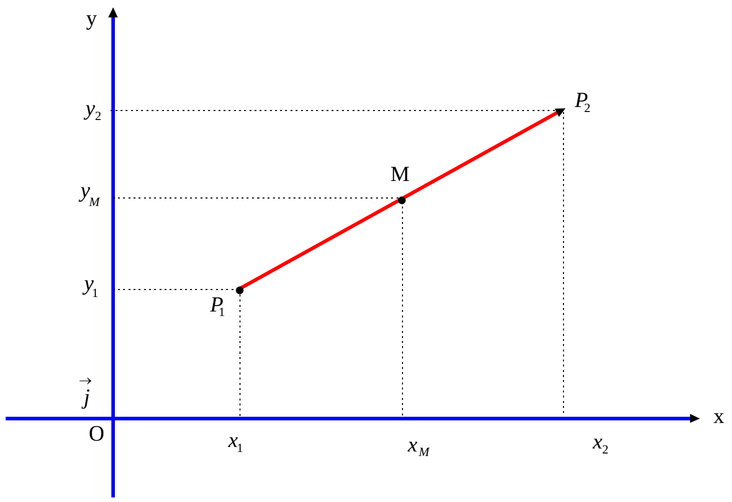


$$\mathbf{d(A,B) = |y_2 - y_1|}$$

$\mathbf{d(A,B)}$ = **ordinata maggiore - ordinata minore**



Le coordinate del punto medio di un segmento



$$\mathbf{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \mathbf{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

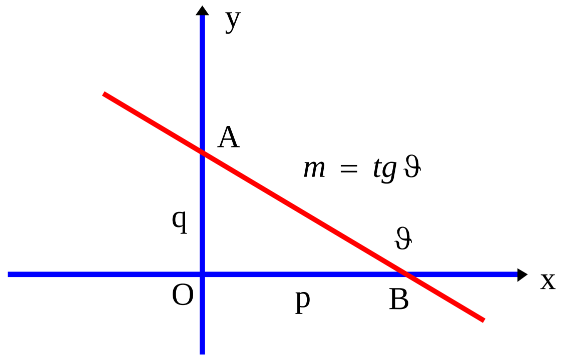
Le coordinate del baricentro di un triangolo

$$\mathbf{x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}} \qquad \mathbf{y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$$

La retta

$ax + by + c = 0$ **equazione generale** della retta o **equazione della retta sotto forma implicita**.

$y = mx + q$ equazione della retta sotto forma esplicita.



$m = tg\,\vartheta = -\dfrac{a}{b}$ = **coefficiente angolare** della retta

$q = -\dfrac{c}{b}$ = ordinata all'origine

Equazione della retta passante per i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\dfrac{a}{b}$ = **coefficiente angolare** della retta passante per i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1; y_1)$ ed avente coefficiente angolare m

$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$ **equazione segmentaria** della retta

Rette parallele

Due rette sono parallele se i loro coefficienti angolari siano uguali.

$m = m_1$ oppure $a_1 = ka$, $b_1 = kb$ in particolare per $k = 1$

$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $y = mx + n$

Rette perpendicolari

Due rette sono perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano antireciproci, cioè che il prodotto dei loro coefficienti angolari sia **-1**.

$r \perp s \Leftrightarrow [\, m \cdot m_1 = -1$, oppure $a a_1 + b b_1 = 0$ oppure $a_1 = kb$ e $b_1 = -ka$ con $k \in R - \{0\}$

oppure $a_1 = b$ e $b_1 = -a$ oppure $a_1 = -b$ e $b_1 = a$ $]$

$ax + by + c = 0$ e $bx - ay + d = 0$ sono rette fra loro perpendicolari.

$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$ equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$:

$\mathbf{y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)}$ equazione della retta passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e perpendicolare alla retta r di equazione $y = mx + n$:

Distanza di un punto da una retta

Distanza del punto $P(x_P; y_P)$ dalla retta r di data equazione

Se la retta ha equazione $ax+by+c=0$ la distanza vale: $d(P,r)=\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Se la retta ha equazione $y=mx+n$ cioè $mx-y+n=0$ vale $d(P,r)=\frac{|mx_P-y+n|}{\sqrt{m^2+1}}$

Fascio di rette

$\mathbf{y - y_o = m(x - x_o)}$ o $\mathbf{a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0}$ fascio di rette avente di. centro $P_o(x_o, y_o)$

$\mathbf{ax+by+c+h(a_1x+b_1y+c_1)}$ oppure $\mathbf{k(ax+by+c)+a_1x+b_1y+c_1}$ è l'**equazione del fascio di rette** individuato dalle rette **r** ed **s** .

Studiare un fascio di rette a centro proprio significa • trovare le equazioni delle rette che lo generano • trovare le coordinate del suo centro.

Per trovare le rette che individuano il fascio si sviluppa il primo membro dell'equazione del fascio e poi si mette in evidenza il parametro k.

$$kx+2x-ky-3y+13+5k=0 \qquad 2x-3y+13+k(x-y+5)=0$$

Le equazioni che generano il fascio si ottengono annullando il complesso dei termini che non contiene il parametro k e il coefficiente del parametro k.

Risolvendo il sistema fra le equazioni delle rette che individuano il fascio otteniamo le coordinate del centro del fascio.

Un altro modo di calcolare le coordinate del centro del fascio

Basta attribuire al parametro k due valori arbitrari; i più semplici possibili.

Per trovare tali valori basta annullare, se possibile, i coefficienti delle variabili x ed y.

La circonferenza

$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})^2 + (\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta})^2 = \mathbf{r}^2$ circonferenza di centro $C(\alpha,\beta)$ e raggio $\mathbf{r}$

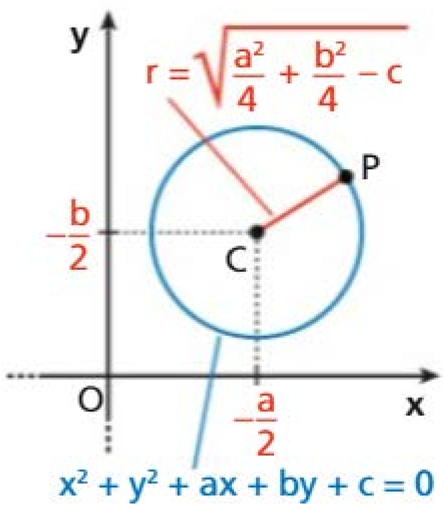
$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}^2$ equazione di una circonferenza col centro nell'origine e raggio $\mathbf{r}$

Equazione generale della circonferenza

$$\mathbf{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{2} \\ \beta = -\dfrac{b}{2} \\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

La circonferenza che risulta **reale** se $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c > 0$ cioè se: $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > c}$



$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Intersezione di una retta con una circonferenza

Le coordinate dei punti d'intersezione di una retta r di equazione $y = mx + n$ con una circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ si ottengono risolvendo il sistema tra l'equazione della retta e l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \qquad [8]$$

Intersezione di due circonferenze: asse radicale

$$\sigma: \; x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad , \qquad \sigma_1: \; x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

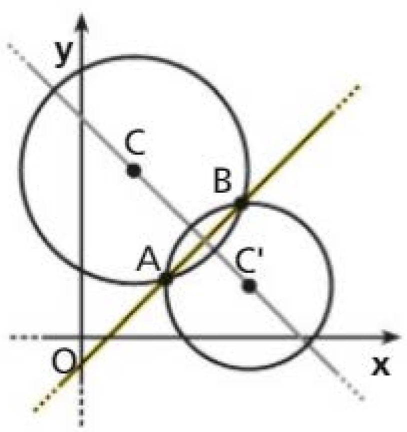
Per calcolare le coordinate dei punti comuni alle circonferenze σ e σ_1 basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$

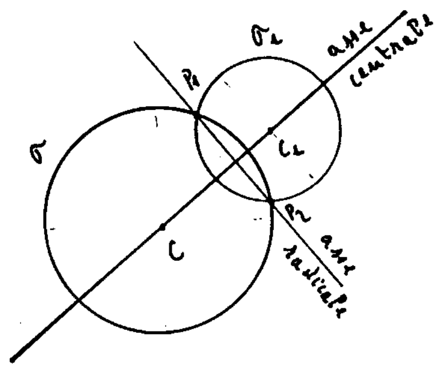
Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccccccc} x^2 & + & y^2 & + & ax & + & by & + & c & = & 0 \\ x^2 & + & y^2 & + & a_1x & + & b_1y & + & c_1 & = & 0 \\ \hline \# & & \# & & (a-a_1)x & + & (b-b_1)y & + & c-c_1 & = & 0 \end{array} \end{cases}$$

L'equazione $(a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0$ rappresenta una retta detta asse radicale delle due circonferenze. Tale asse radicale contiene i due punti **A** e **B** comuni alle due circonferenze.
Pertanto le coordinate di questi due punti si ottengono risolvendo uno dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-a_1)x + (b-b_1)y + c - c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$





L'asse radicale risulta perpendicolare alla retta (detta asse centrale) passante per i centri delle due circonferenze.

Equazione delle rette Tangenti ad una circonferenza uscenti da un dato punto

Primo metodo

- Ci calcoliamo il centro ed il raggio della circonferenza σ
- Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro $P_1(x_1, y_1)$: $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ **[1]**
- I punti comuni alla generica retta del fascio [1] ed alla circonferenza σ si ottengono risolvendo il

sistema: $\begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$ **[2]**

- Come risolvente otteniamo una equazione di secondo grado in x o in y:

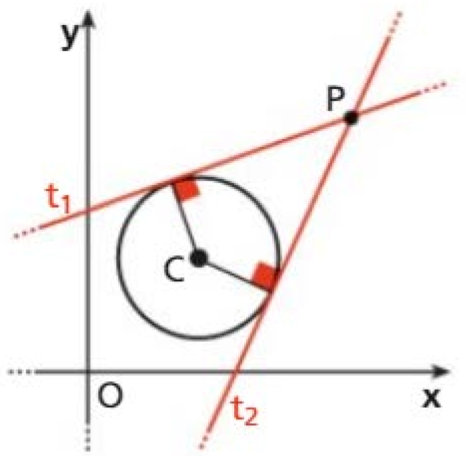
$$A(m) \cdot x^2 + B(m) \cdot x + C(m) = 0 \quad \text{oppure} \quad D(m) \cdot y^2 + E(m) \cdot y + F(m) = 0$$

Le radici m_1 ed m_2 dell'equazione [4] sono i coefficienti angolari delle tangenti richieste.

t_1: $\mathbf{y - y_1 = m_1(x - x_1)}$ t_2: $\mathbf{y - y_1 = m_2(x - x_1)}$

Osservazione

Con questo secondo procedimento, in generale, i calcoli sono piuttosto laboriosi.



Secondo metodo

Basta scrivere l'equazione del fascio di rette $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ nella forma implicita:

$$\mathbf{mx - y + y_1 - mx_1 = 0} \qquad [5]$$

ed imporre che la distanza del centro C della circonferenza σ dalla generica retta del fascio vale r .

Otteniamo: $\dfrac{|m\alpha-\beta+y_1-mx_1|}{\sqrt{m^2+1}}=r$ **[6]**

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo una equazione di secondo grado in m le cui radici m_1 ed m_2 rappresentano i coefficienti angolari delle due tangenti richieste.

Osservazione

Per calcolare le coordinate dei punti di tangenza basta risolvere il sistema fra l'equazione della circonferenza e l'equazione di ciascuna tangente.

