Unità Didattica N°02

I concetti fondamentali dell'aritmetica

01) Il concetto di potenza

02) Proprietà delle potenze

03) La nozione di radice aritmetica

04) Multipli e divisori di un numero

05) Criteri di divisibilità per i numeri naturali

06) Numeri primi e numeri composti

07) Scomposizione di un numero in fattori primi

08) Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

09) Le frazioni

10) Operazioni con le frazioni

11) I numeri decimali e le loro frazioni generatrici

12) I numeri decimali periodici e le loro frazioni generatrici

13) Rapporti e proporzioni tra numeri

14) Teorema fondamentale delle proporzioni tra numeri

15) Altre proprietà delle proporzioni fra numeri

16) Calcolo del termine incognito di una proporzione

17) Problemi del tre semplice

Il concetto di potenza

La potenza di un numero è il prodotto di più fattori uguali a quel numero.

Il fattore che si ripete si chiama **base della potenza** ed il numero di fattori uguali prende il nome di **esponente della potenza**. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n\ volte}$

L'operazione mediante la quale si calcola la potenza di un numero prende il nome di **elevazione a potenza**.

- La potenza con esponente zero di un numero qualsiasi diverso da zero è sempre uguale ad 1 :

$$a^0 = 1 \quad \forall\ a \neq 0$$

- La prima potenza (o potenza con esponente 1) di un qualsiasi numero è uguale al numero stesso

$$a^1 = a$$

Proprietà delle potenze

- **Il prodotto di due o più potenze aventi la stessa base è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti** $\mathbf{a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{n+p+q}}$

- **Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è la potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti** $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$

- **La potenza di una potenza è la potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti** $\mathbf{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$

- **La potenza di un prodotto di fattori è uguale al prodotto delle potenze con uguale esponente dei singoli fattori** $\mathbf{\left(a \cdot b \cdot c \cdot d\right)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n}$

- **La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze con uguale esponente del dividendo e del divisore** $\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

La nozione di radice aritmetica

- Si dice **radice quadrata** di un numero a il numero x che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato a. In simboli abbiamo: $\sqrt{a} = x \iff x^2 = a$ $\sqrt{9} = 3$ in quanto $3^2 = 9$
- Si dice **radice cubica** di un numero a il numero x che elevato al cubo dà come risultato il numero dato **a**. In simboli abbiamo: $\sqrt[3]{a} = x \iff x^3 = a$ $\sqrt[3]{125} = 5$ in quanto $5^3 = 125$
- Si dice **radice quarta** di un numero a il numero x che elevato alla quarta potenza dà come risultato il numero dato a. . In simboli abbiamo : $\sqrt[4]{a} = x \iff x^4 = a$
- Si dice **radice ennesima** di un numero a il numero x che elevato alla potenza ennesima dà come risultato il numero dato a. In simboli abbiamo: $\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$

Multipli e divisori di un numero

Si dice che il numero a è **divisore** del numero b (diverso da zero) se il resto della divisione del numero a per il numero b è uguale a zero. Il numero a si dice che è **multiplo** del numero b che a sua volta si dice **sottomultiplo** o **divisore** del numero a .

Definizione: dato il numero naturale a, tutti i numeri naturali b per i quali risulta che il quoziente $\frac{a}{b}=k\in N$ è un numero naturale, si chiamano **divisori del numero** a.

$\frac{a}{b}=k\in N \quad \Rightarrow \quad a=k\cdot b$. a è **multiplo** del numero b secondo il numero k , b è **sottomultiplo** del numero a secondo il numero k o **divisore del** numero a.

a = **dividendo** , b = **divisore** , k = **quoziente**

Criteri di divisibilità per i numeri naturali

01) Criterio di divisibilità per 2: Un numero è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è pari, cioè quando il numero termina con una delle seguenti cifre : 0 , 2 , 4 , 6 , 8 .

02) Criterio di divisibilità per 3: Un numero è divisibile per **3** se la somma delle sue cifre è divisibile per **3**

03) Criterio di divisibilità per 5: Un numero è divisibile per **5** se termina con **0** o con **5** .

