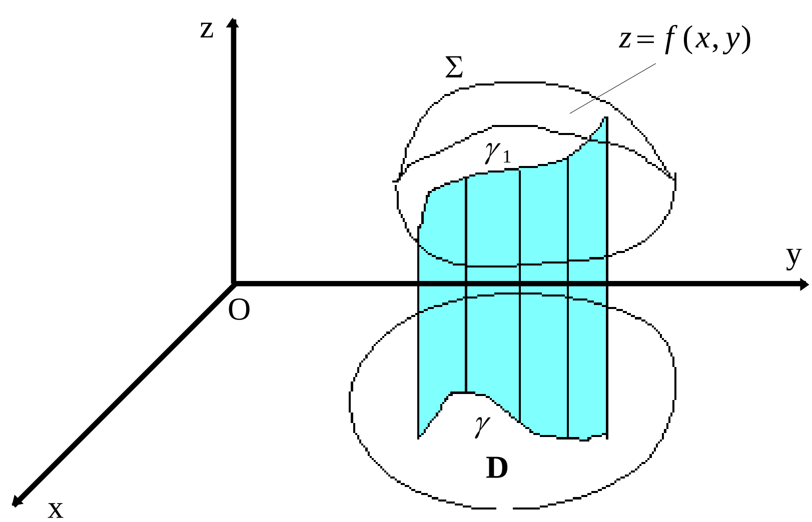
Integrali curvilinei di prima specie o integrale curvilineo al differenziale d'arco

Consideriamo la superficie gobba Σ di equazione $z = f(x,y)$ e sia **D** il suo insieme di esistenza. Consideriamo poi la curva φ (avente **sostegno** γ) di equazioni:

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_o \leq t \leq t_1$$

Proiettiamo ortogonalmente sulla superficie Σ tutti i punti di γ; otteniamo una curva γ_1 che giace per intero sulla superficie Σ. Col simbolo $\int_{t_o}^{t} f(x,y)\,ds$ intendiamo riferirci a quell'integrale curvilineo che va sotto il nome di **integrale curvilineo al differenziale della lunghezza d'arco**, dove $d\,s$ rappresenta l'elemento infinitesimo di lunghezza della curva γ considerata. Abbiamo visto che risulta: $d\,s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt$



Esistono anche integrali curvilinei scritti così: $\int f(x,y)\,dx$ oppure $\int f(x,y)\,dy$ detti rispettivamente **integrali curvilinei in** dx ed **integrali curvilinei in** dy.

Con l'**integrale curvilineo al differenziale d'arco** vogliamo trovare un integrale definito che è una generalizzazione in R^3 dell'integrale definito introdotto precedentemente in R^2. Come si vede l'interpretazione geometrica di integrale curvilineo è sempre la stessa: **area al di sotto del grafico di una funzione** (nel nostro caso quella colorata).

Tutto quello che dobbiamo fare è mettere al posto dell'incremento infinitesimo di una variabile rettilinea (perché il dx sta su una retta) l'incremento infinitesimo $d\,s$ di una coordinata curvilinea (l'ascissa curvilinea **s**). Per completare la definizione bisogna dire che il valore $f(x,y)$ non va calcolato in tutti i punti del piano $x\,y$ ma esclusivamente nei punti che siano proiezione ortogonale della curva γ sulla superficie Σ.

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,ds = \int_{t_o}^{t} f[x(t),y(t))\cdot ds = \int_{t_o}^{t} f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\cdot dt$$

Infatti, la variabile x non è una x qualsiasi ma deve essere espressa mediante la legge che ci dà la nostra curva γ e lo stesso deve verificarsi per la variabile y.

Il **primo elemento dell'integrale curvilineo** sarà rappresentato da una certa variabile reale **t** la quale serve per costruire una funzione vettoriale $\varphi(t) = \big(x(t),y(t)\big) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}$

che ha come **grafico** la curva di base che abbiamo chiamato $\varphi(t)$: $t\to\varphi(t): R\to R^2$

cioè $\varphi(t)$ è una funzione che ad ogni $t\in[t_o,t]$ associa il punto $P[x(t),y(t)]$ di R^2.

Il **secondo elemento necessario** sarà rappresentato dalla funzione f che fornisce la superficie Σ. Essa è una funzione definita in un insieme **D** di due variabili, quindi il suo insieme di definizione è un sottoinsieme del piano $x\,y$ cioè di R^2.

Allora f è una funzione che va da $R^2 \to R$: $f(x,y) : R^2 \to R$

Ricordando che: $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ possiamo scrivere:

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,ds = \int_{t_o}^{t} f[x(t),y(t))\cdot\|\varphi'(t)\|\cdot dt = \int_{t_o}^{t} f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\cdot dt$$

Questo integrale prende il nome di **integrale curvilineo al differenziale d'arco** ed il suo significato è quello di **area** (**colorata** nel disegno)

Proprietà additiva rispetto alla curva d'integrazione

Se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ con $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$ allora $\int_{\gamma} f\,d\,s = \int_{\gamma_1} f\,d\,s + \int_{\gamma_2} f\,d\,s$

Proprietà di linearità rispetto alla funzione integranda

$$\int_{\gamma}(\alpha f + \beta f)ds = \alpha\int_{\gamma} f\,ds + \beta\int_{\gamma} f\,ds$$

Elenchiamo le formule da applicare per calcolare l'**integrale curvilineo di prima specie** della funzione $f(x,y)$ su una curva γ dello spazio a due dimensioni R^2

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad a \le t \le b$$

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y)ds = \int_a^b f[x(t), y(t)) \cdot ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \cdot dt$$

$$\gamma : y = g(x) \qquad x_A \le x \le x_B \qquad ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \cdot dx$$