Equazione della retta tangente ad una circonferenza in un punto

Sia $P_1(x_1,y_1)$ un punto della circonferenza □ di centro $C(\alpha,\beta)$. Per calcolare l'equazione della retta tangente alla circonferenza σ nel suo punto $P_1(x_1,y_1)$ basta applicare la seguente formula

$$x_1x+y_1y-\alpha(x+x_1)-\beta(y+y_1)+c=0 \quad [10]$$

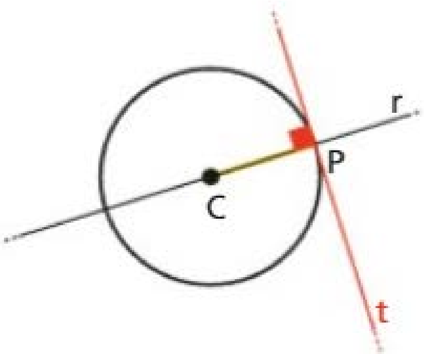
Che rappresenta la cosiddetta **regola degli sdoppiamenti** secondo la quale

$x^2\to x_1x$	$y^2\to y_1y$	$2x\to x+x_1$	$2y\to y+y_1$	$2xy\to x_1y+y_1x$

Tale regola vale per tutte le coniche.

In questo caso possiamo procedere anche nella seguente maniera:

- calcoliamo le coordinate del centro **C** della circonferenza
- calcoliamo il coefficiente angolare m_{CP_1} della retta CP_1
- il coefficiente angolare della retta tangente è l'antireciproco della retta CP_1



La sua equazione è: $y-y_1=-\dfrac{1}{m_{CP_1}}(x-x_1)$

Fascio di circonferenze

Date due circonferenze σ e σ_1 aventi rispettivamente equazioni:

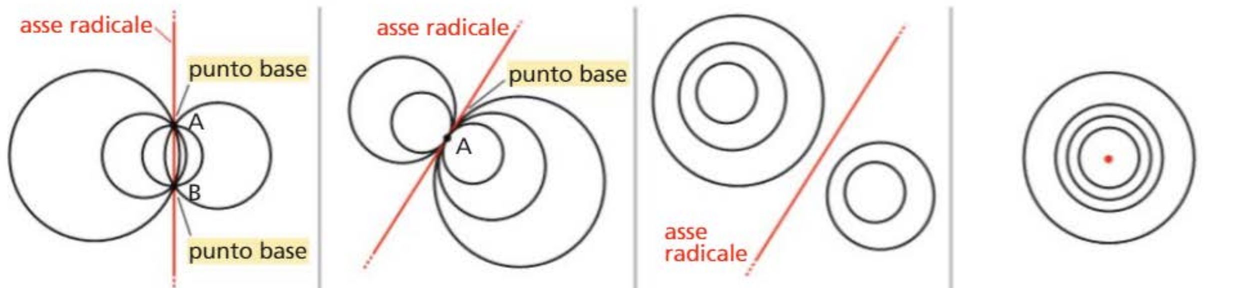
$$g(x,y) = x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad g_1(x,y) = x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$$

Si chiama fascio di circonferenze generato da σ e σ_1 l'insieme di tutte le circonferenze aventi equazioni: $f(x,y) = g(x,y) + k\cdot g_1(x,y) = 0$ cioè.

$$\mathbf{f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c + k\cdot\left(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1\right) = 0} \quad \text{cioè:}$$

$$\mathbf{(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (a+k\,a_1)x + (b+k\,b_1)y + c + k\,c_1 = 0}$$

Per studiare un fascio di circonferenze occorre trovare: **01)** il suo centro $C(\alpha;\beta)$ in funzione del parametro **02)** il suo raggio $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$ in funzione del parametro **03)** le due circonferenze (una delle due potrebbe essere degenere) che generano il fascio **04)** gli eventuali punti base H e K **05)** l'asse radicale (si ottiene ponendo $k=-1$ nell'equazione del fascio) **06)** l'asse centrale **07)** eventuali circonferenze degeneri. Una circonferenza degenere può essere una retta (concepita come una retta di raggio infinito) oppure un punto (concepito come una circonferenza di raggio nullo)



a. Fascio di circonferenze per due punti. b. Fascio di circonferenze per un punto. c. Fascio di circonferenze senza punti comuni. d. Fascio di circonferenze concentriche.

Equazioni parametriche della circonferenza

$$\begin{cases} \mathbf{x = \alpha + r\cdot\cos\vartheta = \alpha + r\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\ \mathbf{y = \beta + r\cdot\sin\vartheta = \beta + r\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}} \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi \qquad t = tg\frac{\vartheta}{2}$$

La parabola con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, detta anche parallela ad asse verticale

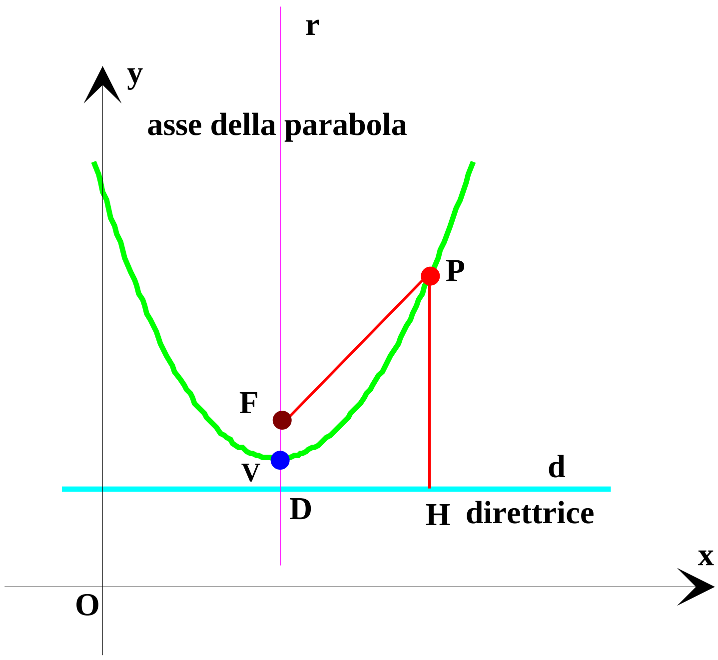
Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle ascisse sia parallelo alla direttrice **d**, l'equazione della parabola assume la forma $y = ax^2 + bx + c$

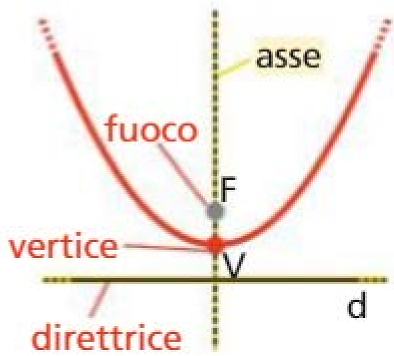
$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ Vertice della parabola $F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ Fuoco della parabola

$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ equazione della direttrice della parabola

$x = \frac{-b}{2a}$ equazione dell'asse della parabola $\Delta = b^2 - 4ac$ $-\Delta = 4ac - b^2$

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la concavità verso l'alto (il basso)





In sintesi

Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y:

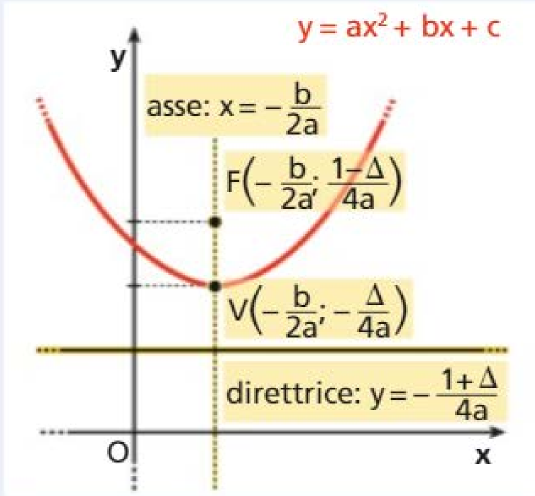
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0.$$

Equazione dell'asse: $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Fuoco: $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$.

Equazione della direttrice: $y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.



Equazione di una parabola di dato vertice

$y - y_V = a(x - x_V)^2$ con $V(x_V; y_V)$ vertice della parabola

La parabola con l'asse parallelo all'asse delle ascisse, detta anche parallela ad asse orizzontale

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse delle **y** risulti parallelo alla direttrice **d**, allora l'equazione della parabola assume la forma: $x = ay^2 + by + c$

$V\left(\dfrac{-\Delta}{4a}, \dfrac{-b}{2a}\right)$ Vertice della parabola $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; \dfrac{-b}{2a}\right)$ Fuoco della parabola

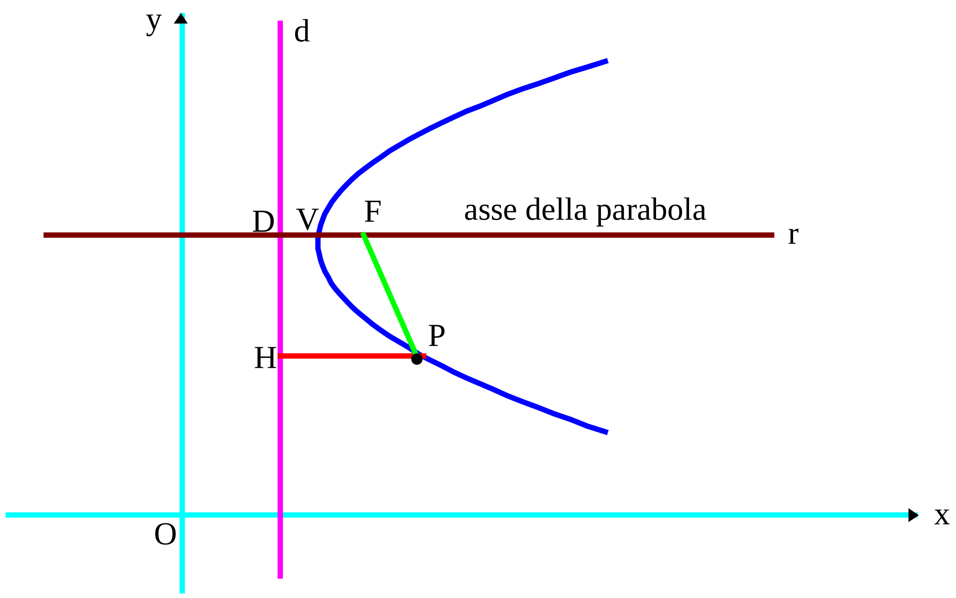
$x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$ equazione della direttrice della parabola

$y = \dfrac{-b}{2a}$ equazione dell'asse della parabola

$a > 0$ ($a < 0$) la parabola volge la concavità verso destra (sinistra)

Se $b = c = 0$ l'equazione della parabola assume la forma: $x = ay^2 = \dfrac{1}{4f}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4f\,x$

$F\left(\dfrac{1}{4a}, 0\right)$ $F(f, 0)$



Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x:

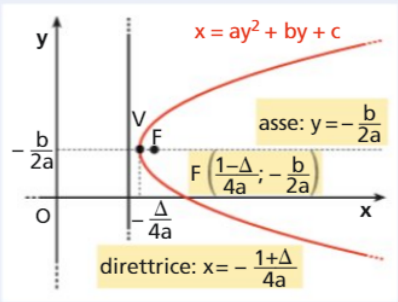
$$x = ay^2 + by + c, \text{ con } a \neq 0.$$

Equazione dell'asse: $y = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Fuoco: $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Equazione della direttrice: $x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.