04) Criterio di divisibilità per 9: Un numero è divisibile per **9** se la somma delle sue cifre è divisibile per **9**

05) Criterio di divisibilità per 11: Un numero è divisibile per **11** se è divisibile per **11** la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari.

06) Criterio di divisibilità per 7:

a) Un numero è divisibile per 7 , se è divisibile per 7 la somma delle sue decine e del quintuplo della sua cifra delle unità.

$\boxed{n = 693}$; 69 = numero delle decine del numero 693 [1]

$69 + 5\cdot 3 = 69 + 15 = 84$; $8 + 5\cdot 4 = 8 + 20 = 28$; $\frac{28}{7} = 4$

$\boxed{n = 15939}$; $1593 + 5\cdot 9 = 1593 + 45 = 1638$; $163 + 5\cdot 8 = 163 + 40 = 203$;

$20 + 5\cdot 3 = 20 + 15 = 35$; $\frac{35}{7} = 5$ $\boxed{n = 15939}$ $1593 + 5\cdot 9 = 1593 + 45 = 1638$

$163 + 5\cdot 8 = 163 + 40 = 203$ $20 + 5\cdot 3 = 20 + 15 = 35$ $35 : 7 = 5$

b) Un numero è divisibile per 7 , se è divisibile per 7 la differenza fra il numero sue decine (numero scritto senza la cifra delle unità) **ed il doppio della sua cifra delle unità .**

$\boxed{n = 693}$; $69 - 2\cdot 3 = 63$; $\frac{63}{7} = 9$; $\boxed{n = 15939}$ $1593 - 2\cdot 9 = 1593 - 18 = 1575$;

$157 - 2\cdot 5 = 157 - 10 = 147$; $14 - 2\cdot 7 = 14 - 14 = 0$; $\frac{0}{7} = 0$

$\boxed{n = 15939}$ $1593 - 2\cdot 9 = 1593 - 18 = 1575$ $157 - 2\cdot 5 = 157 - 10 = 147$ $14 - 14 = 0$

07) Criterio di divisibilità per 13:

Un numero è divisibile per 13 **se è divisibile per** 13 **la somma del numero che esprime le sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del quadruplo della sua cifra dell'unità** .

$n = 27027$ $2702 + 4\cdot 7 = 2730$ $273 + 4\cdot 0 = 273$ $27 + 4\cdot 3 = 27 + 12 = 30$ $39 : 13 = 3$

08) Criterio di divisibilità per 17:

a) Un numero è divisibile per 17 **se è divisibile per** 17 **la somma del doppio delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del settuplo della sua cifra dell'unità.**

$n = 9945$ $2\cdot 994 + 7\cdot 5 = 1988 + 35 = 2023$: $2\cdot 202 + 7\cdot 3 = 404 + 21 = 425$

---

[1] Per scrivere le decine di un numero basta scrivere lo stesso numero privato della cifra che rappresenta le unità

$2 \cdot 42 + 7 \cdot 5 = 84 + 35 = 119$ $2 \cdot 11 + 63 = 22 + 63 = 85$ $85 : 17 = 5$

b) Un numero è divisibile per 17 **se è divisibile per** 17 **la differenza tra il numero che esprime le sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **ed il quintuplo della cifra dell'unità .** $n = 9945$ $994 - 5 \cdot 5 = 994 - 25 = 969$; $96 - 5 \cdot 9 = 96 - 45 = 51$; $51 : 17 = 3$

09) Criterio di divisibilità per 19:

a) Un numero è divisibile per 19 **se è divisibile per** 19 **la somma del numero delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del doppio della sua cifra delle unità.** $n = 4864$ $486 + 2 \cdot 4 = 486 + 8 = 494$ $49 + 8 = 57$ $57 : 19 = 3$

10) Criterio di divisibilità per 23:

a) Un numero è divisibile per 23 **se è divisibile per** 23 **la somma del numero delle sue decine** (numero scritto senza la cifra delle unità) **e del settuplo della sua cifra delle unità.** $n = 5888$ $588 + 7 \cdot 8 = 644$ $64 + 7 \cdot 4 = 64 + 28 = 92$ $92 : 23 = 4$

Numeri primi e numeri composti

- Un numero maggiore di 1 si dice **primo** se è divisibile soltanto per se stesso e per l'unità.
- un numero non primo, cioè un numero che ammette altri divisori oltre se stesso e l'unità, si dice **numero composto**.