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y)ds = \int f[x, g(x)] \cdot \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \cdot dx$$

$$\gamma : \rho = \rho(\vartheta) \qquad \vartheta_A \le \vartheta \le \vartheta_B \qquad \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta = \rho(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = [\rho'(\vartheta)\cos\vartheta - \rho(\vartheta)\sin\vartheta]d\vartheta \\ dy = [\rho'(\vartheta)\sin\vartheta + \rho(\vartheta)\cos\vartheta]d\vartheta \end{cases} \qquad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[\rho'(\vartheta)]^2 + \rho(\vartheta)]^2} \cdot d\vartheta$$

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y)ds = \int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} f[\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) \cdot ds = \int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} f[\,f[\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)] \cdot d\sqrt{[\rho'(\vartheta)]^2 + \rho(\vartheta)]^2} \cdot d\vartheta$$

Elenchiamo le formule da applicare per calcolare l'**integrale curvilineo di prima specie** della funzione $f(x,y,z)$ su una curva γ dello spazio a tre dimensioni R^3

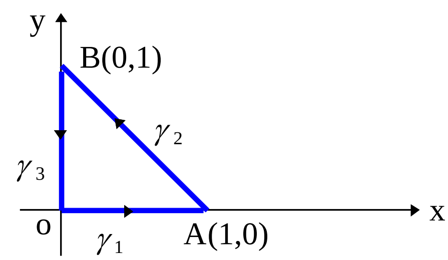
$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad a \le t \le b \qquad ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt \qquad \begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \\ dz = z'(t)dt \end{cases}$$

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y,z)ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)) \cdot ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \cdot dt$$

$$\gamma : \begin{cases} y = g(x) \\ z = p(x) \end{cases} \qquad x_A \le x \le x_B$$

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y,z)ds = \int_{x_A}^{x_B} f[x, g(x), p(x)] \cdot \sqrt{1 + [g'(x)]^2 + [p'(x)]^2} \cdot dx$$

Calcolare $\int_\gamma (x + y)\, ds$ dove γ è il perimetro del triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ [1]



Calcoliamo l'integrale curvilineo proposto percorrendo il perimetro del triangolo OAB in senso antiorario.

equazioni parametriche del segmento OA orientato da O verso B

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le t \le 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ O \quad A \end{matrix} \qquad ds = dt$$

equazioni parametriche del segmento AB orientato da A verso B

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le t \le 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ A \quad B \end{matrix} \qquad ds = \sqrt{2} \cdot dt$$

equazioni parametriche del segmento BO orientato da B verso O

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le t \le 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ B \quad O \end{matrix} \qquad ds = dt$$

Complessivamente avremo:

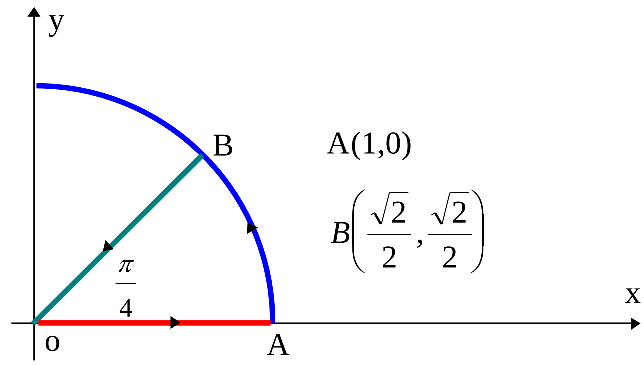
$$\int_\gamma (x+y)\, ds = \int_0^1 t\sqrt{1+0} \cdot dt + \int_0^1 1\sqrt{1+1}\, dt + \int_0^1 (1-t)\sqrt{0+1}\, dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\sqrt{2} \cdot t\right]_0^1 + \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le t \le 1 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ A \qquad B \end{matrix}$$ equazioni parametriche del segmento AB orientato da A verso B

[1] Lonzi 19 giugno 1992

Calcolare l'integrale $\int_\gamma e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot ds$ esteso alla frontiera γ, percorsa in senso antiorario, del settore circolare nel primo quadrante, di vertice l'origine O, di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ ed avente come primo estremo dell'arco il punto $A(1,0)$.



Indicato con $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ l'altro estremo dell'arco, abbiamo:

$$OA : \begin{cases} x = x_o + (x_A - x_o)t \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 & \le & t & \le & 1 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ O & & & & A \end{matrix} \qquad ds = dt$$

$$AB : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 & \le & t & \le & \frac{\pi}{4} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ A & & & & B \end{matrix} \qquad \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \qquad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt$$

$$BO : \begin{cases} x = x_B + (x_o - x_B)t \\ y = y_B + (y_o - y_B)t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 & \le & t & \le & 1 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ B & & & & O \end{matrix} \qquad \begin{cases} x'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad ds = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}dt = dt$$

$$\int_\gamma e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot ds = \int_{\gamma_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot ds + \int_{\gamma_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot ds + \int_{\gamma_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot ds \int_0^1 e^t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\,dt + \int_0^1 e^{1-t}\,dt$$

$$\int_\gamma e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot ds = e - 1 + e^{\frac{\pi}{4}} - 1 + e - 1 = 2e + e^{\frac{\pi}{4}} - 3$$

$$\int_\gamma \frac{x^2}{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot dta$$

$$\int_\gamma \frac{x^2}{x^2+y^2}\,ds = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 & \le & t & \le & 2\pi \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ A & & & & A \end{matrix} \qquad \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt$$