Intersezione di una retta con una parabola

Per calcolare le coordinate dei punti di intersezione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con la retta $y = mx + n$ basta risolvere il seguente sistema:
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$

Tangenti ad una parabola condotte da un punto

Trattiamo questa questione risolvendo il seguente problema:

Calcolare le equazioni delle rette tangenti alla parabola γ di equazione $y = x^2 - 3x$ condotte dal punto $P(2,-3)$

Si procede come segue:

1) Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro $P(2,-3)$

$$y - y_o = m(x - x_o) \qquad\qquad y + 3 = m(x - 2)$$

2) Si risolve il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione del fascio di rette:

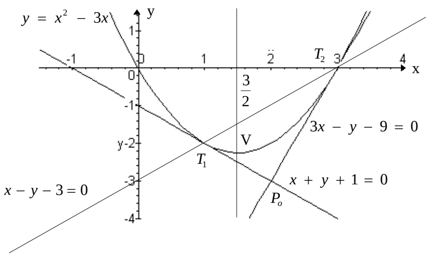
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases} \qquad x^2 - (m+3)x + 3 + 2m = 0 \text{ equazione risolvente il sistema}$$

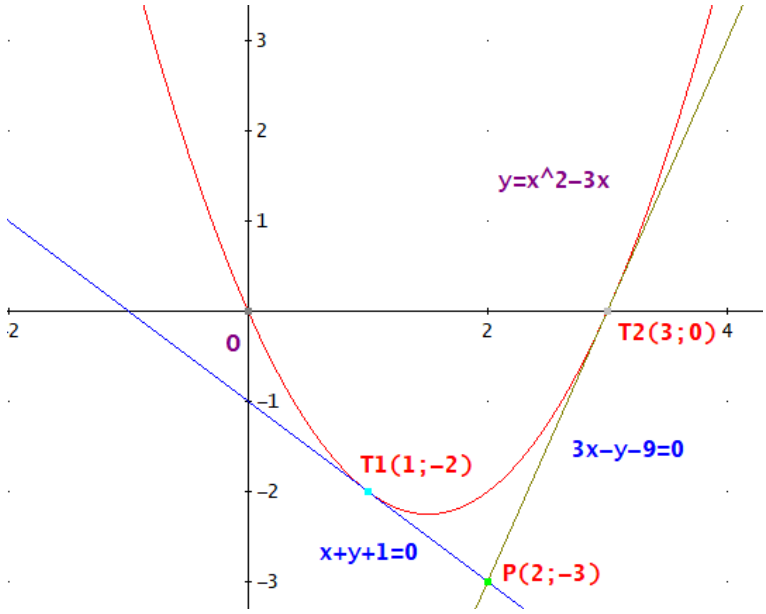
3) Si impone che sia uguale a zero il Δ dell'equazione risolvente il sistema:

$$\Delta = (3+m)^2 - 4(3+2m) = 0 \quad , \quad m^2 - 2m - 3 = 0 \quad , \quad m_1 = -1 \qquad m_2 = 3$$

4) Si sostituiscono i valori trovati nell'equazione del fascio:

$$t_1: \quad \mathbf{x+y+1=0} \qquad t_2: \quad \mathbf{3x-y-9=0}$$





Retta tangente alla parabola in un suo punto

In questo caso è più conveniente applicare la regola degli sdoppiamenti mediante le sostituzioni $\mathbf{x^2 \to x_o x} \quad \mathbf{x \to \frac{x_o + x}{2}} \quad \mathbf{y \to \frac{y_o + y}{2}}$

$\mathbf{\frac{y_o + y}{2} = a x_o + b \cdot \frac{x_o + x}{2} + c}$ è l'equazione della tangente richiesta

Fascio di parabole

Date le parabole γ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e γ_1 di equazione $y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ il fascio di parabole generato da γ e γ_1 è l'insieme di tutte le parabole aventi equazione:

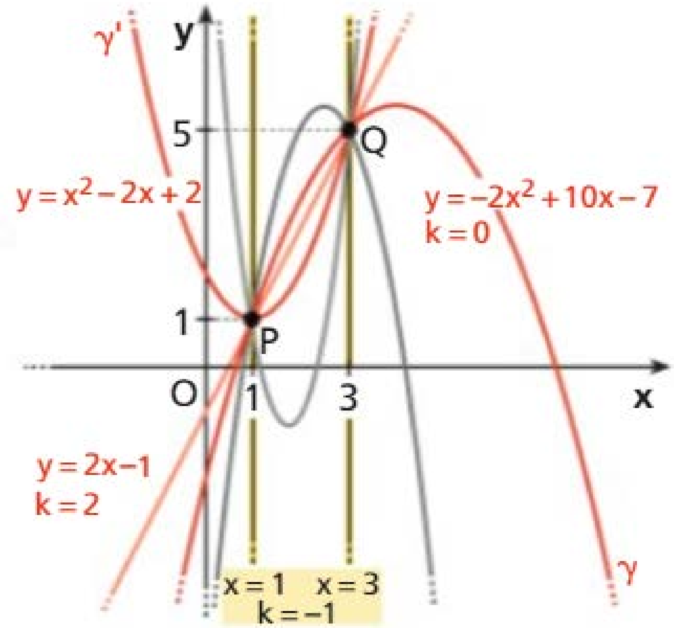
$$\mathbf{y - ax^2 - bx - c + k\left(y - a_1 x^2 - b_1 x - c_1\right) = 0}$$

che può essere scritta anche in una delle due seguenti espressioni

$$\mathbf{(k+1)y - (a + k a_1)x^2 - (b + k b_1)x - (c + k c_1) = 0}$$

$$y=\frac{a+k\,a_1}{k+1}x^2+\frac{b+k\,b_1}{k+1}x+\frac{c+k\,c_1}{k+1}$$

$\mathbf{y+2x^2-10x+7+k\left(y-x^2+2x-2\right)=0}$ è l'equazione del fascio di parabole individuato dalle parabole $\gamma: \mathbf{y=-2x^2+10x-7}$ e $\gamma_1: \mathbf{y=x^2-2x+2}$ e questo è il grafico di alcune sue componenti:



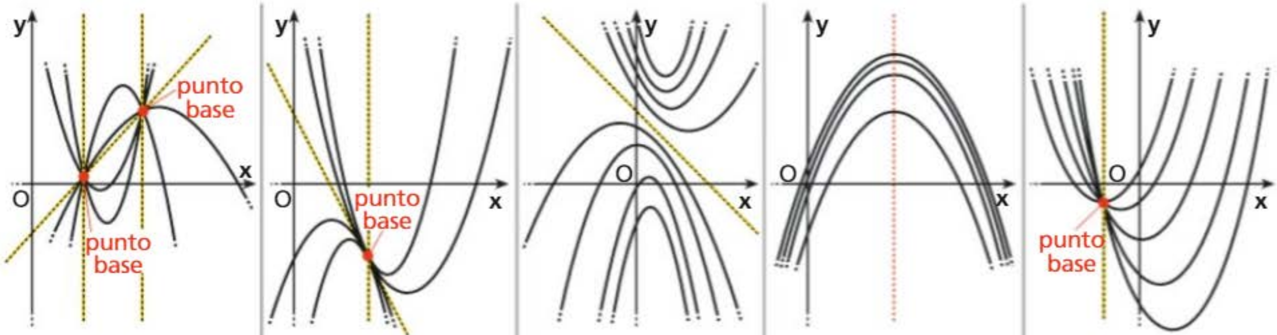
Studiare un fascio di parabole vuole dire calcolare le equazioni delle sue generatrici, le coordinate degli eventuali punti base e le equazioni delle parabole degeneri.

Come calcolare le equazioni delle generatrici

Si riscrive l'equazione del fascio di parabole mettendo in evidenza il parametro. Le equazioni delle due generatrici si ottengono una per $\mathbf{k=0}$ e l'altra uguagliando a zero il fattore che moltiplica il parametro.

Come calcolare le coordinate dei punti base

Basta risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due generatrici. I casi possibili sono quelli indicati in figura.



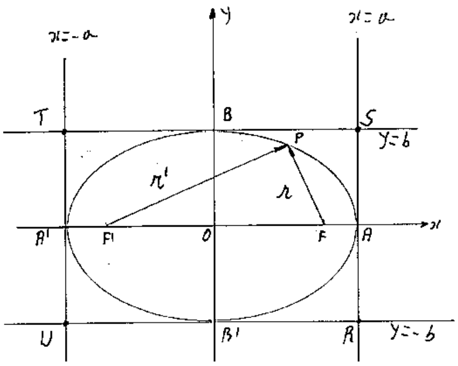
a. Le parabole sono secanti in due punti. **b.** Le parabole sono tangenti. **c.** Le parabole non hanno punti in comune. **d.** Le parabole sono congruenti e hanno lo stesso asse di simmetria. **e.** Le parabole hanno un punto comune e sono congruenti.

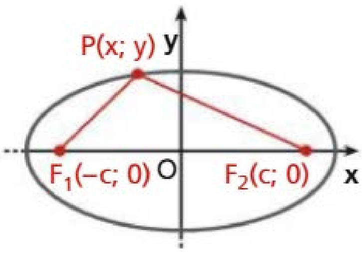
Le parabole degeneri sono quelle segnate in giallo. Una parabola degenere è la retta passante per i punti base, un'altra potrebbe essere quella costituita da due rette parallele all'asse delle ordinate, cioè all'equazione $(x-x_A)(x-x_B)=0$

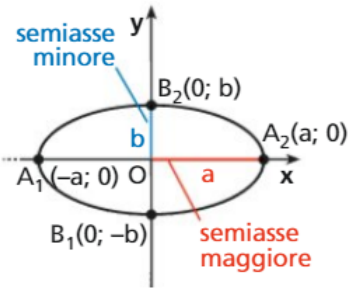
Ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a^2-c^2=b^2 \quad a^2=b^2+c^2 \qquad e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

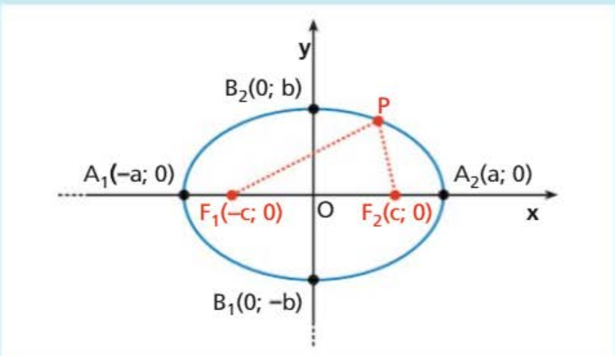
$P(x;y)$, $F(c;0)$, $F'(-c;0)$, $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $B(0;b)$, $B'(0;-b)$



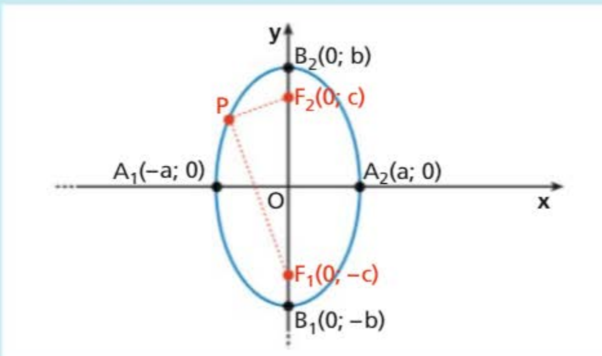




Ellisse con i fuochi sull'asse *x*



Ellisse con i fuochi sull'asse *y*



Equazione: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b$.	**Equazione:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $b>a$.
Fuochi: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, con $a>c$ e $c=\sqrt{a^2-b^2}$.	**Fuochi:** $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, con $b>c$ e $c=\sqrt{b^2-a^2}$.
Eccentricità: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.	**Eccentricità:** $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$.