Scomposizione di un numero composto in fattori primi

Scomporre il numero composto a in fattori primi significa trovare tutti i numeri primi il cui prodotto è uguale al numero a.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

Principio fondamentale dell'aritmetica

Un **numero naturale composto** si può decomporre in fattori primi in una sola maniera.

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

- Il **massimo comune divisore** **(M.C.D.)** di due o più numeri è il maggiore dei loro divisori comuni.
- Per calcolare il **M.C.D.** di due o più numeri, col **metodo della scomposizione in fattori primi**, si decompongono i numeri dati in fattori primi e poi si moltiplicano fra loro i fattori primi comuni, presi una sola volta , con l'esponente più piccolo.

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \quad , \quad 840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad , \quad 1188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11 \qquad M.C.D.(540,840,1188) = 2^2 \cdot 3 = 12$

- Due numeri si dicono **primi fra loro** quando hanno come **M.C.D.** l'unità .
- Il **minimo comune multiplo** **(m.c.m.)** di due o più numeri è il più piccolo dei multipli comuni diversi da zero.
- Per calcolare il **m.c.m.** tra due o più numeri , col metodo della scomposizione in fattori primi , si decompongono in fattori primi i numeri dati e poi si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni , presi una sola volta, ciascuno col massimo esponente .

$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad , \quad 224 = 2^5 \cdot 7 \quad , \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad , \quad m.c.m.(220,224,360) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110 \cdot 880$

Le frazioni

- **Unità frazionaria** è una qualsiasi delle parti uguali in cui è stata divisa una grandezza considerata come **unità**.
- **Frazione** è l'insieme di più unità frazionarie.
- Il simbolo che rappresenta una frazione è costituito da due numeri interi separati da un tratto orizzontale detto **linea di frazione**. Il numero posto al di sotto della linea di frazione si chiama **denominatore** ed indica in quante parti uguali è stata divisa l'unità . Il numero posto al di sopra della linea di frazione si chiama **numeratore** ed indica quante di queste parti uguali sono state considerate.

Il numeratore ed il denominatore si dicono **termini della frazione**.

- *Una frazione rappresenta il quoziente tra due numeri interi.*
- Una **frazione** di dice **propria** se il numeratore è minore del denominatore. Una frazione propria è minore dell'unità.
- Una frazione si dice **apparente** se il numeratore è multiplo del denominatore . una frazione apparente rappresenta una o più unità intere.

- Una frazione di dice **impropria** se il numeratore è maggiore (ma non multiplo) del denominatore. Una frazione impropria rappresenta un numero maggiore dell'unità.
- In aritmetica per **numero misto** si intende la somma di un numero intero e di una frazione propria . Per passare da una frazione impropria ad un numero misto si procede come segue:

a) si divide il numeratore della frazione per il suo denominatore.

b) sia Q , R , D rispettivamente il quoziente , il resto , il denominatore della frazione considerata :

Risulta: $\frac{N}{D}=Q+\frac{R}{D}$ $\begin{array}{c|c} N & D \\ \hline R & Q \end{array}$ $\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$ $Q=2$ $R=3$ $D=3$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ \cline{2-2} \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{2} & \end{array}$$

Proprietà invariantiva per le frazioni

Moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente a quella data.

- **Semplificare una frazione** significa trasformarla in un'altra equivalente avente numeratore e denominatore più piccoli. La semplificazione si effettua dividendo numeratore e denominatore della data frazione per un loro divisore comune
- Una frazione si dice **irriducibile** o **ridotta ai minimi termini** quando il suo numeratore ed il suo denominatore sono primi fra loro. Per **ridurre ai minimi termini** una frazione basta dividere il suo numeratore ed il suo denominatore per il loro **M.C.D.**

I numeri decimali e le loro frazioni generatrici

La divisione tra due numeri interi può dare luogo ad un **numero decimale limitato** o ad un **numero decimale periodico.**

In un **numero decimale**, il numero formato dalle cifre alla sinistra della virgola si chiama **parte intera** del numero decimale, quello formato dalle cifre a destra della virgola si chiama **parte decimale**. Quindi dicesi **numero decimale** un qualsiasi numero formato da una parte intera e da una parte decimale.