Rette tangenti all'ellisse uscenti da un dato punto

Per calcolare le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ uscenti dal punto $P_o(x_o;y_o)$ si procede come segue:

(1) Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro $P_o(x_o;y_o)$: $y-y_o=m(x-x_o)$

(2) Si trova l'equazione di secondo grado in x che è la risolvente il sistema:

$$\begin{cases} y-y_o=m(x-x_o) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

(2) Si impone la condizione di tangenza annullando il delta dell'equazione $B^2-4AC=0$ e si ottiene una equazione di secondo grado in m, cioè una equazione del tipo: $pm^2+qm+r=0$ le cui soluzioni m_1 ed m_2 sostituite nella ci consentono di calcolare le equazioni richieste.

Retta tangente all'ellisse in un suo punto

In questo caso è più conveniente applicare la regola degli sdoppiamenti mediante le sostituzioni $x^2 \to x_o x$ $y^2 \to y_o y$

$\frac{x_o}{a}x+\frac{y_o}{b}=1$ è l'equazione della tangente richiesta

Equazioni parametriche dell'ellisse

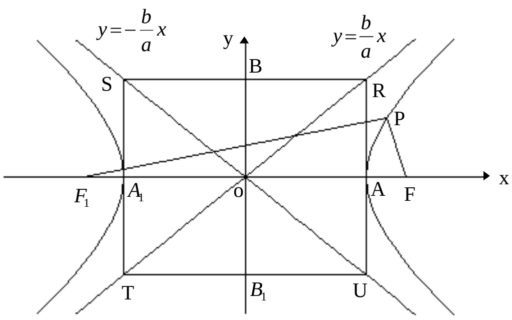
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\vartheta = a \cdot \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b \cdot \sin\vartheta = b \cdot \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

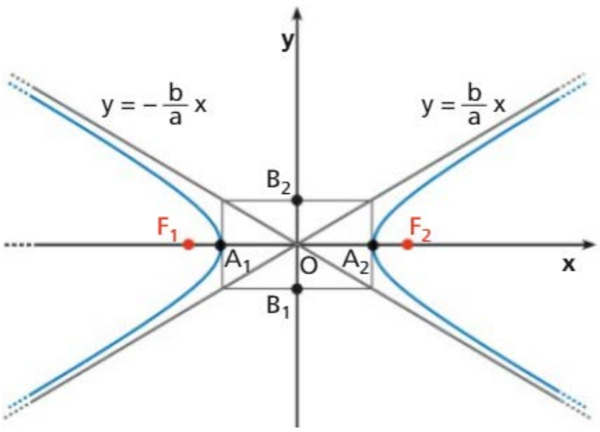
Iperbole

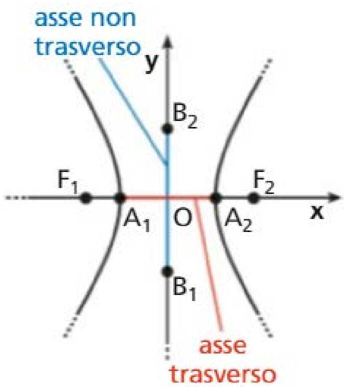
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $A(a;0)$ $A_1(-a;0)$ **vertici reali dell'iperbole** $B(0;b)$ $B_1(0;-b)$ **vertici ideali**

$F(c;0)$ $F_1(-c;0)$ **fuochi dell'iperbole** $c^2 - a^2 = b^2$ $c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$y = \pm \frac{b}{a} x$ **asintoti dell'iperbole**

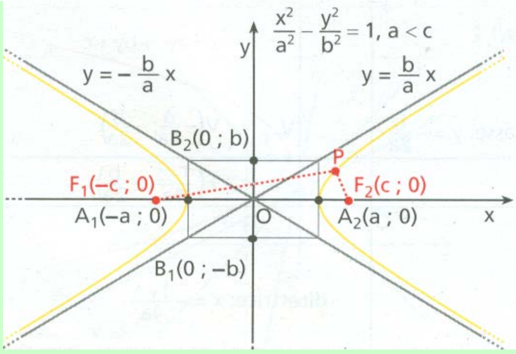






$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1$ eccentricità dell'iperbole.

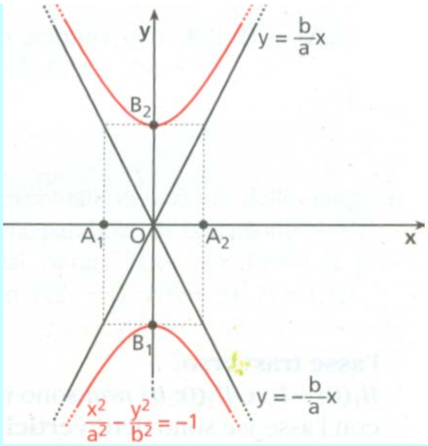
$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{c}{e^2}$ sono le direttrici dell'iperbole e sono ad essa esterne.



Iperbole con i fuochi sull’asse delle x :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$A_2(a,0)\quad A_1(-a,0)\quad F_2(c,0)\quad F_1(-c,0)$$



Iperbole con i fuochi sull’asse delle y :

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

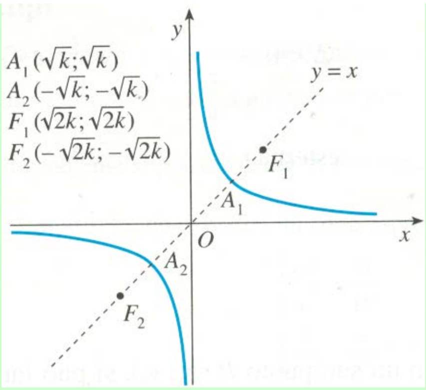
Iperbole equilatera

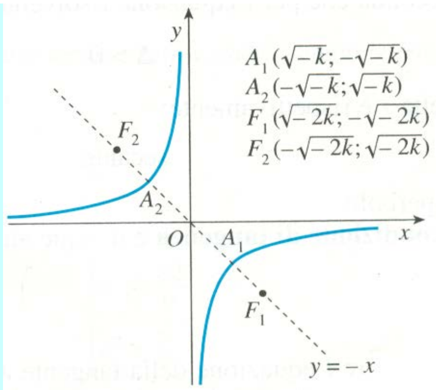
Se $a=b$ l’iperbole si dice equilatera e la sua equazione diventa: $\mathbf{x^2-y^2=a^2}$ [3]

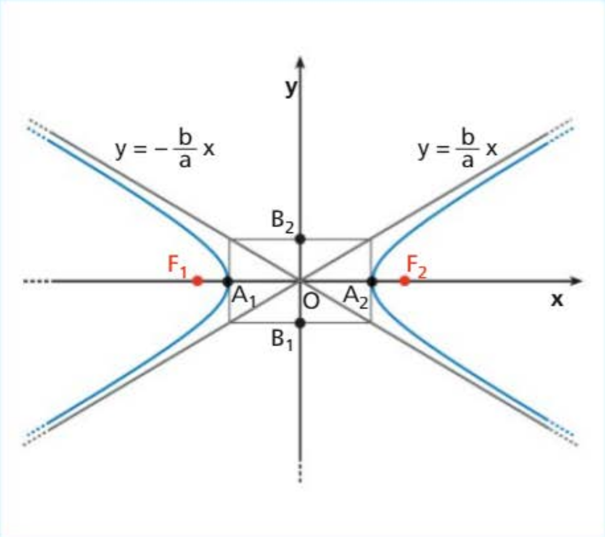
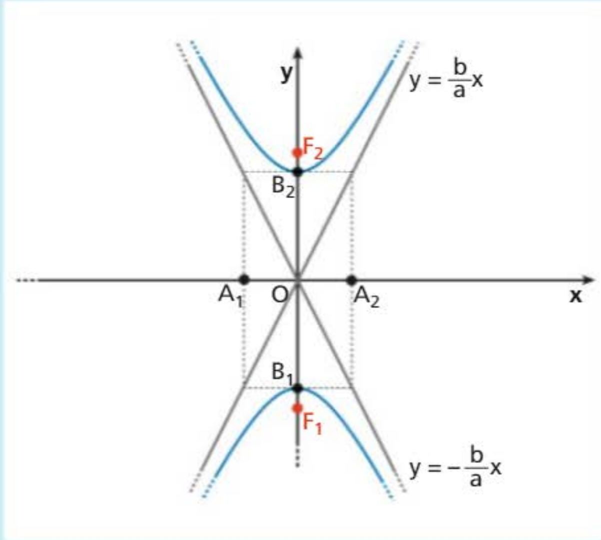
I suoi asintoti, che hanno equazioni $\mathbf{y=\pm x}$, sono le bisettrici degli assi cartesiani e risultano fra loro perpendicolari. $e=\frac{\sqrt{2a^2}}{a}=\sqrt{2}\quad c^2=2a^2\quad \mathbf{c=a\sqrt{2}}$

Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti

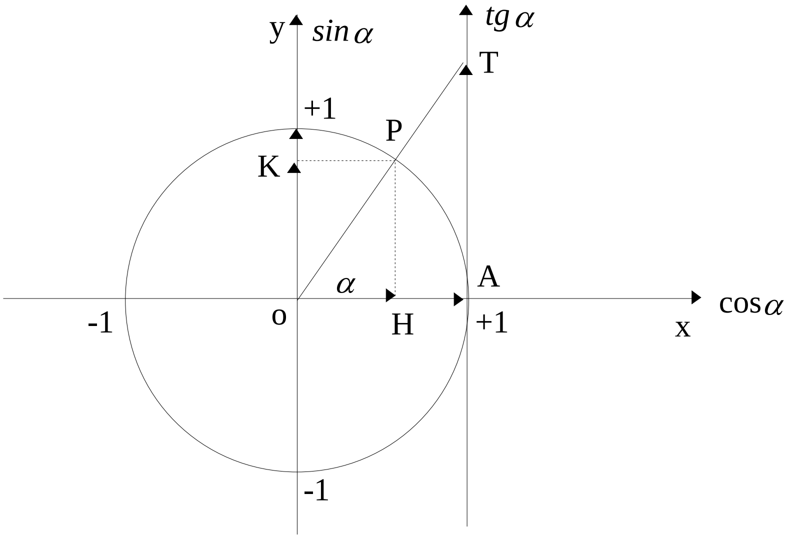
$$\mathbf{xy}=\text{costante}=\mathbf{k}$$





Iperbole con i fuochi sull'asse *x*	Iperbole con i fuochi sull'asse *y*
	
Equazione: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.	**Equazione**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.
Asintoti: $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$.	**Asintoti**: $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$.
Fuochi: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.	**Fuochi**: $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Eccentricità: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.	**Eccentricità**: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$.