Si chiamano **frazioni decimali** quelle frazioni che hanno come denominatore una potenza del 10 . Per contrapposto , si chiamano **frazioni ordinarie** tutte le frazioni non decimali .

Sono frazioni decimali : $\frac{13}{10}$, $\frac{721}{100}$, $\frac{53427}{1000}$

I simboli 23,5647 , 0,2305 , 6784,235 rappresentano **numeri decimali** . Le cifre che precedono (seguono) la virgola rappresentano la **parte intera** (**decimale**) del numero decimale .

Regola

Per scrivere un numero decimale sotto forma di frazione decimale, si scrive la frazione che ha per numeratore il numero naturale che si ottiene sopprimendo la virgola del numero decimale dato e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero.

$$23{,}45=\frac{2345}{100} \quad , \quad 0{,}047=\frac{47}{1000} \quad , \quad 567{,}2346=\frac{5672346}{10000}$$

Regola

Una frazione decimale può essere trasformata in un numero decimale trascrivendo il numeratore della frazione e separando con una virgola . a partire da destra, tante cifre quanti sono gli zeri del denominatore, aggiungendo, alla sinistra del numeratore, uno o più zeri quando il numero delle cifre del numeratore è inferiore al numero degli zeri del denominatore.

$$\frac{735}{10}=73{,}5 \quad , \quad \frac{32}{1000}=0{,}032 \quad , \quad \frac{5}{10000}=0{,}0005$$

N.B. Il numero delle cifre decimali deve coincidere col numero degli zeri presenti nel denominatore della frazione decimale.

La notazione scientifica di un numero decimale

Ogni numero può essere scritto come il prodotto di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e di una opportuna potenza del 1 .

Si dice pure che il numero è scritto in **forma esponenziale** o con **notazione scientifica**.

Di solito le calcolatrici tascabili utilizzano la **notazione scientifica**.

Esempi

a) $300=3\cdot 10^2=3E\,02$ nella calcolatrice con notazione scientifica il simbolo 10^2 diventa $E\,02$

b) $1250 = 1{,}25 \cdot 10^3 = 1{,}25E\,03$ (10^3 diventa $E\,03$)

c) $27561 = 2{,}7561 \cdot 10^4 = 2{,}7561E\,04$ (10^4 diventa $E\,04$)

d) $0{,}002346 = 2{,}346 \cdot 10^{-3} = 2{,}346E - 03$ (10^{-3} diventa $E - 03$)

- Per numeri non troppo grandi questa forma di scrittura non è conveniente in quanto si userebbero più simboli di quelli presenti nel numero ; diventa vantaggiosa quando si hanno numeri con molte cifre.

Numeri decimali periodici

Dicesi numero decimale periodico ogni numero formato da una parte intera (che può anche essere 0) seguita da infinite cifre decimali che , da un certo punto in poi, si ripetono a gruppi sempre nello stesso ordine. La cifra o il gruppo di cifre che si ripete dicesi periodo. Il periodo può cominciare, oppure no, subito dopo la virgola; nel primo caso il numero dicesi periodico semplice, nel secondo caso dicesi periodico misto.

In un numero periodico misto il gruppo delle cifre decimali che precede il periodo si chiama antiperiodo.

I numeri decimali periodici si rappresentano scrivendo una sola volta il periodo e sopralineandolo, oppure mettendolo entro due parentesi rotonde.

$8{,}2727272727\cdots = 8{,}\overline{27} = 8{,}(27)$ $\qquad$ $23{,}856\overline{32} = 23{,}856(32)$

Una frazione si dice riducibile quando il suo quoziente è un numero decimale limitato. Una frazione si dice irriducibile quando il suo quoziente è un numero decimale illimitato.

Teorema N° 1 **Una frazione irriducibile il cui denominatore non contiene come fattori primi né 2 né 5, è trasformabile in un numero decimale periodico semplice.**

Teorema N° 2 **Una frazione irriducibile il cui denominatore contiene come fattori primi il 2 o il 5 anche qualche altro fattore primo , è trasformabile in un numero decimale periodico misto.**

Teorema N° 3 **Non esiste alcuna frazione dalla quale derivi un numero decimale illimitato periodico con periodo 9.**

Esempio $1{,}\overline{9} = \dfrac{19-1}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$ $\qquad$ $1{,}2\overline{9} = \dfrac{129-12}{90} = \dfrac{129-12}{90} = \dfrac{117}{90} = \dfrac{13}{10} = 1{,}3$

Questo significa che i simboli $1{,}3$ e $1{,}2\overline{9}$ rappresentano lo stesso numero, cioè : $1{,}3 = 1{,}2\overline{9}$

Definizione Chiamasi **frazione generatrice** di un numero decimale periodico, quella frazione tale che il quoziente del suo numeratore per il suo denominatore è il numero periodico dato.

Teorema N° 4 La frazione generatrice di un **numero periodico semplice** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra il numero stesso privato della virgola (e con il periodo scritto una sola volta) ed il numero formato dalle cifre della parte intera, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

$$5,\overline{21} = \frac{521-5}{99} = \frac{516}{99} = \frac{172}{33} \qquad 0,\overline{37} = \frac{37}{99}$$

Teorema N° 5 La **frazione generatrice** di un **numero decimale periodico misto** è una frazione che ha per numeratore la differenza fra il numero stesso privato della virgola (e con il periodo scritto una sola volta) ed il numero formato dalle cifre della parte intera seguita da quelle dell'antiperiodo, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

$$2{,}3\overline{41} = 2{,}3(41) = \frac{2341-23}{990} = \frac{1159}{495} \qquad 0{,}18(3) = 0{,}18\overline{3} = \frac{183-18}{900} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}$$

$$0{,}253\overline{6} = 0{,}253(6) = \frac{2536-253}{9000} = \frac{2283}{9000} = \frac{761}{3000}$$

OSSERVAZIONE << **Come si fa a stabilire se una fraziona dà luogo ad un numero decimale finito , ad un numero decimale periodico semplice, ad un numero decimale periodico misto ?** >>

01) Una frazione, ridotta ai minimi termini , è trasformabile in un **numero decimale finito** se il suo denominatore ha come fattori potenze del 2 o potenze del 5 o potenze di entrambi i fattori.

$$\frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad \frac{13}{4} = 3{,}25 \qquad \frac{13}{20} = 0{,}65$$

02) Una frazione ridotta ai minimi termini si trasforma in un **numero decimale periodico semplice** se il denominatore non contiene i fattori 2 e 5 .

$$\frac{41}{11} = 3{,}7272727272\cdots = 3{,}\overline{72} = 3{,}(72)$$

03) **Una frazione ridotta ai minimi termini si trasforma in un numero decimale periodico misto se il suo denominatore , assieme ad eventuali altri fattori, contiene come fattori potenze del 2 e del 5 , oppure di uno solo di essi.**

$$\frac{41}{44} = \frac{41}{2^2 \cdot 11} = 0{,}93181818\cdots = 0{,}93\overline{18} = 0{,}93(18)$$

Operazioni con numeri decimali periodici

Per eseguire le operazioni con numeri decimali periodici, basta sostituire ad essi le corrispondenti frazioni generatrici ed eseguire i calcoli secondo le regole note .

Semplificazione di una frazione

Una frazione si dice **riducibile** (cioè semplificabile) quando il M.C.D. fra il numeratore ed il denominatore della frazione è diverso da 1.

Una frazione si dice **irriducibile** (cioè non semplificabile) o **ridotta ai minimi termini** quando il M.C.D. fra il numeratore ed il denominatore della frazione è uguale ad 1. Il numeratore ed il denominatore di una frazione irriducibile sono sempre numeri primi fra loro.