Trigonometria



$$x_P = \frac{OH}{OA} = \frac{PK}{OA} = \cos\alpha \qquad y_P = \frac{HP}{OA} = \frac{OK}{OA} = \sin\alpha \qquad y_T = \frac{AT}{OA} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

$$\boxed{\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha} \quad \boxed{\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha} \quad \boxed{\mathrm{tg}(k\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha} \quad \boxed{\cot g(k\pi + \alpha) = \cot g\,\alpha}$$

$k \in Z$ cioè : $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4 \cdots\cdots$

Alcune relazioni fra le varie funzioni goniometriche o circolari

Fra le sei funzioni circolari $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{cotg}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\mathrm{cosec}\,\alpha$ sussistono le cinque seguenti identità tra loro indipendenti:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{cosec}\,a = \frac{1}{\sin a} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

valori di	in funzione di			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$	$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha}$
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$

Archi ed angoli associati

Definiamo **associati** dell'angolo α i seguenti angoli:

$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$90° \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$2\pi \pm \alpha$	$360° \pm \alpha$	$\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$

angoli supplementari	
secondo quadrante	
$sen(180^0 - \alpha) = sen\,\alpha$	$sen(\pi - \alpha) = sen\,\alpha$
$cos(180^0 - \alpha) = -cos\,\alpha$	$cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha$
$tg(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$	$tg(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$
$ctg(180^0 - \alpha) = -ctg\,\alpha$	$ctg(\pi - \alpha) = -ctg\,\alpha$

angoli complementari	
primo quadrante	
$sen(90^0 - \alpha) = cos\,\alpha$	$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\,\alpha$
$cos(90^0 - \alpha) = sen\,\alpha$	$cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\,\alpha$
$tg(90^0 - \alpha) = ctg\,\alpha$	$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\,\alpha$
$ctg(90^0 - \alpha) = tg\,\alpha$	$ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\,\alpha$

angoli che differiscono di un angolo piatto	
terzo quadrante	
$sen(180^0 + \alpha) = -sen\,\alpha$	$sen(\pi + \alpha) = -sen\,\alpha$
$cos(180^0 + \alpha) = -cos\,\alpha$	$cos(\pi + \alpha) = -cos\,\alpha$
$tg(180^0 + \alpha) = tg\,\alpha$	$tg(\pi + \alpha) = tg\,\alpha$
$ctg(180^0 + \alpha) = ctg\,\alpha$	$ctg(\pi + \alpha) = ctg\,\alpha$

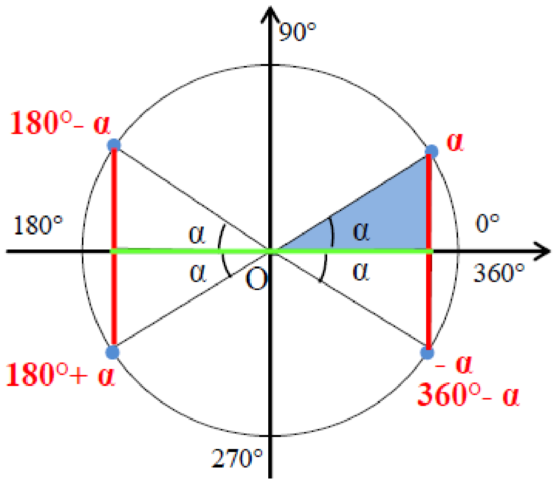
angoli che differiscono di un angolo retto	
secondo quadrante	
$sen(90^0 + \alpha) = cos\,\alpha$	$sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = cos\,\alpha$
$cos(90^0 + \alpha) = -sen\,\alpha$	$cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sen\,\alpha$
$tg(90^0 + \alpha) = -ctg\,\alpha$	$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg\,\alpha$
$ctg(90^0 + \alpha) = -tg\,\alpha$	$ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\,\alpha$

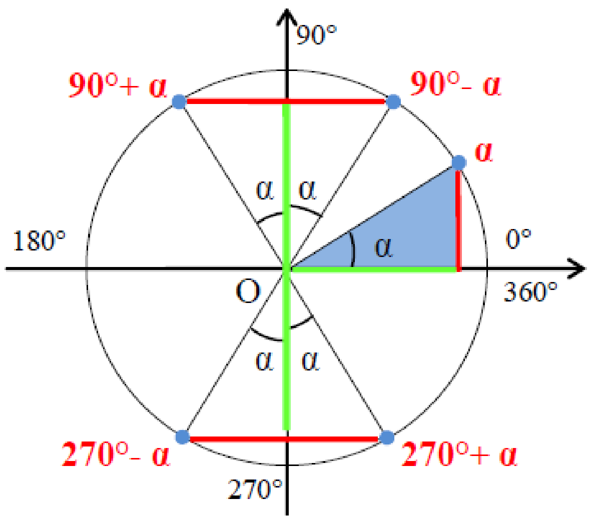
angoli esplementari	
quarto quadrante	
$sen(360^0 - \alpha) = -sen\,\alpha$	$sen(2\pi - \alpha) = -sen\,\alpha$
$cos(360^0 - \alpha) = cos\,\alpha$	$cos(2\pi - \alpha) = cos\,\alpha$
$tg(360^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$	$tg(2\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$
$ctg(360^0 - \alpha) = -ctg\,\alpha$	$ctg(2\pi - \alpha) = -ctg\,\alpha$

angoli la cui somma è 270°	
terzo quadrante	
$sen(270^0 - \alpha) = -cos\,\alpha$	$sen\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -cos\,\alpha$
$cos(270^0 - \alpha) = -sen\,\alpha$	$cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -sen\,\alpha$
$tg(270^0 - \alpha) = ctg\,\alpha$	$tg\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = ctg\,\alpha$
$ctg(270^0 - \alpha) = tg\,\alpha$	$ctg\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = tg\,\alpha$

angoli opposti	
quarto quadrante	
$sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$	$sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$
$cos(-\alpha) = cos\,\alpha$	$cos(-\alpha) = cos\,\alpha$
$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$	$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$
$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$	$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

angoli che differiscono di 270°	
quarto quadrante	
$sen(270^0 + \alpha) = -cos\,\alpha$	$sen\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -cos\,\alpha$
$cos(270^0 + \alpha) = sen\,\alpha$	$cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = sen\,\alpha$
$tg(270^0 + \alpha) = -ctg\,\alpha$	$tg\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -ctg\,\alpha$
$ctg(270^0 + \alpha) = -tg\,\alpha$	$ctg\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -tg\,\alpha$





Formule goniometriche

addizione e sottrazione	
$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta \pm sen\beta \cdot cos\alpha$	$tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$
$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sen\alpha \cdot sen\beta$	$ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$

duplicazione		
$sen2\alpha = 2sen\alpha \cdot cos\alpha$		$tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$
$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$	$cos2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$ $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$	$ctg2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

triplicazione	
$sen3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha$	$tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$
$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$	$ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$

bisezione	
$sen\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\alpha}{2}}$	$tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}} = \dfrac{sen\alpha}{1 + cos\alpha} = \dfrac{1 - cos\alpha}{sen\alpha}$
$cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\alpha}{2}}$	$ctg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\alpha}{1 - cos\alpha}} = \dfrac{sen\alpha}{1 - cos\alpha} = \dfrac{1 + cos\alpha}{sen\alpha}$

parametriche o razionali $\left(t = tg\frac{\alpha}{2}\right)$	
$sen\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$	$tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$
$cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$ctg\alpha = \frac{1-t^2}{2t}$

prostaferesi	
$sen\,p + sen\,q = 2\,sen\frac{p+q}{2}\cdot cos\frac{p-q}{2}$	$sen\,p - sen\,q = 2\,sen\frac{p-q}{2}\cdot cos\frac{p+q}{2}$
$cos\,p + cos\,q = 2\,cos\frac{p+q}{2}\cdot cos\frac{p-q}{2}$	$cos\,p - cos\,q = -2\,sen\frac{p+q}{2}\cdot sen\frac{p-q}{2}$

Werner	
$sen\alpha\cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]$	$sen\beta\cdot cos\alpha = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)]$
$cos\alpha\cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)]$	$sen\alpha\cdot sen\beta = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)]$

Equazioni goniometriche elementari

$\mathbf{\cos x = m}$ con $-1 \le m \le +1 \Rightarrow \mathbf{x = \pm\alpha + k\,360°}$ $\mathbf{x = \pm\alpha + 2k\pi}$ $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\cdots\cdots$

dove α è l'ampiezza del più piccolo angolo positivo il cui coseno è **m.**

CASI PARTICOLARI

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)90°$ oppure $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = k\,360°$ oppure $x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)180°$ oppure $x = (2k+1)\pi$

$\mathbf{\sin x = \ell}$ [2] con $-1 \le \ell \le +1$

Se α è l'ampiezza del più piccolo angolo positivo il cui seno è ℓ, le soluzioni dell'equazione [2] ci vengono fornite dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} \mathbf{x = \alpha + k\,360°} \\ \mathbf{x = 180° - \alpha + k360°} \end{cases} \text{[3] oppure } \begin{cases} \mathbf{x = \alpha + 2k\pi} \\ \mathbf{x = \pi - \alpha + 2k\pi} \end{cases} \text{[4]} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\cdots\cdots$$

Le formule [3] e [4] possono essere scritte in forma compatta nella seguente maniera:

[5] $\mathbf{x = (-1)^h \cdot \alpha + h\pi}$ con $h = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\cdots\cdots$

CASI PARTICOLARI

$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k180° \quad$ oppure $\quad x = k\pi$

$\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = (4k + 1)90° \quad$ oppure $\quad x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = (4k - 1)90° \quad$ oppure $\quad x = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$

Le soluzioni dell'equazione goniometrica $\mathbf{tg\,x = p}$ con $p \in R$ sono:

$\mathbf{x = \alpha + k\pi}$ $\quad$ $\mathbf{x = \alpha + k180°}$ $\quad$ oppure $\quad$ con $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \cdots\cdots$ $\quad$ e

$0° \leq \alpha \leq 180° \quad (\ \alpha \neq 90°\ ) \quad -90° < \alpha < 90°$

Risoluzione di semplici equazioni goniometriche

Le equazioni goniometriche del tipo:

$$\mathbf{a\sin^2 x + b\sin x + c = 0} \qquad \mathbf{a\cos^2 x + b\cos x + c = 0} \qquad \mathbf{a\,tg^2 x + b\,tg\,x + c = 0}$$

si risolvono ponendo rispettivamente: $\quad \sin x = y \quad , \quad \cos x = y \quad , \quad tg\,x = y$

Si ottiene l'equazione di secondo grado $\mathbf{a y^2 + b y + c = 0}$ che ha come radici i numeri: $y_1 \ ,\ y_2$

Le equazioni goniometriche date si trasformano nelle seguenti equazioni goniometriche elementari:

$$\sin x = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} \quad , \quad \cos x = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} \quad , \quad tg\,x = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}$$

Equazione lineare in seno e coseno

$$\mathbf{a\sin x + b\cos x + c = 0}$$

(1) Si applicano le formule parametriche: $\quad \sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos x = \dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$

Si ottiene: $\quad \mathbf{(c - b)\,tg^2\frac{x}{2} + 2a\,tg\frac{x}{2} + b + c = 0} \qquad$ [*]

Se $\boxed{b = c}$, allora alle soluzioni dell'equazione [*] bisogna aggiungere le soluzioni:

$$x = (2k + 1)\pi \qquad \text{oppure} \qquad x = (2k + 1)180°$$

(2) Basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} a\sin x + b\cos x + c = 0 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ [*]

Le soluzioni dell'equazione [*] coincidono con le soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \sin x = \ell_1 \\ \cos x = m_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = \ell_2 \\ \cos x = m_2 \end{cases}$$

(3) Metodo dell'angolo ausiliario

$a\sin x + b\cos x + c = 0$, $\sin x + \frac{b}{a}\cdot\cos x = -\frac{c}{a}$ Ponendo: $tg\,\vartheta = \frac{b}{a}$ otteniamo:

$$\sin(x+\vartheta) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

oppure: $\cos x + \frac{a}{b}\cdot\sin x = -\frac{c}{b}$ Ponendo $tg\,\vartheta = \frac{a}{b}$ otteniamo:

$$\cos(x-\beta) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(4) $\boxed{c = 0}$ $a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = 0 \Rightarrow a\,tg\,x + b = 0 \Rightarrow tg\,x = -\frac{b}{a}$

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

Sono equazioni riconducibili alla seguente forma: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$

(1) Si divide ambo i membri per $\cos^2 x$ e si ottiene: $a\,tg^2 x + b\,tg\,x + c = 0$

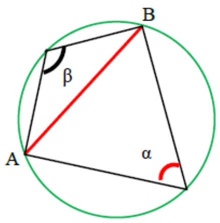
(2) Ricordando che: $2\sin x\cos x = \sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

otteniamo l'equazione lineare: $(c-a)\cos 2x + b\sin 2x + a + c = 0$

(3) L 'equazione $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ diventa, se moltiplichiamo **d** per $\sin^2 x + \cos^2 x$, una **omogenea pura**: $(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0$

Teoremi sui triangoli

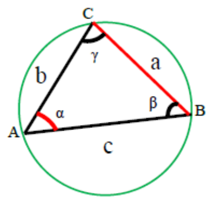
teorema della corda



in una circonferenza la lunghezza di una corda è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda:

$$\overline{AB} = 2\,r\,sen\,\alpha \quad \text{oppure} \quad \overline{AB} = 2\,r\,sen\,\beta$$

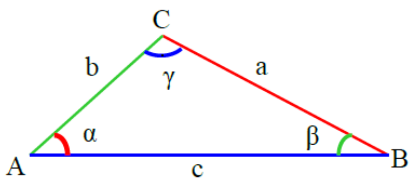
corollario



per il teorema della corda, in un triangolo il rapporto tra un lato (inteso come corda) e il seno dell'angolo opposto è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = 2r$$

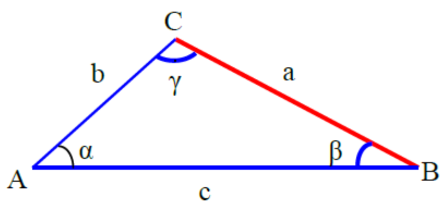
teorema dei seni o di Eulero



in un triangolo ogni lato è direttamente proporzionale al seno dell'angolo opposto:

$$a : sen\,\alpha = b : sen\,\beta$$
$$a : sen\,\alpha = c : sen\,\gamma$$
$$b : sen\,\beta = c : sen\,\gamma$$

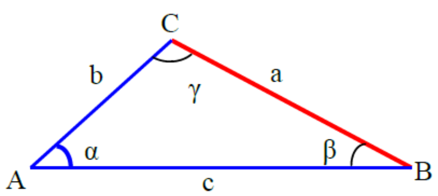
teorema delle proiezioni



in un triangolo un lato è uguale alla somma dei prodotti degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ogni lato forma con il primo:

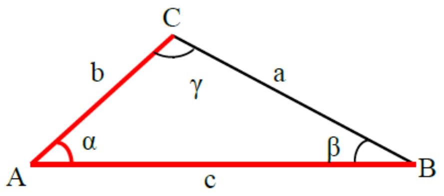
$$a = b \cdot cos\,\gamma + c \cdot cos\,\beta$$
$$b = a \cdot cos\,\gamma + c \cdot cos\,\alpha$$
$$c = a \cdot cos\,\beta + b \cdot cos\,\alpha$$

teorema del coseno o di Carnot



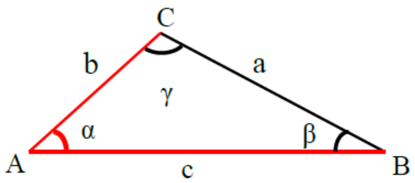
in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto dei due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma$$

area di un triangolo		
	l'area di un triangolo è uguale al prodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso diviso due	
	$\mathcal{A} = \dfrac{b \cdot c \cdot sen\,\alpha}{2}$	$\mathcal{A} = \dfrac{a \cdot c \cdot sen\,\beta}{2}$ $\mathcal{A} = \dfrac{a \cdot b \cdot sen\,\gamma}{2}$

Formule di trigonometria

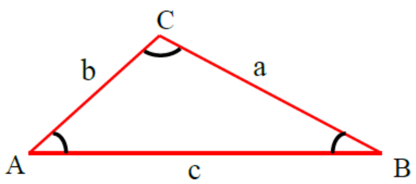
formule di Briggs



dato un triangolo qualsiasi di cui siano note le misure dei lati **a**, **b**, **c** e il **semiperimetro p**, i seni, i coseni, le tangenti e le cotangenti delle semiampiezze degli angoli sono espresse dalle seguenti relazioni:

$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$	$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$	$ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$
$sen\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$	$cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$	$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$	$ctg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}$
$sen\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$	$cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$	$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$	$ctg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$

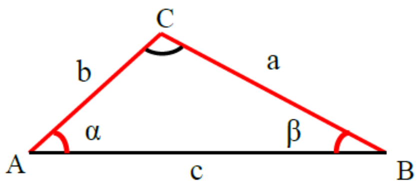
formula di Erone



l'area di un triangolo qualsiasi si esprime in funzione delle lunghezze dei lati **a, b, c** e del **semiperimetro p** come:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

teorema delle tangenti o di Nepero

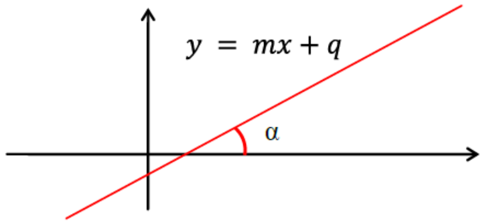


$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$$

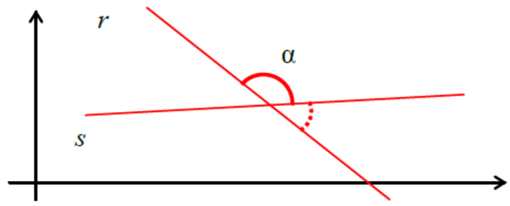
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{tg\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

applicazioni della trigonometria alla geometria analitica



significato del coefficiente angolare m di una retta di equazione in forma esplicita $y = mx + q$

$$m = tg\ \alpha$$

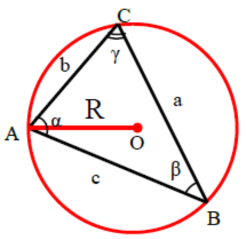


tangente dell'angolo formato da due rette r ed s di coefficiente angolare m_r ed m_s

$$tg\ \alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

se α è **acuto** la tangente è **positiva**
se α è **ottuso** la tangente è **negativa**

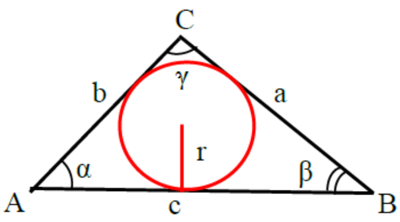
applicazioni della trigonometria alla geometria



raggio R della circonferenza circoscritta ad un triangolo

$$R = \frac{a}{2sen\ \alpha} = \frac{b}{2sen\ \beta} = \frac{c}{2sen\ \gamma}$$

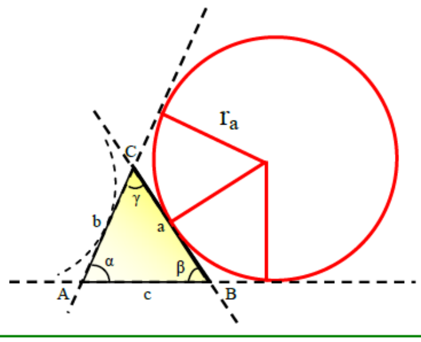
oppure $R = \dfrac{abc}{4\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$ = area del triangolo



raggio r della circonferenza inscritta in un triangolo

$$r = (p-a)tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = (p-b)tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = (p-c)tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

oppure $r = \dfrac{\mathcal{A}}{p}$ $\mathcal{A}$ = area del triangolo
p = **semiperimetro** del triangolo



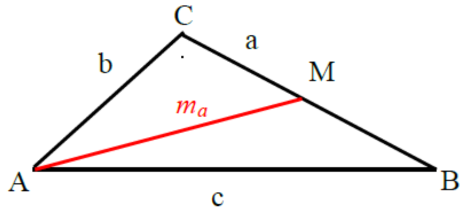
raggio delle circonferenze ex-inscritte ad un triangolo
(cioè tangenti a un suo lato e ai prolungamenti degli altri due)

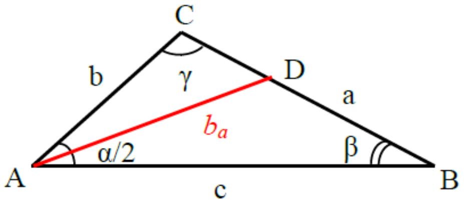
$r_a = p\ tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ oppure $r_a = \frac{\mathcal{A}}{p-a}$

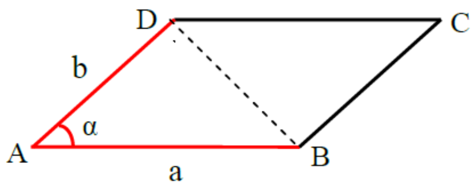
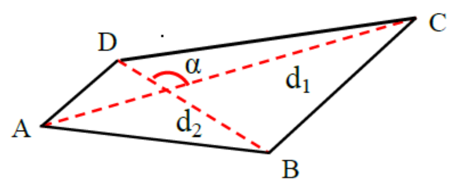
$r_b = p\ tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$ oppure $r_b = \frac{\mathcal{A}}{p-b}$

$r_c = p\ tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ oppure $r_c = \frac{\mathcal{A}}{p-c}$

$\mathcal{A}$ = area del triangolo p = **semiperimetro** del triangolo

	mediane di un triangolo
	$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

	bisettrici di un triangolo	
	$b_\alpha = \frac{2bc\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{b+c}$	$b_\beta = \frac{2ac\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{a+c}$ $b_\gamma = \frac{2ab\ \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{a+b}$

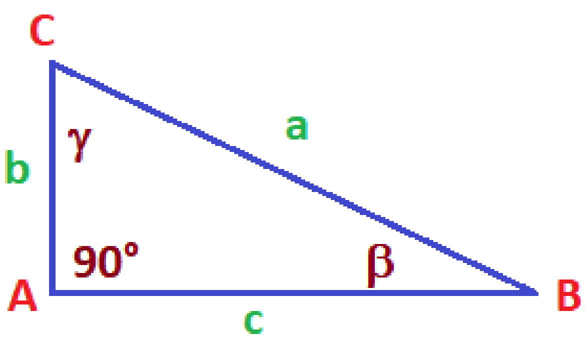
area di un parallelogramma	area di un quadrilatero
	
$\mathcal{A} = ab\ sen\ \alpha$	$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ d_1 d_2\ sen\ \alpha$

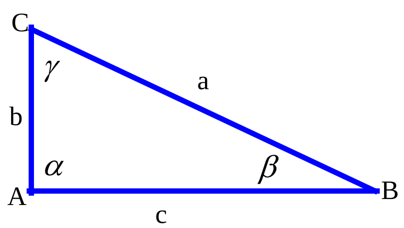
Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo

In un triangolo rettangolo ogni cateto è uguale:

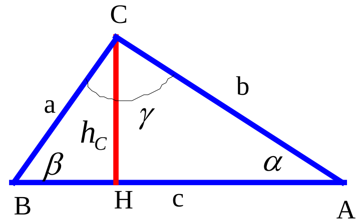
- al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente
- al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto o per la cotangente dell'angolo adiacente. In formule abbiamo:

$c = a \sin\gamma = a \cos\beta$ $\quad b = a \sin\beta = a \cos\gamma$ $\quad c = b\, tg\,\gamma = b\, cotg\,\gamma$ $\quad b = c\, tg\beta = b\, cotg\alpha$





Area di un triangolo



Area del triangolo in funzione di due lati e dell'angolo fra essi compreso. L'area S di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso .

$$S = \frac{1}{2} a c \sin\beta = \frac{1}{2} a b \sin\gamma = \frac{1}{2} b c \sin\alpha$$

Area di un triangolo in funzione di un lato e dei tre angoli .