Per semplificare una frazione e renderla irriducibile basta dividere il numeratore ed il denominatore della frazione per il loro M.C.D.

$$\frac{84}{210} = \frac{84:42}{210:42} = \frac{2}{5}$$

in quanto risulta: **M.C.D.(84,210) = 42**

Otteniamo lo stesso risultato scomponendo il numeratore ed il denominatore della frazione data in fattori primi, e sopprimendo i fattori comuni ai due termini della frazione.

$$\frac{504}{1260} = \frac{2^{\cancel{3}} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{7}}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{3^2} \cdot 5 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{5}$$

Trasformazione di due o più frazioni ad uno stesso denominatore

Per ridurre due o più frazioni al minimo comune denominatore (indicato col simbolo **m.c.d.**) si procede come segue:

- si semplificano le frazioni (operazione eventuale)
- si calcola il **m.c.m.** dei denominatori delle frazioni considerate
- si trasforma ciascuna frazione, ridotta ai minimi termini, nella frazione equivalente avente per denominatore il **m.c.m.** trovato.

Vogliamo trasformare le seguenti frazioni: $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{15}$ in altre equivalenti aventi lo stesso denominatore. $m.c.m.(6,12,15)=60$, $60:6=10$, $60:12=5$, $60:15=4$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 10}{6\cdot 10}=\frac{50}{60} \qquad \frac{11}{12}=\frac{11\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{55}{60} \qquad \frac{7}{15}=\frac{7\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{28}{60}$$

Operazioni con le frazioni

L'addizione delle frazioni

La **somma** di due o più frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione che ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma di tutti i numeratori.

$$\frac{8}{25}+\frac{3}{25}+\frac{4}{25}=\frac{8+3+4}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

Per sommare due o più frazioni aventi denominatori diversi, si riducono le frazioni considerate al minimo comune denominatore e poi si applica la regola utilizzata per la somma delle frazioni aventi lo stesso denominatore.

$$\frac{10}{12}+\frac{2}{5}+\frac{6}{20}=\frac{5}{6}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{25+12+9}{30}=\frac{46}{30}=\frac{23}{15}$$

Abbiamo eseguito le seguenti operazioni:

- semplificazione delle frazioni da sommare
- calcolo del minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni semplificate

$$m.c.m.(6,5,10)=30$$

- applicazione della regola per il calcolo della somma di frazioni aventi lo stesso denominatore
- semplificazione della somma ottenuta

La sottrazione fra due frazioni

La **differenza** di due frazioni aventi lo stesso denominatore è la frazione che ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la differenza dei numeratori.

$$\frac{8}{25}-\frac{3}{25}=\frac{8-3}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

Per **sottrarre** due frazioni aventi denominatori diversi, si riducono le frazioni considerate al minimo comune denominatore e poi si applica la regola utilizzata per la differenza fra due frazioni aventi lo stesso denominatore.

$$\frac{10}{12}-\frac{2}{5}=\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{25-12}{30}=\frac{13}{30}$$

Espressioni con addizioni e sottrazioni di frazioni

$$\frac{6}{5}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{5}-\frac{3-2}{6}-\frac{9-8}{12}=\frac{6}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{72-10-5}{60}=\frac{57}{60}=\frac{19}{20}$$

La moltiplicazione di due o più frazioni

- Il **prodotto** di due o più frazioni è la frazione avente come numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{49}{12}=\frac{2205}{840}=\frac{21}{8} \quad \text{oppure} \quad \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{15}\,3}{\cancel{14}\,2}\cdot\frac{\cancel{49}\,7}{\cancel{12}\,4}=\frac{21}{8}$$

Inversa o reciproca di una frazione

Due numeri si dicono reciproci o inversi quando il loro prodotto è uguale ad 1. Pertanto la frazione reciproca o inversa di una frazione si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore della frazione data.

Le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ sono frazioni reciproche in quanto risulta: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$

Potenza di una frazione

Per **elevare a potenza** una frazione basta elevare a quella potenza sia il numeratore che il denominatore della frazione. $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$

La divisione di due frazioni

Per effettuare la **divisone** di due frazione basta **moltiplicare** la prima frazione per l'inversa della seconda. $\frac{3}{11}:\frac{7}{4}=\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{77}$

Frazioni a termini frazionari

Una frazione si dice a **termini frazionari** se il suo numeratore o il suo denominatore o entrambi sono delle frazioni.