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Area di un triangolo in funzione di un lato e dei suoi angoli adiacenti

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Area di un triangolo in funzione del semiperimetro p e degli angoli $S = p^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2}$

Area del triangolo in funzione degli angoli e del raggio R della circonferenza circoscritta

$$S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

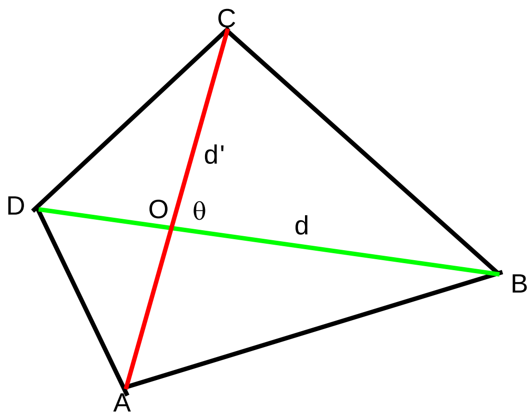
Area di un triangolo in funzione dei tre lati : formula di **Erone** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Area del triangolo in funzione dei lati e del raggio R della circonferenza circoscritta $S = \frac{abc}{4R}$

Area di un quadrilatero qualsiasi

L'area di un quadrilatero convesso è uguale al semiprodotto delle misure delle due diagonali per il seno di uno degli angoli che esse formano.

$$S = \frac{1}{2} d \cdot d' \cdot \sin\vartheta$$



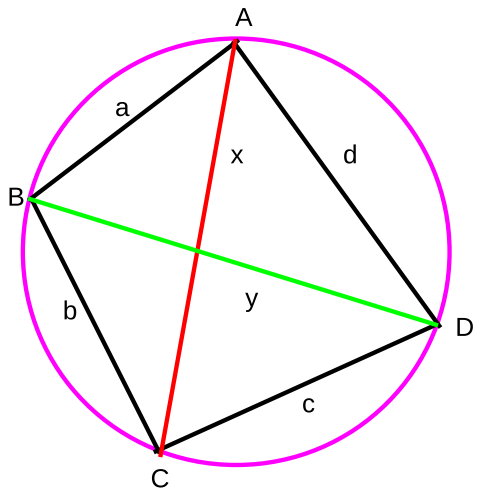
Area del parallelogrammo

$$S = ab\sin\vartheta$$

Quadrilatero inscritto in una circonferenza

Teorema di TOLOMEO

In un quadrilatero convesso inscrivibile in una circonferenza, il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma delle misure dei prodotti dei lati opposti $xy = ac + bd$



AB = b
BC = b
CD = c
DA = d
AC = x
BD = y

Teorema di LEGENDRE

$$\frac{x}{y} = \frac{bc + ad}{cd + ab} \qquad S = \frac{1}{2}(ad + bc)\sin\alpha$$

Formula di BRAHAMAGUPTA

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad p = a + b + c + d$$

Se il quadrilatero ABCD oltre ad essere inscritto in una circonferenza è anche circoscritto ad una seconda circonferenza , allora l'area della sua superficie si ottiene applicando la seguente formula :

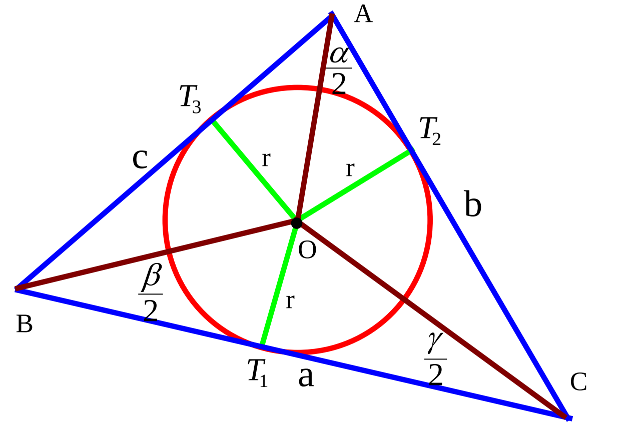
$$S = \sqrt{abcd}$$

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

$$S = rp \qquad p = \frac{R}{r} \qquad r = \frac{S}{p}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

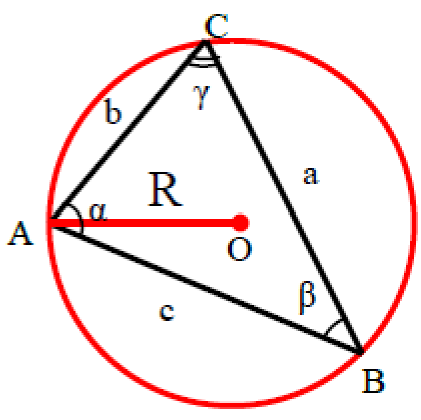
$$r = (p-b)\cdot tg\frac{\beta}{2} = (p-c)\cdot tg\frac{\gamma}{2}$$

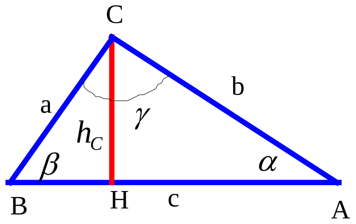


$a = r\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$	$r = \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot a$
$b = r\cdot\dfrac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$	$r = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot b$
$c = r\cdot\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$	$r = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot c$

Area del triangolo in funzione degli angoli e del raggio R della circonferenza circoscritta

$$S(ABC) = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$





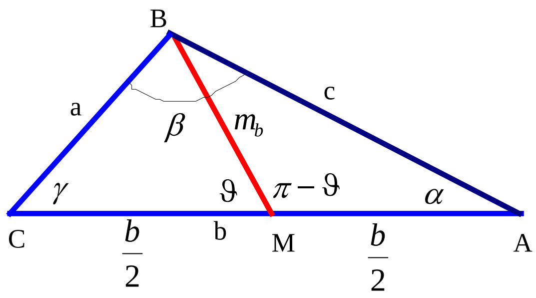
Altezze di un triangolo

Altezze di un triangolo in funzione dei lati e dell'angolo opposto al lato a cui è relativa:

$$h_a = \frac{bc}{a}\sin\alpha \quad h_b = \frac{ac}{b}\sin\beta \quad h_c = \frac{ab}{c}\sin\gamma$$

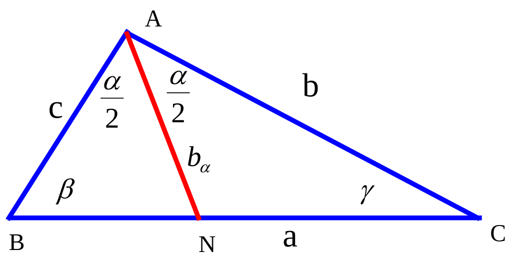
Altezze di un triangolo in funzione del lato a cui è relativa e dei tre angoli:

$$h_a = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad h_b = \frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta} \qquad h_c = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$



Mediane di un triangolo

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \quad , \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \quad , \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$



Bisettrici di un triangolo

Bisettrici degli angoli interni di un triangolo in funzione dell'angolo (rispetto al quale si calcola la bisettrice) e dei due lati che lo individuano :

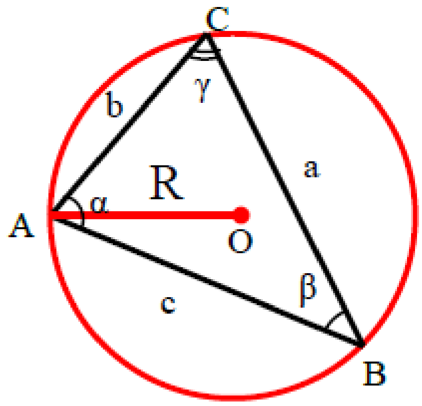
$$b_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2} \quad b_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2} \quad b_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Bisettrici degli angoli interni di un triangolo in funzione dei lati

$$b_\alpha = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} \quad b_\beta = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c} \quad b_\gamma = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$$

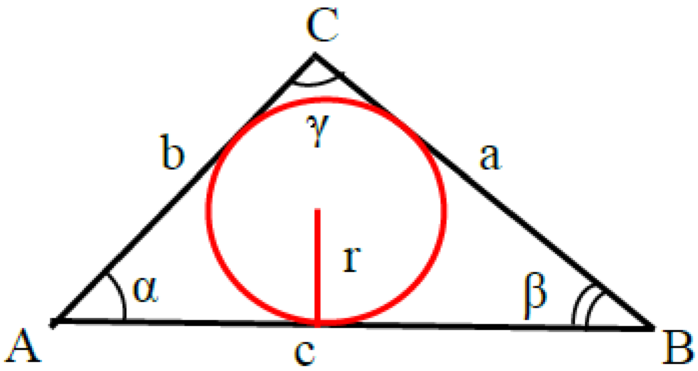
Raggio ella circonferenza circoscritta ad un triangolo

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4S}$$



Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

$$r = (p-a)\,tg\frac{\alpha}{2} = (p-b)\,tg\frac{\beta}{2} = (p-c)\,tg\frac{\gamma}{2} = \frac{S}{p}$$

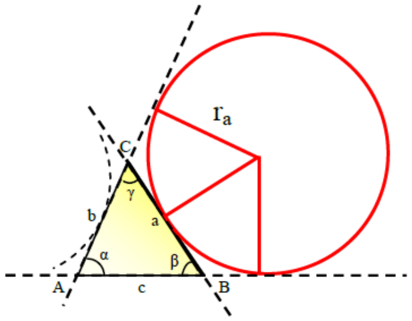


$$r = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Raggi delle circonferenze ex-inscritte ad un triangolo

Dicesi circonferenza **ex-inscritta** ad un triangolo la circonferenza tangente ad un lato del triangolo ed ai prolungamenti degli altri due lati . Dicesi **ex-incentro** (centro della circonferenza **ex-inscritta**) l'intersezione della bisettrice di un angolo interno con le bisettrici degli angoli esterni relativi agli altri due vertici

$$r_a = \frac{S}{p-a} \quad , \quad r_b = \frac{S}{p-b} \quad , \quad r_c = \frac{S}{p-c} \qquad r_a = p\,tg\frac{\alpha}{2} \quad , \quad r_b = p\,tg\frac{\beta}{2} \quad , \quad r_c = p\,tg\frac{\gamma}{2}$$



raggio delle circonferenze ex-inscritte ad un triangolo
(cioè tangenti a un suo lato e ai prolungamenti degli altri due)

$r_a = p\,tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ oppure $r_a = \frac{\mathcal{A}}{p-a}$

$r_b = p\,tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$ oppure $r_b = \frac{\mathcal{A}}{p-b}$

$r_c = p\,tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ oppure $r_c = \frac{\mathcal{A}}{p-c}$

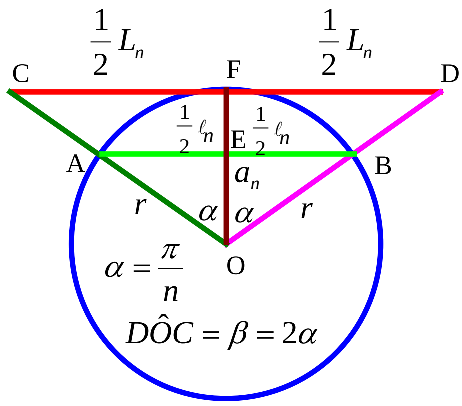
$\mathcal{A}$ = area del triangolo   p = **semiperimetro** del triangolo

Perimetri ed aree dei poligoni regolari

Indichiamo con ℓ_n, p_n ed s_n rispettivamente il lato, l'apotema, il perimetro e l'area di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza σ di raggio r, e con L_n, P_n, S_n rispettivamente il lato, il perimetro e l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a σ.