Una **frazione a termini frazionari** è uguale al prodotto del numeratore per il reciproco del denominatore oppure è uguale ad una frazione che ha come numeratore il prodotto dei termini estremi e come denominatore il prodotto dei termini medi.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{20} \quad \text{oppure} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$$

Esempi

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{2}:\frac{9}{8}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{90+280+105-84}{210}=\frac{391}{210}$$

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\right):\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right):\frac{3}{4}=\frac{6+5}{10}:\frac{2}{3}+\frac{9-8}{12}:\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{11}{10}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}=\frac{33}{20}+\frac{1}{9}=\frac{297+20}{180}=\frac{317}{180}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{9}{8}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{8}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{10}{9}=\frac{8}{27}\cdot\frac{9}{10}+\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}-\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{9}=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}-\frac{2}{5}=\frac{8+9-12}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

Rapporti e proporzioni fra numeri

Si dice **rapporto** fra i numeri **a** e **b**, con **b** diverso da zero, il **quoziente** che si ottiene dividendo il numero **a** per il numero **b**.

Il rapporto fra i numeri **a** e **b** viene indicato con una delle due seguenti scritture:

$$a:b \qquad \frac{a}{b} \qquad b\neq 0$$

Definizione: 4 numeri **a, b, c, d** **formano una proporzione**, se il rapporto tra il primo ed il secondo numero è uguale al rapporto fra il terzo ed il quarto numero. In simboli abbiamo:

$$a:b=c:d \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Lessico

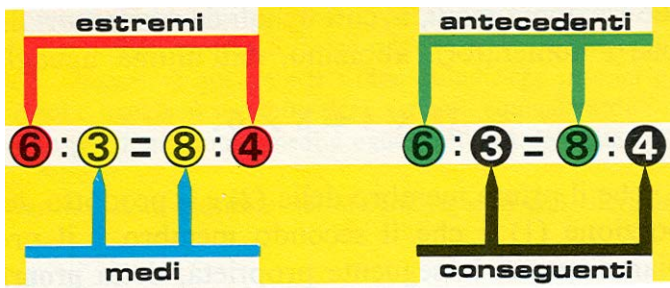
1) I numeri **a, b, c, d** sono i **termini della proporzione**

2) **a** e **b** sono gli <<**estremi**>> della proporzione, **b** e **c** sono i <<**medi** >> della proporzione , **a** e **c** sono gli <<**antecedenti**>> della proporzione, **b** e **d** sono i <<**conseguenti**>> della proporzione.

3) Se tra i numeri **a, b, c** sussiste la seguente proporzione $a:b=b:c$ allora il numero **b** prende il nome di **medio proporzionale** fra i numeri **a** e **c** , mentre il numero **c** prende il nome di **terzo proporzionale** dopo i numeri **a** e **b**. Una **proporzione** si dice **continua** quando i suoi medi sono uguali.

I numeri **6, 3, 8, 4** formano una proporzione in quanto risulta: $6:3=8:4$

Il numero **6** è medio proporzionale tra i numeri **12** e **3** in quanto risulta: $12:6=6:3$



Teorema fondamentale delle proporzioni fra numeri

In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$6:3=8:4 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot 4=8\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 24=24$$

Altre proprietà delle proporzioni fra numeri

La proporzione $a:b=c:d$ fra i numeri **a, b, c, d** gode delle seguenti proprietà formali :

1) In ogni proporzione fra numeri è lecito scambiare ogni antecedente col proprio conseguente (proprietà dell'invertendo) $a:b=c:d \quad \Leftrightarrow \quad b:a=d:c$

2) Se 4 numeri a, b, c, d sono in proporzione , allora si possono scambiare i medi tra loro o gli estremi tra loro (proprietà del permutando)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad a:c=b:d \quad \wedge \quad d:b=c:a$$

3) In ogni proporzione fra numeri, la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) termine, come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine. **(proprietà del componendo)**

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad (a+b):a=(c+d):C \quad \wedge \quad (a+b):b=(c+d):d$$

4) Se in una proporzione il primo termine è maggiore del secondo (e quindi il terzo è maggiore del quarto), la differenza fra il primo ed il secondo termine sta al primo (o al secondo) termine come la differenza tra il terzo ed il quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

(proprietà dello scomponendo o del dividendo)

$$a:b=c:d \quad \Rightarrow \quad (a-b):a=(c-d):c \quad \wedge \quad (a-b):b=(c-d):d$$

5) In ogni serie di rapporti uguali tra numeri, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente.

$$a:b=c:d=e:f \quad \Rightarrow \quad (a+c+e):(b+d+f)=c:d$$

$a:b=c:d$	$a\times d=b\times c$	proprietà fondamentale
$a:b=c:d$	$b:a=d:c$	invertire
$a:b=c:d$	$a:c=b:d$	permutare dei medi
$a:b=c:d$	$d:b=c:a$	permutare degli estremi

$$a:b=c:d \qquad \left.\begin{array}{l}(a+b):a=(c+d):c\\(a+b):b=(c+d):d\end{array}\right\}\ \text{comporre}$$

$$\begin{array}{l}a:b=c:d\\ \text{essendo } a>b\\ \text{e quindi } c>d\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}(a-b):a=(c-d):c\\(a-b):b=(c-d):d\end{array}\right\}\ \text{scomporre}$$

$$a:b=c:d \qquad \left.\begin{array}{l}(a+c):(b+d)=a:b\\(a+c):(b+d)=c:d\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{comporre degli antecedent}\\ \text{e dei conseguenti}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}a:b=c:d\\ \text{essendo } a>c\\ \text{e quindi } b>d\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}(a-c):(b-d)=a:b\\(a-c):(b-d)=c:d\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{scomporre degli antecedent}\\ \text{e dei conseguenti}\end{array}$$

Calcolo del termine incognito di una proporzione

Regola: In ogni proporzione un estremo incognito è uguale al prodotto dei medi diviso per l''altro estremo.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $12:8=3:x$ $\quad x=\dfrac{8\cdot 3}{12}=2$

Regola: In ogni proporzione un medio incognito è uguale al prodotto degli estremi diviso per l''altro medio.

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $15:5=x:3$ $\quad x=\dfrac{15\cdot 3}{5}=9$

Regola: **In ogni proporzione continua il medio incognito è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.**

Esempio: Calcolare il valore della **x** sapendo che: $12:x=x:3$ $\quad x=\sqrt{12\cdot 3}=\sqrt{36}=6$

Problemi del tre semplice

Si chiamano problemi del **tre semplice** quei problemi nei quali intervengono due grandezze direttamente o inversamente proporzionali. Conosciamo una coppia di valori corrispondenti delle due grandezze (ad esempio **X** ed **Y**) ed un altro valore di una di esse (ad esempio di **X**); vogliamo calcolare il valore della grandezza **Y** che corrisponde alla grandezza **X**.

Osservazione: Si chiamano **problemi del tre semplice** in quanto noti tre valori vogliamo calcolarne un quarto. La denominazione **semplice** deriva dal fatto che in questi problemi intervengono soltanto **due grandezze**. I problemi nei quali sono presenti più di due grandezze prendono il nome di **problemi del tre composto**.

Problema del tre semplice quando le grandezze sono direttamente proporzionali.

Un rubinetto versa in 4 ore 160 litri di acqua. Quanti litri di acqua verserà in 7 ore?

Per la risoluzione del problema possiamo utilizzare il seguente schema convenzionale, nel quale le frecce aventi lo stesso orientamento ci dicono che le grandezze presenti nel problema sono direttamente proporzionali.

Tempo (ore)	*Litri versati*
4 ↓	160 ↓
7	x

$4:7=160:x$ $\qquad x=\dfrac{160\times 7}{4}=280\,.$

Il rubinetto verserà in 7 ore, 280 litri di acqua.

Problema del tre semplice quando le grandezze sono inversamente proporzionali.

Per compiere un determinato lavoro 10 operai impiegano 18 giorni; quanti giorni impiegheranno 15 operai aventi la stessa capacità lavorativa per compiere lo stesso lavoro?

Per la risoluzione del problema possiamo utilizzare il seguente schema convenzionale, nel quale le frecce aventi orientamento opposto ci dicono che le grandezze presenti nel problema sono inversamente proporzionali.

Operai		*Tempo* (giorni)	
10	$\downarrow$	18	$\uparrow$
15		x	

$$10 : 15 = x : 18$$

$$x = \frac{10 \times 18}{15} = 12 .$$

Concludiamo così che 15 operai impiegheranno 12 giorni per compiere il lavoro.