$A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow A\hat{O}E = A\hat{O}F = \frac{\pi}{n}$	$\mathbf{a_n = r\cdot\cos\frac{\pi}{n}}$
$\mathbf{L_n = 2r\cdot tg\frac{\pi}{n}}$	$\mathbf{p_n = 2nr\cdot\sin\frac{\pi}{n}}$

$\mathbf{s_n = \frac{1}{2}p_n\,a_n = nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}}$	$\mathbf{P_n = 2nr\,tg\frac{\pi}{n}}$	$\mathbf{S_n = \frac{1}{2}P_n\,r = nr^2\,tg\frac{\pi}{n}}$



Essendo inoltre: $\mathbf{a_n = \frac{1}{2}\ell_n\,cotg\frac{\pi}{n}}$

abbiamo: $\mathbf{S_n = \frac{1}{4}n\,\ell_n^2\,cotg\frac{\pi}{n}}$

Agli n lati del poligono regolare (inscritto e circoscritto alla circonferenza di raggio r) corrispondono n angoli al centro fra loro uguali. Ciascuno di questi angoli al centro è l'ennesima parte dell'angolo giro che misura 2π radianti. $C\hat{O}D = \beta = \frac{2\pi}{n}$ $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{n}$

$EB = \frac{\ell_n}{2} = r\cdot\sin\alpha\cdot = r\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ $\mathbf{AB = l_n = 2r\cdot\sin\frac{\pi}{n}}$ $FD = \frac{1}{2}L_n = r\cdot tg\,\alpha = r\cdot tg\frac{\pi}{n}$

$\mathbf{CD = 2FD = 2r\cdot tg\frac{\pi}{n}}$ $\mathbf{FO = r}$ $\mathbf{s_n = \frac{1}{2}n\cdot r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}$ $\mathbf{S_n = n\cdot r^2\cdot tg\frac{\pi}{n}}$

N.B. L'area di un poligono regolare è uguale a: $\mathbf{\frac{perimetro \times apotema}{2}}$

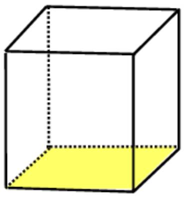
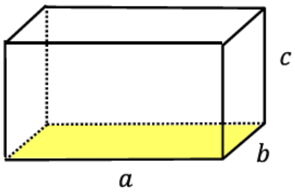
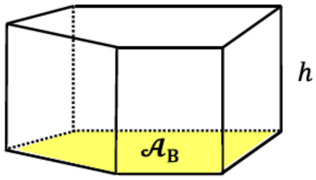
Arco		seno	coseno	tangente	cotangente
0°	**0**	**0**	**1**	**0**	∞
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
67°30'	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
81°	$\frac{9}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

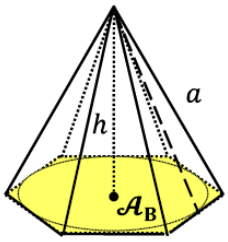
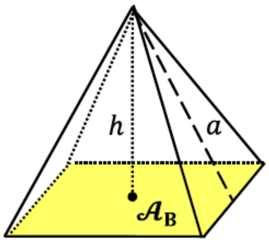
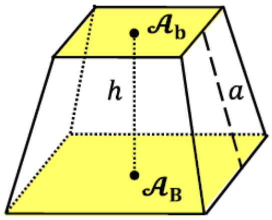
Arco		seno	coseno	tangente	cotangente
99°	$\frac{11}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4}{\sqrt{5}-1}$
105°	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$
108°	$\frac{3}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
112°30’	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
126°	$\frac{7}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	- 1	- 1
144°	$\frac{4}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$
150	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
157°30’	$\frac{7}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$
162°	$\frac{9}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
165°	$\frac{11}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$
171°	$\frac{9}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
180°	π	0	-1	0	∞
189°	$\frac{21}{20}\pi$	$-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

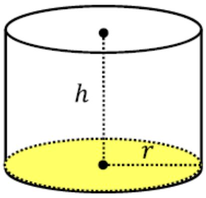
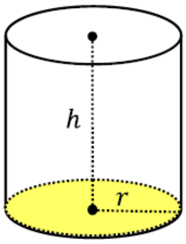
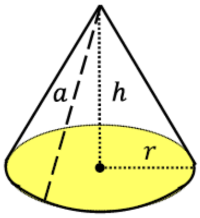
Arco		seno	coseno	tangente	cotangente
195°	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
198°	$\frac{11}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
202°30’	$\frac{9}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
216°	$\frac{6}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
234°	$\frac{13}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
247°30’	$\frac{11}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
252°	$\frac{7}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
255°	$\frac{17}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
261°	$\frac{29}{20}\pi$	$-\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	∞	0
279°	$\frac{31}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-4}{\sqrt{5}-1}$
285°	$\frac{19}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$

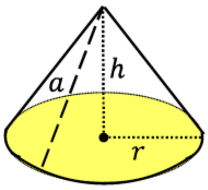
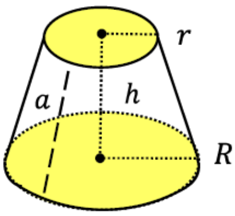
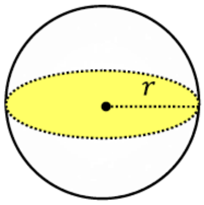
Arco		seno	coseno	tangente	cotangente
288°	$\frac{8}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	- $-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
292°30'	$\frac{13}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$
300°	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
306°	$\frac{17}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	- 1	- 1
324°	$\frac{9}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$
330°	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
337°30'	$\frac{15}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$
342°	$\frac{19}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
345°	$\frac{23}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$
360°	2π	0	1	0	∞

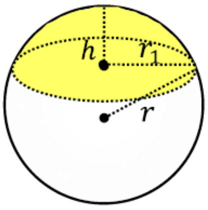
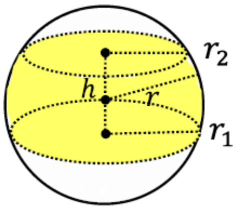
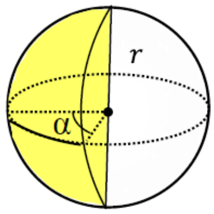
Volumi V e superfici S delle principali figure solide

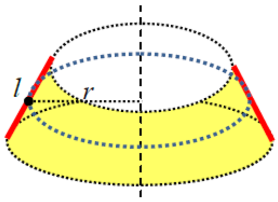
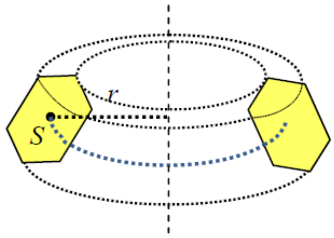
cubo		parallelepipedo rettangolo		prisma retto	
					
$\mathcal{V} = l^3$		$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$		$\mathcal{V} = \mathcal{A}_B \cdot h$	
$\mathcal{S}_B = 2l^2$	$\mathcal{S}_L = 4l^2$	$\mathcal{S}_B = 2ab$	$\mathcal{S}_L = 2(a+b)c$	$\mathcal{S}_B = 2\,\mathcal{A}_B$	$\mathcal{S}_L = perimetro\ di\ base \cdot h$

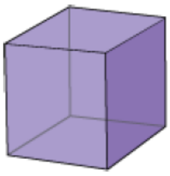
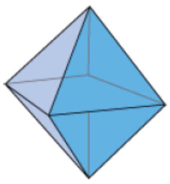
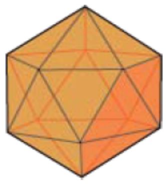
piramide retta a base regolare		piramide retta		tronco di piramide	
					
$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_B \cdot h}{3}$		$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_B \cdot h}{3}$		$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}h\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B\mathcal{A}_b}\right)$	
$\mathcal{S}_B = \mathcal{A}_B$	$\mathcal{S}_L = \dfrac{perimetro\ di\ base \cdot a}{2}$	$\mathcal{S}_B = \mathcal{A}_B$	$\mathcal{S}_L =$ *somma aree facce laterali*	$\mathcal{S}_B = \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$	$\mathcal{S}_L =$ *somma aree facce laterali*

cilindro		cilindro equilatero ($h = 2r$)		cono	
					
$\mathcal{V} = \pi\, r^2 \cdot h$		$\mathcal{V} = 2\,\pi\, r^3$		$\mathcal{V} = \dfrac{\pi\, r^2 \cdot h}{3}$	
$\mathcal{S}_B = 2\,\pi\, r^2$	$\mathcal{S}_L = 2\,\pi\, r\, h$	$\mathcal{S}_B = 2\,\pi\, r^2$	$\mathcal{S}_L = 4\,\pi\, r^2$	$\mathcal{S}_B = \pi\, r^2$	$\mathcal{S}_L = \pi\, r\, a$

cono equilatero ($a = 2r \quad h = \sqrt{3}\,r$)		tronco di cono		sfera	
					
$\mathcal{V} = \dfrac{\pi\, r^2 \cdot h}{3}$		$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi\, h(R^2 + r^2 + Rr)$		$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$	
$\mathcal{S}_B = \pi\, r^2$	$\mathcal{S}_L = 2\,\pi\, r^2$	$\mathcal{S}_B = \pi R^2 + \pi\, r^2$	$\mathcal{S}_L = \pi(r+R)a$	$\mathcal{S} = 4\,\pi\, r^2$	

segmento sferico ad 1 base	segmento sferico a 2 basi	spicchio sferico
		
$\mathcal{V} = \frac{h}{2}\pi r_1^2 + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$	$\mathcal{V} = \frac{h\pi}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$	$\mathcal{V} = \frac{\alpha^\circ}{270^\circ}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 \alpha_{rad}$
$\mathcal{S} = 2\pi r h$	$\mathcal{S} = 2\pi r h$	$\mathcal{S} = \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi r^2 = 2\pi r^2 \alpha_{rad}$

1^0 teorema di Guldino	2^0 teorema di Guldino
la **superficie** generata da una linea (o da un poligono) in rotazione intorno ad un asse è uguale al prodotto della circonferenza descritta dal suo baricentro per la sua lunghezza (o perimetro)	il **volume** generato da una superficie in rotazione intorno ad un asse è uguale al prodotto della circonferenza descritta dal suo baricentro per la sua superficie
	
$\mathcal{S} = 2\pi r l$	$\mathcal{V} = 2\pi r S$

solidi platonici o poliedri regolari				
I solidi platonici sono quei solidi le cui facce, tutte uguali tra loro, sono formate da poligoni regolari e tali che in ogni vertice concorrono lo stesso numero di spigoli. Sono solo cinque:				
tetraedro 4 triangoli equilateri	*esaedro (cubo)* 6 quadrati	*ottaedro* 8 triangoli equilateri	*dodecaedro* 12 pentagoni regolari	*icosaedro* 20 triangoli equilateri
				
Il volume dei solidi platonici si calcola moltiplicando il cubo dello spigolo per un numero caratteristico del solido:				
$\mathcal{V} = l^3 \cdot 0,117$	$\mathcal{V} = l^3$	$\mathcal{V} = l^3 \cdot 0,471$	$\mathcal{V} = l^3 \cdot 7,663$	$\mathcal{V} = l^3 \cdot 2,182$

formula di Eulero

Indicato con:

poliedro = solido dello spazio la cui frontiera è l'unione delle facce
faccia = figura piana che compone il poliedro
spigolo = segmento di incontro delle facce
vertice = punto di incontro degli spigoli

per tutti i poliedri vale la **formula di Eulero:** $\boldsymbol{Facce + Vertici - Spigoli = 2}$